The Extended Abstracts of
The 6th Seminar on Functional Analysis and its Applications
4-5th March 2020, University of Isfahan, Iran

MENGER PROBABILISTIC NORMED RIESZ SPACES AND HYERS STABILITY

EHSAN MOVAHEDNIA *[1] AND PARVANEH LO′LO′ [2]

[1] *Department of Mathematics, Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Behbahan, Iran*
movahednia@bkatu.ac.ir
[2] *Department of Mathematics, Behbahan Khatam Alanbia University of Technology, Behbahan, Iran*
lolo@bkatu.ac.ir

ABSTRACT. In this paper, we introduce the concept of Menger probabilistic normed Riesz spaces. Next, we investigate the Hyers Ulam Rassias stability of preserving lattice cubic functional equation in Menger probabilistic normed Riesz spaces.

1. INTRODUCTION

The theory of probabilistic metric spaces was introduced by Menger [?] in 1951. He emphasized that replacing the number $d(p, q)$, which gives the distance between two points p and q in a non-empty set S, by a distribution function F_{pq} whose value $F_{p,q}(t)$ at $t \in [0, +\infty)$ is interpreted as the probability of the distance between the points p and q is smaller than t. Menger's idea was developed by the mathematicians. The theory of probabilistic normed spaces, was introduced by Serstnev in 1963 [?].

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 39B05, 39B82; Secondary: 46B09, 46B42.

Key words and phrases. Hyers-Ulam-Rassias stability; Banach lattice; probabilistic normed space.

* Speaker.

A classical question in the theory of functional equations is the following: When is it true that a function which approximately satisfies a functional equation D must be close to an exact solution of D? If the problem accepts a solution, we say that the equation D is stable. The first stability problem concerning group homomorphisms was raised by Ulam [?] in 1940.

Riesz spaces or vector lattices are real vector spaces equipped with a partial order. Under this partial order the Riesz spaces must satisfy some axioms, including the axiom that it is a lattice. Riesz spaces are named after Frigyes Riesz who first defined them in 1930 [?].

A non empty set X with a relation "$\leq$" is said to be an ordered set whenever the following conditions are satisfied

1. $x \leq x$ for every $x \in X$;
2. $x \leq y$ and $y \leq x$ implies that $x = y$ for all $x, y \in X$;
3. $x \leq y$ and $y \leq z$ implies that $x \leq z$ for all $x, y, z \in X$.

An order set $(X, \leq)$ is called a lattice if any two elements $x, y \in X$ which have a least upper bound denoted by $x \vee y = \sup\{x, y\}$ and a greatest lower bound denoted by $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.
A real vector space X which is also an order set is an order vector space if the order and the vector space structure are compatible in the following sense

1. If $x, y \in X$ such that $x \leq y$, then $x + z \leq y + z$ for all $z \in X$,
2. If $x, y \in X$ such that $x \leq y$ then $\alpha x \leq \alpha y$, for all $\alpha \geq 0$.

If $(X, \leq)$ is lattice and order vector space then it is called Riesz space. A norm $\|.\|$ on Riesz space X, is called lattice norm if $\|x\| \leq \|y\|$ whenever $|x| \leq |y|$. A normed Riesz space $(X, \|.\|, \leq)$ is called Banach lattice if $(X, \|.\|)$ is Banach space, $(X, \leq)$ is Riesz space and $\|.\|$ is lattice norm, for all $x, y \in X$.

Let X be a Riesz space, let the positive cone X^+ of X consist of all $x \in X$ such that $x \geq 0$. For every $x \in X$, let

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = -x \vee 0, \quad |x| = x \vee -x.$$

Let X be a Riesz space, for all $x, y, z \in X$, the following assertions hold

1. $x + y = x \vee y + x \wedge y \ , \ -(x \vee y) = -x \wedge -y$.
2. $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \ , \ x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.
3. $|x| = x^+ + x^- \ , \ |x + y| \leq |x| + |y|$.
4. $x \leq y$ is equivalent to $x^+ \leq y^+$ and $y^- \leq x^-$.
5. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \ , \ (x \wedge y) \vee z = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$.

A Riesz space X is Archimedean, if $x \leq 0$ holds whenever the set $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ is bounded from above.

Definition 1.1. Let X, Y be Archimedean Riesz spaces. The function $P : X \to Y$ is called positive if $P(X^+) = \{P(|x|) : x \in X\} \subset Y^+$.

Theorem 1.2. *For a function $P : X \to Y$ between two Riesz spaces the following statements are equivalent*

1. *P is lattice homomorphism. (It means that $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ for all $x, y \in X$).*
2. *$P(x^+) = P(x)^+$ for all $x \in X$.*
3. *$P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$, for all $x, y \in X$.*

Definition 1.3. Let X and Y be two Banach Lattices and $P : X \to Y$ a positive function. We define

(P_1) Lattice homomorphism functional equation: for all $x, y \in X$

$$P\left(|x| \vee |y|\right) = P(|x|) \vee P(|y|).$$

(P_2) semi-homogeneity: for all $x \in X$ and every number $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$P(\alpha|x|) = \alpha P(|x|).$$

(P_3) homogeneity of degree 3: for all $x \in X$ and every number $\beta \in \mathbb{R}^+$,

$$P(\beta|x|) = \beta^3 P(|x|).$$

Remark 1.4. Given two Banach lattices X and Y, let a positive function $P : X \to Y$ satisfy property (P_1). Then the following statements are valid

1. $P(|x \vee y|) \leq P(|x|) \vee P(|y|)$ for all $x, y \in X$.
2. The semi-homogeneity implies that $P(0) = 0$.
3. P is an increasing operator, in the sense that if $x, y \in X$ are such that $|x| \leq |y|$, then $P(|x|) \leq P(|y|)$.

A *distance distribution function* (briefly, a d.d.f.) is a non-decreasing function F defined on $\mathbb{R}^+$ that satisfies $F(0) = 0$ and $F(+\infty) = 1$, and is left continuous on $(0, \infty)$. The set of all d.d.f's will be denoted by Δ^+; and the set of all F in Δ^+ for which $\lim_{x \to +\infty^-} F(x) = 1$ by D^+. The elements of Δ^+ are partially ordered via $F \leq G$ if and only if $F(x) \leq G(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^+$.

The space Δ^+ has both maximal element ϵ_0 and a minimal element ϵ_∞ defined by

$$\epsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases} \qquad \epsilon_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < +\infty \\ \\ 1 & \text{if } x = \infty \end{cases}$$

A t-norm T is continuous if and only if it is continuous in the first component, i.e., if for each $y \in [0, 1]$ the one place function

$$T(., y) : [0, 1] \to [0, 1] \qquad x \longmapsto T(x, y);$$

is continuous. A continuous t-norm T is *Archimedean* if $T(x,x) < x$ for all $x \in (0,1)$.

Definition 1.5. [?] A Menger probabilistic normed Riesz space (Menger PNR- space for short) is a qua-ternary $(X, \nu, T, \leq)$ where $(X, \leq)$ is a real Riesz space, T is a continuous t-norm and $\nu : X \to D^+$ (for $x \in X$ the distribution function $\nu(x)$ is denoted by ν_x and $\nu_x(t)$ is the value of ν_x at $t \in \mathbb{R}$) satisfying the following conditions
(M1) $\nu_x(0) = 0$ for all $x \in X$;
(M2) $\nu_x = \epsilon_0$ iff $x = \theta$ (θ is the null vector in X);
(M3) $\nu_{\alpha x}(t) = \nu_x(\frac{t}{|\alpha|})$ for all $x \in X$ and $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(M4) $\nu_{x+y}(t_1 + t_2) \geq T\left(\nu_x(t_1), \nu_y(t_2)\right)$, for all $x, y \in X$ and $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$;
(M5) norm Riesz Menger property: $\nu_x(t) \geq \nu_y(t)$ whenever $|x| \leq |y|$ for all $x, y \in X$ and $t \in \mathbb{R}^+$.

Example 1.6. Let $(X, \|.\|, \leq)$ be a normed Riesz space. Define $\nu : X \to D^+$ by

$$\nu_x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|} & \text{if } t > 0 \\ \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

then $(X, \nu, T, \leq)$ is a Menger PNR space.

Definition 1.7. [?] Let $(X, \nu, T, \leq)$ be an Menger probabilistic normed Riesz space. Let $\{x_n\}$ be a sequence in X. Then $\{x_n\}$ is said to be convergent if there exists an $x \in X$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \nu_{x_n - x}(t) = 1.$$

In this case x is called the limit of $\{x_n\}$.

Definition 1.8. [?] The sequence $\{x_n\}$ in Menger probabilistic normed Riesz space $(X, \nu, T, \leq)$ is called Cauchy if for each $\epsilon > 0$ and $\delta > 0$, there exists some n_0 such that

$$\nu_{x_n - x_m}(\delta) > 1 - \epsilon,$$

for all $m, n \geq n_0$.

Clearly, every convergent sequence in a Menger probabilistic normed Riesz space is Cauchy. If each Cauchy sequence is convergent in a Menger probabilistic normed Riesz space $(X, \nu, T, \leq)$, then it is called Menger probabilistic Banach Riesz space (briefly, Menger PBR- space).

Theorem 1.9. [?] *Let $(X, \nu, T, \leq)$ be a Menger probabilistic normed Riesz space, then lattice operators are continuous.*

2. Main Results

Theorem 2.1. *Let f be a function from Menger probabilistic normed Riesz space $(X, \nu, T, \leq)$ to Menger probabilistic Banach Riesz space $(Y, \mu, T, \leq)$, where T is an Archimedean continuous t-norm and $\nu_p, \mu_q \neq \epsilon_\infty$, for all $p \in X$ and $q \in Y$. Let*

$$\mu_{f(x_0 \vee \tau x \vee \eta y) - \tau f(x) \vee \eta f(y)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,y)}(t) \tag{2.1}$$

for all $x_0, x, y \in X$, with $x_0 \neq 0$ and for all $\tau, \eta \geq 1$ and $t > 0$. Here $\varphi : X \times X \to X$ is a mapping such that

$$\varphi(S_1(x), S_1(y)) \leq \tau^\alpha \varphi(x, y), \tag{2.2}$$

for some $\alpha \in [0, 1)$. Then there exists a unique function $\mathbf{g} : X \to Y$ which satisfies property $P1$ and inequality

$$\mu_{\mathbf{g}(x)-f(x)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,x)}\left((\tau - \tau^\alpha)t\right) \tag{2.3}$$

is thus valid for every $x \in X$.

Proof. Replacing y and η with x and τ, respectively, in (**??**), we get

$$\mu_{f(S_1(x)) - \tau f(x)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t), \tag{2.4}$$

for all $x \in X$. Hence

$$\mu_{\frac{1}{\tau} f(S_1(x)) - f(x)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t), \tag{2.5}$$

for all $x \in X$. Putting $x = S_1(x)$ in the above inequality, (**??**) and $(M5)$, we obtain

$$\begin{aligned} \mu_{\frac{1}{\tau} f(S_2(x)) - f(S_1(x))}\left(\frac{t}{\tau}\right) &\geq \nu_{\varphi(S_1(x), S_1(x))}(t) \\ &\geq \nu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{t}{\tau^\alpha}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

for all $x \in X$. Therefore

$$\mu_{\frac{1}{\tau^2} f(S_2(x)) - \frac{1}{\tau} f(S_1(x))}\left(\tau^{\alpha-2} t\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t), \tag{2.7}$$

for all $x \in X$ and $t > 0$. By comparing (**??**) and (**??**) and by using $(M4)$, we have

$$\mu_{\frac{1}{\tau^2} f(S_2(x)) - f(x)}\left((\tau^{-1} + \tau^{\alpha-2})t\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t), \tag{2.8}$$

for all $x \in X$. Again, replacing x by $S_1(x)$ and using $(M5)$ in the last inequality, we get

$$\begin{aligned} \mu_{\frac{1}{\tau^2} f(S_3(x)) - f(S_1(x))}\left((\tau^{-1} + \tau^{\alpha-2})t\right) &\geq \nu_{\varphi(S_1(x), S_1(x))}(t) \\ &\geq \nu_{\tau^\alpha \varphi(x,x)}(t), \end{aligned} \tag{2.9}$$

for all $x \in X$. It follows that

$$\mu_{\frac{1}{\tau^3}f(S_3(x))-\frac{1}{\tau}f(S_1(x))}\left((\tau^{\alpha-2}+\tau^{2\alpha-3})t\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t). \tag{2.10}$$

Comparing (??) and (??) and by using $(M4)$, we obtain

$$\mu_{\frac{1}{\tau^3}f(S_3(x))-f(x)}\left((\tau^{-1}+\tau^{\alpha-2}+\tau^{2\alpha-3})t\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t), \tag{2.11}$$

for all $x \in X$ and $t > 0$. By following this process, we have

$$\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-f(x)}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}t\right)\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t). \tag{2.12}$$

for all $n \in \mathbb{N}$. Replacing n by $n-m$ in the above inequality, for some $m \in \mathbb{N}$, such that $n > m$. We get

$$\mu_{\frac{1}{\tau^{n-m}}f(S_{n-m}(x))-f(x)}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\tau^{k(\alpha-1)}t\right)\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t). \tag{2.13}$$

Substituting x with $S_m(x)$ in (??) and using $(M5)$, we obtain

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{1}{\tau^{n-m}}f(S_n(x))-f(S_m(x))}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-m-1}\tau^{k(\alpha-1)}t\right)\right) &\geq \nu_{\varphi(S_m(x),S_m(x))}(t)\\ &\geq \nu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{t}{\tau^{m\alpha}}\right),\end{aligned}$$

for all $x \in X$. Therefore

$$\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-\frac{1}{\tau^m}f(S_m(x))}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=m}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}t\right)\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t). \tag{2.14}$$

Let $c > 0$ and $\epsilon > 0$ be given. Since $\nu_{\varphi_{(x,x)}}(t) \in D^+$, so $\lim_{t\to\infty}\nu_{\varphi(x,x)}(t) = 1$. Therefore there is some $t_0 > 0$, such that

$$\nu_{\varphi(x,x)}(t_0) \geq 1-\epsilon.$$

Fix some $t \geq t_0$. Since $\sum_{k=1}^{\infty}\tau^{k(\alpha-1)} = \dfrac{\tau^\alpha}{\tau-\tau^\alpha}$, so there exists some $n_0 \geq 0$, such that for each $n > m > n_0$, the inequality

$$\tau^{-1}\sum_{k=m}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}t < c, \tag{2.15}$$

holds. It follows that

$$\begin{aligned}\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-\frac{1}{\tau^m}f(S_m(x))}(c) &\geq \mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-\frac{1}{\tau^m}f(S_m(x))}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=m}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}t_0\right)\right)\\ &\geq \nu_{\varphi(x,x)}(t_0)\\ &\geq 1-\epsilon, \qquad (2.16)\end{aligned}$$

for all $x \in X$. Hence $\left\{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))\right\}$ is a Cauchy sequence in Menger probabilistic Banach Riesz space $(Y, \mu, T, \leq)$ and thus this sequence converges to $\mathbf{g}(x) \in Y$. It means that

$$\lim_{n\to\infty}\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-\mathbf{g}(x)}(t) = 1, \qquad (2.17)$$

for all $x \in X$. Furthermore, by putting $m = 0$ in (**??**), we obtain

$$\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-f(x)}\left(\tau^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}t\right)\right) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t). \qquad (2.18)$$

Therefore

$$\mu_{\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))-f(x)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{\tau.t}{\sum_{k=0}^{n-1}\tau^{k(\alpha-1)}}\right). \qquad (2.19)$$

Since $\nu_p, \mu_q \neq \epsilon_\infty$ and T is an Archimedean continuous t-norm, then norm probabilistic is continuous [**?**]. Thus as $n \to \infty$, we have

$$\mu_{\mathbf{g}(x)-f(x)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,x)}\left((\tau-\tau^\alpha)t\right). \qquad (2.20)$$

Next, we show that $\mathbf{g}$ satisfies $P1$. Replacing η by τ in (**??**), we get

$$\mu_{f(x_0\vee\tau x\vee\tau y)-\tau f(x)\vee\tau f(y)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,y)}(t). \qquad (2.21)$$

We have

$$\mu_{f(S_1(x\vee y))-\tau f(x)\vee\tau f(y)}(t) \geq \nu_{\varphi(x,x)}(t) \qquad (2.22)$$

Substituting x, y with $S_n(x)$ and $S_n(y)$ respectively, in the last inequality, we get

$$\mu_{f(S_1(S_n(x)\vee S_n(y)))-\tau f(S_n(x))\vee\tau f(S_n(y))}(t) \geq \nu_{\varphi(S_n(x),S_n(y))}(t). \qquad (2.23)$$

It follows that

$$\begin{aligned}\mu_{f(S_{n+1}(x\vee y)-\tau f(S_n(x))\vee\tau f(S_n(y))}(t) &\geq \nu_{\varphi(S_n(x),S_n(y))}(t)\\ &\geq \nu_{\tau^{n\alpha}\varphi(x,y)}(t)\\ &= \nu_{\varphi(x,y)}\left(\frac{t}{\tau^{n\alpha}}\right), \qquad (2.24)\end{aligned}$$

for all $x \in X$. This yields

$$\mu_{\frac{1}{\tau^{n+1}}f(S_{n+1}(x\vee y))-\frac{1}{\tau^n}f(S_n(x))\vee\frac{1}{\tau^n}f(S_n(y))}(t) \geq \nu_{\varphi(x,y)}(\tau(\tau^{n(1-\alpha)})t) \qquad (2.25)$$

Since norm probabilistic is continuous, so the term on the right-hand side of the above inequality tends to 1 as $n \to \infty$. Therefore

$$\mu_{\mathbf{g}(x\vee y)-\mathbf{g}(x)\vee\mathbf{g}(y)}(t) \geq 1. \tag{2.26}$$

So

$$\mathbf{g}(x \vee y) = \mathbf{g}(x) \vee \mathbf{g}(y). \tag{2.27}$$

Consequently, the property $(P1)$ holds and the proof is completed. □

References

1. K. Menger, *Probabilistic geometry*, Proc. Natl. Acad.Sci,USA, Vol. 37, pp. 226-229(1951).
2. A. N. Serstnev, *On the Nation of a Random Normed Spaces*, Doki. Akad. Nauk. SSSR 149, pp. 280-283 (1963).
3. S. M. Ulam, *Problems in Modern Mathematics*, Chapter 6, Wiley, New York, NY, USA (1964).
4. F, Riesz, *Sur la decomposition des oprations fonctionnelles linaires*, Atti Congr. Internaz. Mat., Bologna, Vol. 3, pp.143-148 (1930).
5. B. L. Guillen and P. Harikrishnan, *Probabilistic Normed Spaces*, Imperial College Press (2014).

خواصی از دوگان ترتیبی بی‌کران یک مشبکه‌ی باناخ

لیلا حسن زاده[1]*، دکتر اصغر رنجبری [2]، و زهرا امیر پرویز[3]

[1,2,3] *گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز*
l.hasanzadeh97@ms.tabrizu.ac.ir
ranjbari@tabrizu.ac.ir
z.amirparviz97@ms.tabrizu.ac.ir

چکیده. فرض کنیم E یک مشبکه‌ی باناخ و $\tilde{E_{uo}}$ دوگان ترتیبی بی‌کران آن باشد. بزرگترین ایده‌آل بسته‌ی نرمی E با E^a نشان داده می‌شود و بخش پیوسته‌ی ترتیبی آن نامیده می‌شود. دراین مقاله نشان داده می‌شود که $\tilde{E_n}$ بخش پیوسته‌ی ترتیبی $\tilde{E_{uo}}$ می‌باشد.

۱. پیش‌گفتار

مشبکه‌ی برداری E، یک فضای برداری مرتب می‌باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر دو بردار $x, y \in E$، $sup\{x, y\}$ و $inf\{x, y\}$ هر دو در E موجود باشند. سوپریمم و اینفیمم دو عضو به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند.

$$x \vee y := sup\{x, y\} \quad , \quad x \wedge y := inf\{x, y\}.$$

در هر مشبکه ی برداری قسمت مثبت، قسمت منفی و قدرمطلق برداری مانند x را به ترتیب با $x^+ = x \vee 0$ و $x^- = (-x) \vee 0$ و $|x| = x \vee (-x)$ تعریف می‌کنیم. تور $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ در مشبکه‌ی برداری E همگرای ترتیبی به $x \in E$ گفته می‌شود و به‌صورت $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ نشان داده می‌شود هرگاه تور دیگری مانند $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ در E موجود باشد به‌طوری‌که $y_\gamma \downarrow 0$ و برای هر $\gamma \in \Gamma$، $\alpha_0 \in I$ ای موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $\alpha \geq \alpha_0$، $|x_\alpha - x| \leq y_\gamma$. همچنین یک تور مانند (x_α) در مشبکه‌ی برداری E را همگرای ترتیبی بی‌کران به $x \in E$ گوییم و با نماد $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ نشان می‌دهیم هرگاه برای هر $y \in E^+$ داشته باشیم $|x_\alpha - x| \wedge y \xrightarrow{o} 0$. تور (x_α) در مشبکه‌ی برداری E را پوچ ترتیبی بی‌کران گوییم هرگاه $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$. زیرمجموعه‌ی A از

2010 Mathematics Subject Classification. Primary: 46B42; Secondary: 46A20.

واژگان کلیدی. همگرایی ترتیبی بی‌کران، دوگان پیوسته‌ی ترتیبی، دوگان ترتیبی بی‌کران.

مشبکه‌ی برداری E را صلب(توپر) می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in E$، $|x| \leq |y|$ و $y \in A$ نتیجه دهد که $x \in A$. هر زیرفضای برداری صلب مانند A از مشبکه‌ی برداری E را یک ایده‌آل (ایده‌آل ترتیبی) می‌گوییم. تابعی خطی $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ روی مشبکه‌ی برداری E را پیوسته‌ی ترتیبی گوییم هرگاه برای هر تور $(x_\alpha) \subseteq E$، اگر $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ در E، آنگاه $\phi(x_\alpha) \longrightarrow 0$ در $\mathbb{R}$. فضای برداری تمام تابعی های خطی و پیوسته‌ی ترتیبی روی مشبکه‌ی برداری E دوگان پیوسته‌ی ترتیبی E گفته می‌شود و با $E_n^{\sim}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱. *نرم $\|.\|$ روی مشبکه‌ی برداری E یک نرم مشبکه‌ای است هرگاه رابطه‌ی $|x| \leq |y|$ در E مستلزم $\|x\| \leq \|y\|$ باشد. هر مشبکه‌ی برداری نرم‌دار، مشبکه‌ی برداری مجهز به یک نرم مشبکه‌ای است. اگر مشبکه‌ی برداری نرم‌دار E کامل باشد، E را یک مشبکه‌ی باناخ می‌نامیم.*

تعریف ۲.۱. *فرض کنیم E یک مشبکه‌ی باناخ باشد. تابعی خطی ϕ روی E به‌طور کراندار پیوسته‌ی ترتیبی بی‌کران گفته می‌شود هرگاه برای هر تور پوچ ترتیبی بی‌کران کراندار نرمی (x_α) در E، $\phi(x_\alpha) \to 0$.*

بخش پیوسته‌ی ترتیبی مشبکه‌ی باناخ E را با E^a نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E^a = \{x \in E : \quad \text{هر دنباله‌ی مجزا در } [0, |x|] \text{ پوچ نرمی است}\}.$$

۲. دست‌آوردهای پژوهش

فرض کنیم E یک مشبکه‌ی باناخ باشد. در این بخش نشان می‌دهیم که بزرگترین ایده‌آل بسته‌ی نرمی $E_n^{\sim}$ برابر $E_{uo}^{\sim}$ خواهد شد.

قضیه ۱.۲. *فرض کنیم E یک مشبکه‌ی باناخ باشد. در این صورت برای هر $\phi \in E_n^{\sim}$ احکام زیر معادلند:*

(۱) $\phi \in E_{uo}^{\sim}$؛
(۲) *برای هر دنباله‌ی پوچ ترتیبی بی‌کران کران‌دار نرمی (x_n) در E، $\phi(x_n) \to 0$؛*
(۳) *برای هر دنباله‌ی مجزای کران‌دار نرمی (x_n) در E، $\phi(x_n) \to 0$؛*
(۴) *هر دنباله‌ی مجزا در بازه‌ی $[0, |\phi|]$ پوچ نرمی است.*

ملاحظه می‌کنیم که، از آنجایی که $E_n^{\sim}$ ایده‌آل E^* است، برای هر $\phi \in E_n^{\sim}$ بازه‌ی $[0, |\phi|]$ در $E_n^{\sim}$ یا در E^* یکسان در نظر گرفته می‌شود.

برهان. فرض کنیم (۱) برقرار باشد. یعنی، $\phi \in E_{uo}^{\sim}$ و (x_n) یک دنباله‌ی پوچ ترتیبی بی‌کران کران‌دار نرمی در E باشد. در این‌صورت طبق تعریف $\phi(x_n) \to 0$ لذا (۲) برقرار است. حال فرض کنیم (۲) برقرار باشد و (x_n) یک دنباله‌ی مجزای کران‌دار نرمی در E باشد. طبق نتیجه‌ی ۳.۶ مرجع [۱] داریم $x_n \xrightarrow{uo} 0$. بنابراین (x_n) یک دنباله‌ی پوچ ترتیبی بی‌کران کراندار نرمی

است. پس طبق فرض $\phi(x_n) \to 0$ و لذا (۳) نیز برقرار است. حال فرض کنیم(۳) برقرار باشد. نشان می‌دهیم $\phi \in E_{uo}^{\tilde{}}$. طبق فرمول ریس-کانتروویچ در قضیه‌ی ۱.۱۸ مرجع [۲] ، چون $\phi \in E_n^{\tilde{}}$، خواهیم داشت

$$|\phi|(|x_n|) = sup\{|\phi(y_n)| : \quad |y_n| \leq |x_n|\}\cdot$$

فرض کنیم (x_n) یک دنباله‌ی مجزای کران‌دار نرمی در E باشد ($\|x_n\| \leq 1$). چون $|y_n| \leq |x_n|$ و E یک مشبکه‌ی باناخ است لذا $\|y_n\| \leq \|x_n\|$ و بنابراین (y_n) یک دنباله‌ی مجزای کران‌دار نرمی خواهد بود و طبق فرض $\phi(y_n) \to 0$ پس $sup|\phi(y_n)| \to 0$ و بنابراین برای هر دنباله‌ی مجزا در گوی واحد بسته‌ی B_E، داریم: $|\phi|(|x_n|) \to 0$.
در قضیه‌ی ۴.۳۶ مرجع [۲] به جای ρ نیم نرم مشبکه‌ای $|\phi|(|.|)$، به جای A مجموعه‌ی صلب کران‌دار نرمی B_E و به جای T عملگر همانی $i : E \to E$ در نظر می‌گیریم . با توجه به اینکه

$$\lim_{n\to\infty} |\phi|(i(|x_n|) = \lim_{n\to\infty} |\phi|(|x_n|) = 0$$

و (x_n) یک دنباله‌ی مجزای دلخواه در B_E است، برای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، $u \geq 0$ ای در E موجود است به‌طوری که برای هر $x \in B_E$ داریم

$$|\phi|(i(|x| - u)^+) \leq \varepsilon.$$

لذا

$$sup_{x\in B_E}|\phi|((|x| - u)^+) \leq \varepsilon.$$

از طرفی طبق رابطه‌ی $x = (x-y)^+ + x \wedge y$ داریم $(|x|-u)^+ = |x| - |x| \wedge u$. بنابراین

$$sup_{x\in B_E}|\phi|(|x| - |x| \wedge u) = sup_{x\in B_E}|\phi|((|x| - u)^+) \leq \varepsilon \cdot \quad (1)$$

اگر (x_α) یک تور پوچ ترتیبی بی‌کران در B_E باشد، آنگاه با توجه به اینکه $u \geq 0$، پس $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ و بنابراین $|\phi|(|x_\alpha| \wedge u) \to 0$. اگر در رابطه‌ی (۱) قرار دهیم $u = 0$ و $x = x_\alpha$، آنگاه به‌ازای هر ε دلخواه،

$$\lim_\alpha sup|\phi|(|x_\alpha|) \leq \varepsilon.$$

از طرفی

$$0 \leq \lim_\alpha inf|\phi|(|x_\alpha|) \leq \lim_\alpha sup|\phi|(|x_\alpha|).$$

لذا

$$\lim_\alpha inf|\phi|(|x_\alpha|) \leq \varepsilon.$$

چون ε عدد مثبت دلخواه است، بنابراین

$$|\phi|(|x_\alpha|) \to 0.$$

با توجه به اینکه $|\phi|(x_\alpha) \leq |\phi|(|x_\alpha|)$ و $|\phi(x_\alpha)| = |\phi|(x_\alpha)$ خواهیم داشت

$$|\phi(x_\alpha)| \leq |\phi|(|x_\alpha|) \to 0.$$

چون به‌ازای هر تور پوچ ترتیبی بی‌کران کران‌دار نرمی (x_α)، $\phi(x_\alpha) \to 0$. پس $\phi \in E^{\tilde{}}_{uo}$ و لذا $(1) \Rightarrow (3)$ برقرار است. حال نشان می‌دهیم که (3) و (4) معادلند. برای اینکار با در نظر گرفتن $A = B_E$ و $B = [-|\phi|, |\phi|]$، در قضیه‌ی ۲.۳.۳ مرجع [۳] که در آن بازه‌ی ترتیبی در E^* گرفته شده است، حکم به دست می‌آید. $\square$

نتیجه ۲.۲. *فرض کنیم E یک مشبکه‌ی باناخ باشد. در این‌صورت $E^{\tilde{}}_{uo}$ بخش پیوسته‌ی ترتیبی $E^{\tilde{}}_n$ می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم $\phi \in E^{\tilde{}}_{uo}$ دلخواه باشد. در این‌صورت طبق $(4) \Rightarrow (1)$ قضیه‌ی قبلی $\phi \in E^{\tilde{}}_n$ و هر دنباله‌ی مجزا در $[0, |\phi|]$ پوچ نرمی است لذا $\phi \in (E^{\tilde{}}_n)^a$. پس $E^{\tilde{}}_{uo} \subseteq (E^{\tilde{}}_n)^a$. برعکس، فرض کنیم $\phi \in (E^{\tilde{}}_n)^a$ در این‌صورت $\phi \in E^{\tilde{}}_n$ و هر دنباله‌ی مجزا در $[0, |\phi|]$ پوچ نرمی است بنابراین طبق $(1) \Rightarrow (4)$ قضیه‌ی قبلی $\phi \in E^{\tilde{}}_{uo}$. بنابراین $(E^{\tilde{}}_n)^a \subseteq E^{\tilde{}}_{uo}$.

$\square$

مثال ۳.۲. *$(\ell^1)^{\tilde{}}_{uo}$ بخش پیوسته‌ی ترتیبی ℓ^∞ است. نشان می‌دهیم که $(\ell^1)^{\tilde{}}_{uo} = (\ell_\infty)^a$. فرض کنیم $\phi \in (\ell^\infty)^a$ در این‌صورت $\phi \in \ell^\infty$ و هر دنباله‌ی مجزا در $[0, |\phi|]$ پوچ نرمی است پس $\phi \in (\ell^1)^{\tilde{}}_{uo}$. حال فرض کنیم $\phi \in (\ell^1)^{\tilde{}}_{uo}$. در این‌صورت $\phi \in (\ell^1)^{\tilde{}}_n = (\ell^1)^* = \ell^\infty$ و هر دنباله‌ی مجزا در $[0, |\phi|]$ پوچ نرمی است پس $\phi \in (\ell^\infty)^a$.*

مراجع

1. C. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive Operators* Springer, The Netherlands (2006).
2. N. Gao, V. Troitsky and F. Xanthos, *Uo-convergence and its applications to Cesáro means in Banach lattices*, Preprint: arXiv:1509.07914.
3. P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Universitext. Springer, Berlin (1991).

Iranian Mathematical Society

The 6th Seminar on Functional Analysis and Its Applications

January 27-28, 2021

Faculty of Mathematics and Statistics
University of Isfahan

Best Coapproximation on Banach Lattices

Majid Abrishami-Moghaddam

Department of Mathematics, Birjand Branch, Islamic Azad University, Birjand, Iran.

m.abrishami.m@gmail.com

Abstract

In this reaserch we introduce the concept of best coapproximation on Banach lattices with a strong unit. We study the existence problem of best coapproximation in these spaces. Also, we develop the theory of best coapproximation in quotient of Banach lattice spaces and discuss about the relationship between the coproximinal elements of a given space and its quotient space. Finally, we show that every lattice isomorphism is an coapproximation preserving map.

1 Introduction and preliminaries

Another kind of approximation, called best coapproximation was introduced in normed linear spaces by C. Franchetti and M. Furi [2]. The theory of best coapproximation is much less developed as compared to the theory of best approximation in abstract spaces. In this parer, we develop the theory of best coapproximation by elements of closed downward sets, which are nacassarily nonconvex sets, in a Banach lattice with a strong unit. Also, we introduce the notion of best coapproximation in quotient Banach lattice spaces. We shall determine some conditions which coproximinality can be transmitted to quotient spaces and vice versa. Finally, we obtain some conditions for maps under which preserve best coapproximation by downward subsets of Banach lattices.

A real vector space X is said to be an ordered vector space whenever it is equipped with an order relation $\leq$ (i.e., $\leq$ is a reflexive, antisymmetric, and transitive binary relation on X). A vector lattice space (or a Riesz space) is an ordered vector space X with the additional property that for each pair of vectors $x, y \in X$, the $\sup\{x, y\}$ and the $\inf\{x, y\}$ both exist in X. As usual, $\sup\{x, y\}$ is denoted by $x \vee y$ and $\inf\{x, y\}$ by $x \wedge y$. Recall that a vector subspace W of a vector lattice space X is said to be a vector sublattice, whenever W is closed under the lattice operations of X, i.e., whenever for each pair $x, y \in W$ the vector $x \vee y$ and $x \wedge y$ (taken in X) belongs to W. A subset A of a vector lattice space is called solid whenever $|x| \leq |y|$ and $y \in A$ imply $x \in A$. A solid vector subspace of a vector lattice space is referred to as an ideal. For any vector x in a vector lattice space define $x^+ := x \vee 0$, $x^- := x \wedge 0$ and $|x| := x \vee (-x)$. The element x^+ is called the positive part, x^- is called the negative part, and $|x|$ is called the absolute value of x. If X is an ordered vector space, then the set $X^+ = \{x \in X \ : \ x \geq 0\}$ is called a positive cone of X, and its members are called the positive elements of X. An element $1 \in X$ is called a strong unit if for each $x \in X$ there exists $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ such that $x \leq \lambda 1$. Then for each $x \in X$ there exists $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ such that $|x| \leq \lambda 1$. Using 1 we can define a norm on X by

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 \ : \ |x| \leq \lambda 1\}. \tag{1}$$

Recall that a norm $\|.\|$ on a vector lattice space is said to be a lattice norm whenever $|x| \leq |y|$ implies $\|x\| \leq \|y\|$. A vector lattice space equipped with a lattice norm is known as a normed vector lattice space. If a normed vector lattice space is also norm complete, then it is referred to as a Banach lattice. It is well known that X equipped with the norm (1) is a Banach lattice which is called a Banach lattice with strong unit 1.

The closed ball with center at x and radius r defined on Banach lattice X as follows:

$$B(x, r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| \leq r\} = \{y \in X \ : \ x - r1 \leq y \leq x + r\}.$$

Let A be an ideal in Banach lattice space X. We recall that the equivalence class determined by x in $\frac{X}{A}$ will be denoted by $\dot{x} = x + A$. In $\frac{X}{A}$ we introduce a relation $\dot{\leq}$ by letting $\dot{x} \dot{\leq} \dot{y}$ whenever there exist $x_1 \in \dot{x}$ (i.e., $x_1 - x \in A$) and $y_1 \in \dot{y}$ with $x_1 \leq y_1$. Clearly, $\frac{X}{A}$ under the relation $\dot{\leq}$ is an ordered vector space and it is easy to show that $\frac{X}{A}$ is a vector lattice space (for more details see [1]). Let A be a closed ideal of a Banach lattice space X. Then the vector lattice space $\frac{X}{A}$ under the quotient norm

$$\|\dot{x}\| = \inf\{\|y\| : y \in \dot{x}\},$$

is a Banach lattice space. In fact, the quotient vector space $\frac{X}{A}$ is itself a Banach lattice space.

A linear operator $T : X \longrightarrow Y$ between two lattice vector spaces X and Y is said to be a lattice (or Riesz) homomorphism whenever $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ holds for all $x, y \in X$. Note that every lattice homomorphism is a positive operator, i.e., it carries positive vectors to positive vectors. This is equivalent to saying that every lattice homomorphism is order preserving, i.e., $x \leq y$ implies that $T(x) \leq T(y)$, and also it is equivalent to

$$|T(x)| = T(|x|)$$

for all $x \in X$. It is important to note that the range of a lattice homomorphism is a lattice subspace. A lattice homomorphism which is in addition one-to-one is referred to as a lattice isomorphism. Clearly, the map $x \to \dot{x}$, from X to $\frac{X}{A}$, is a linear operator called the canonical projection of X onto $\frac{X}{A}$. The lattice homomorphisms are closely related to ideals. For every ideal A of a Banach lattice space X, the canonical projection of X onto the Banach lattice space $\frac{X}{A}$ is a lattice homomorphism (for more details see [1]).

Let W be a nonempty subset of a normed linear space X. An element $w_0 \in W$ is called a best coapproximation to $x \in X$ from W if for every $w \in W$,

$$\|w - w_0\| \leq \|x - w\|.$$

The set of all elements of best coapproximation to $x \in X$ from W is denoted by $R_W(x)$. If each $x \in X$ has at least one best coapproximation $w_0 \in W$, then W is called a coproximinal subset of X.

2 Best coapproximation by downward sets

In this section we show that a closed downward set is coproximinal and obtain some results on best coapproximation elements.

Definition 2.1. A nonempty subset W of an ordered vector space X is called downward if

$$(w \in W \ , \ x \leq w) \Longrightarrow x \in W.$$

A simple example of a downward set is a set of the form $\{y \in X \ : \ y \leq g\}$, where $g \in X$. For another example, let $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ be an increasing function, then its lower level sets $S_c(f) = \{x \in X : f(x) \leq c\}$ for all $c \in \mathbb{R}$, are downward.

Proposition 2.2. Let W be a downward and coproximinal subset of Banach lattice space X and $w_1, w_2 \in R_W(x)$. Then $w_1 \wedge w_2 \in R_W(x)$.

Corollary 2.3. Let W be a vector sublattice and $R_W(x)$ be a subspace of Banach lattice space X, then $R_W(x)$ is a vector sublattice of X.

Theorem 2.4. Let W be a nonempty subset of Banach lattice space X and $x \in X \setminus W$. Then $w_0 \in R_W(x)$ if and only if for every $w \in W$,

$$w - r_w 1 \leq w_0 \leq w + r_w 1$$

where $r_w = \|x - w\|$.

Theorem 2.5. Let W be a closed downward subset of Banach lattice X. Then for each $x \in X$ such that $x \geq W$, W is a coproximinal subset of X.

Example 2.6. Let $X = \mathbb{R}$ and $W = (-\infty, 0]$. Then W is a closed downward set in X and so is coproximinal and we have $R_W(1) = [-1, 0]$.

Let S be a vector sublattice of X, we define

$$\check{S} = \{x \in X : \|w\| \leq \|x - w\| \ \ \forall w \in S\} = R^{-1}(\{0\}).$$

Proposition 2.7. Let S be a vector sublattice of Banach lattice X. Then,

(a) $S \cap \check{S} = \{0\}$.

(b) for all $w \in S$ we have $d(w, \check{S}) = \|w\|$.

Theorem 2.8. Let S be a coproximinal vector sublattice of Banach lattice X. If $\check{S}$ is a vector sublattice of X, then $\check{S}$ is proximinal.

3 Best coapproximation in quotient spaces

In this section we discuss about coproximality of sublattices in quotient of Banach lattice spaces.

Proposition 3.1. A subset W of a vector lattice space X is downward in X if and only if $\frac{W}{A}$ is downward in $\frac{X}{A}$.

Corollary 3.2. Let W be a closed and downward subset and A be an ideal of X. Then $\frac{W}{A}$ is coproximinal in $\frac{X}{A}$.

Theorem 3.3. Let S be a sublattice and A be an closed ideal in Banach lattice X such that $A \subseteq S$. If S is coproximinal in X, then $\frac{S}{A}$ is a coproximinal sublattice of $\frac{X}{A}$.

Theorem 3.4. Let S be a sublattice and A be a closed and proximinal ideal in Banach lattice X such that $A \subseteq S$. If $\frac{S}{A}$ is coproximinal in $\frac{X}{A}$, then S is a coproximinal sublattice of X.

Theorem 3.5. Let S be a sublattice and A be an closed ideal in Banach lattice X such that $A \subseteq S$. If S is coproximinal in X , then we have

$$Q(R_S(x)) \subseteq R_{\frac{S}{A}}(Q(x)),$$

In particular if A is proximinal in X, then

$$Q(R_S(x)) = R_{\frac{S}{A}}(Q(x)).$$

4 Coapproximation preserving maps

In this section we shall obtain characterization of coapproximation preserving maps on Banach lattices.

The following lemma characterizes the maps which preserve downwardness of downward subsets of vector lattices.

Lemma 4.1. [3] (1) Let X and Y be two vector lattices and $T : X \longrightarrow Y$ be an injective positive operator, such that T^{-1} is a positive operator. Then W is a downward subset of X if and only if $T(W)$ is a downward subset of Y.

(2) If $T : X \longrightarrow X$ is a positive operator and $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ is an increasing function, then $S_c(f \circ T) = \{x \in X : f \circ T(x) \leq c\}$ for all $c \in \mathbb{R}$ are downward.

The next theorem which has been proved in [1], page 94, described necessary and sufficient conditions for an operator between two vector lattice spaces, that is a lattice isomorphism.

Theorem 4.2. [1] Assume that an operator $T : X \longrightarrow Y$ between two vector lattice spaces is one-to-one and onto. Then T is a lattice isomorphism if and only if T and T^{-1} are both positive operators.

Proposition 4.3. Let X and Y be two Banach lattices with strong units 1_X and 1_Y, respectively and $T : X \longrightarrow Y$ be an injective positive operator such that T^{-1} is positive and $T(1_X) = 1_Y$. Then, T is a norm isometry, i.e. $\|T(x)\| = \|x\|$ for all $x \in X$.

Definition 4.4. Let X and Y be Banach lattices with strong units 1_X and 1_Y, respectively. A linear operator $T : X \longrightarrow Y$ is called a coapproximation preserving operator if for all downward sets W in X and all $x \in X$:

(a) W is a downward subset of X if and only if $T(W)$ is a downward subset of Y.

(b) $T(R_W(x)) = R_{T(W)}(T(x))$.

Theorem 4.5. Let X and Y be Banach lattices with strong units 1_X and 1_Y, respectively. Let $T : X \longrightarrow Y$ be an injective positive operator which T^{-1} is a positive operator and $T(1_X) = 1_Y$. Then T is a coapproximation persevering operator.

References

[1] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, Positive operators, Springer, Dordrecht, 2006, Reprint of the 1985 original.

[2] C. Franchetti, M. Furi, Some characteristic properties of real Hilbert spaces, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 118 (1972) no. 17, 1045–1048.

[3] S.M.S. Modarres, M. Dehghani, New results for best approximation on Banach lattices, Nonlinear Anal. 70 (2009), 3342-3347.

Survey on Completeness of Trace Class for Proper H^*-Algebra

Akbar Nazari[1], **Mohammad Amin Moarrefi**[2]

[1]Department of Pure Mathematices, Faculty of Mathematics & Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. nazari@uk.ac.ir

[2]Department of Pure Mathematices, Faculty of Mathematics & Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. ma_moarrefi@yahoo.com

Abstract

H^*-algebra is defined by Warren Ambrose. These structure are complete algebra w.r.t. norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ that corresponding with inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{A}}$. Trace class is a sub-algebra of H^*-algebra and define on it a trace norm $\tau(\cdot)$. The space $(\tau(\mathcal{A}),\tau(\cdot))$ is a complete sub-algebra of H^*-algebra.

algebra; H^*-algebra; trace class Primary: 06F25; Secondary: 16R30.

1 Introduction

An algebra is a vector space $\mathcal{A}$ with a multiplication $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ s.t. $(a,b)\mapsto ab$ which is associative and linear in each of the two variables of multiplication operator. A Banach algebra is an algebra $\mathcal{A}$ over field $\mathbb{F}$ with equipped the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ that is a Banach space such that for all $a,b\in\mathcal{A}$, $\|ab\|_{\mathcal{A}}\le\|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{A}}$. An unital Banach algebra is a Banach algebra with a unit element $1_{\mathcal{A}}$ such that $\|1_{\mathcal{A}}\|_{\mathcal{A}}=1_{\mathbb{F}}$. An involution is a map $a\mapsto a^*$ from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{A}$ such that $(a^*)^*=a$, $(ab)^*=b^*a^*$ and $(\alpha a+b)^*=\bar{\alpha}a^*+b^*$, for $a,b\in\mathcal{A}$ and $\alpha\in\mathbb{C}$. Each Banach algebra equipped with an involution is called Banach $*$-algebra or B^*-algebra. A C^*-algebra is a Banach algebra $\mathcal{A}$ with an involution such that $\|a^*a\|_{\mathcal{A}}=\|a\|_{\mathcal{A}}^2$ for every $a\in\mathcal{A}$.

2 H^*-Algebra

H^*-algebra is defined by Warren Ambrose in [1]. We survey some properties of this algebra. Also we checking the difference between that and the similar algebra in an example.

Definition 2.1. Banach algebra $\mathcal{A}$ is called H^*-algebra if:

i. The underlying Banach space of $\mathcal{A}$ is Hilbert space.

ii. For each $a\in\mathcal{A}$, there exist adjoint $a^*\in\mathcal{A}$ such that

$$\langle ab,c\rangle_{\mathcal{A}}=\langle b,a^*c\rangle_{\mathcal{A}}\quad\text{and}\quad\langle ab,c\rangle_{\mathcal{A}}=\langle a,cb^*\rangle_{\mathcal{A}}\tag{2.1}$$

for all $a,b,c\in\mathcal{A}$.

This means, the algebra norm $\|a\|_{\mathcal{A}}$ and the Hilbert space norm $\langle a,a\rangle_{\mathcal{A}}^{1/2}$ are equal. Also, the adjoint a^* of a may not be unique.

Example 2.2. We explain two example for H^*-algebra and relation between this and C^*-algebra:

i. Complex number, $\mathbb{C}$, with inner product $\langle\alpha,\beta\rangle=\mathrm{Re}\,(\alpha\beta^*)$ and induced norm by this, is an H^*-algebra and C^*-algebra.

ii. The Clifford algebra $\mathcal{A}=Cl_{0,n}$ is a real H^*-algebra w.r.t. $\langle\lambda,\mu\rangle:=2^n[\lambda\overline{\mu}]_0=2^n\sum_A\lambda_A\mu_A$. Then $|\lambda|_0^2:=\langle\lambda,\lambda\rangle_0=2^n\sum_A\lambda_A^2$ be an induced norm by above inner product on $C\ell_{02}$ (i.e. $i^2=j^2=-1$). Assume $\lambda=i+j$, then $\lambda\overline{\lambda}=2$, $|\lambda\overline{\lambda}|_0=4$ and $|\lambda|_0^2=8$. Hence $|\lambda\overline{\lambda}|_0\ne|\lambda|_0^2$. Therefore $Cl_{0,n}$ with this norm is not a C^*-algebra (For more information see [2]).

Let $\mathcal{A}$ be an H^*-algebra and $a\in\mathcal{A}$. Then $a\mathcal{A}=\{0\}$ is equivalent to $\mathcal{A}a=\{0\}$. Define $Z:=\{a\in\mathcal{A}|a\mathcal{A}=\{0\}\}$.

Definition 2.3. An H^*-algebra is proper or semi-simple if $Z=\{0\}$.

Theorem 2.4. *An H^*-algebra is proper if and only if every element has a unique adjoint.*

Definition 2.5. Let $\mathcal{A}$ be an H^*-algebra and $a,e,f\in\mathcal{A}$. Then a is self-adjoint member of $\mathcal{A}$ if $a^*=a$. a is positive member of $\mathcal{A}$ if $\langle ax,x\rangle_{\mathcal{A}}\ge0$ for all $x\in\mathcal{A}$. a is normal element if $a^*a=aa^*$. e is idempotent if $e^2=e\ne0$. e is sa-idempotent (projection) if e be an idempotent and a self-adjoint element. Idempotents e,f are called doubly orthogonal if $ef=fe=0$ and $\langle e,f\rangle_{\mathcal{A}}=0$. An idempotent is primitive if it can not be expressed as the sum of two doubly orthogonal idempotents.

Theorem 2.6. *Every proper H^*-algebra contains a non-empty maximal family of doubly orthogonal primitive sa-idempotents.*

Definition 2.7. Let T is a bounded linear operator in Banach algebra X, then T will be called a right centralizer of X if T satisfies the identity $T(xy)=(Tx)y$. We will use the symbol $R(X)$ to denote the collection of all right centralizers of X.

Let a be arbitrary and $La:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ be the operator of the left multiplication by a, i.e. $La(x):=ax$. Then $La\in R(\mathcal{A})$. We define $C(\mathcal{A})$ to be subspace generated by the operators La, $a\in\mathcal{A}$. $C(\mathcal{A})$ is the closed subspace of $R(\mathcal{A})$ in the operator norm.

2.1 Trace-Class for H^*-Algebras

In continuous, $\mathcal{A}$ is a proper H^*-algebra. We discuss about trace–class and trace–functional.

Saworotnow show that for each $a\ne0$ in $\mathcal{A}$ there exists a sequence $\{e_n\}$ of mutually orthogonal projections and a sequence $\{\lambda_n\}$ of positive numbers such that $a^*a=\sum_n\lambda_ne_n$. Also that $a^*ae_n=e_na^*a=\lambda_ne_n$ for each n. Then they define $[a]:=\sum_n\mu_ne_n$, where $\mu_n:=\sqrt{\lambda_n}\ge0$. For each $a\in\mathcal{A}$ there exists a unique positive member $[a]$ of $\mathcal{A}$ such that $[a]^2=a^*a$ (note that $[a]^*=[a]$).

Definition 2.8. Trace-class for $\mathcal{A}$ is the set $\tau(\mathcal{A})=\{xy|x,y\in\mathcal{A}\}$. Also, if $a=xy\in\tau(\mathcal{A})$, define $\mathrm{tr}\,a:=\langle y,x^*\rangle_{\mathcal{A}}$.

Trace tr is a positive functional, i.e. if $a\in\mathcal{A}$ be a positive then $\mathrm{tr}\,(a)\ge0$. There exists $b\in\mathcal{A}$ such that $\mathrm{tr}\,(b)<0$. Therefore in follow use "$[\cdot]$" to build a norm of this functional. For every $a\in\mathcal{A}$, $[a]$ is a positive member of $\mathcal{A}$.

Definition 2.9. With above assumption, we define $\tau(a):=\mathrm{tr}\,([a])=\mathrm{tr}\,(\sum_{n=1}^\infty\mu_ne_n)=\sum_{n=1}^\infty\mu_n$ for every $a\in\mathcal{A}$.

Corollary 2.10. *Suppose $\mathcal{A}$ be an H^*-algebra. Then*

i. $\tau(a^*a)=\mathrm{tr}\,(a^*a)=\|a\|_{\mathcal{A}}^2$, for all $a\in\mathcal{A}$;

ii. $|tra|\le\tau(a)$, for all $a\in\tau(\mathcal{A})$;

iii. If $a\in\tau(\mathcal{A})$ and S is a right centralizer then $\tau(Sa)\le\|S\|\,\tau(a)$;

iv. $\|a\|_{\mathcal{A}}\le\tau(a)$, for all $a\in\tau(\mathcal{A})$;

v. $\tau(ab)\le\|a\|_{\mathcal{A}}\cdot\|b\|_{\mathcal{A}}$, for all $a,b\in\mathcal{A}$;

vi. $\tau(ab)\le\tau(a)\tau(b)$, for all $a,b\in\tau(\mathcal{A})$.

3 Completeness of Trace Class

In this section, investigated trace-class space $\tau(\mathcal{A})$ with norm $\tau(\cdot)$ and show that $(\tau(\mathcal{A}),\tau(\cdot))$ is a complete space. Therefore by Proposition 2.10, part (vi), this space is Banach algebra.

Lemma 3.1. *If $a\in\tau(\mathcal{A})$ then the mapping f_a defined on $C(\mathcal{A})$ with $f_a(S)=\mathrm{tr}\,(Sa)$ is a bounded linear functional and $\|f_a\|=\tau(a)$.*

Theorem 3.2. *Each bounded linear functional on $C(\mathcal{A})$ is of the form f_a for some $a\in\tau(\mathcal{A})$.*

This means, the above correspondence between $\tau(\mathcal{A})$ and $C(\mathcal{A})^*$ is an isometric isomorphism. $\tau(\mathcal{A})$ can be identified with the space of all bounded linear functionals on $C(\mathcal{A})$.

Corollary 3.3. *$\tau(\mathcal{A})$ is a Banach algebra in the norm $\tau(\cdot)$.*

Proof. $\tau(\mathcal{A})$ is complete since it is isometric to the dual of $C(\mathcal{A})$. □

Theorem 3.4. *For every right centeralizer S the mapping $f_S(x)=\mathrm{tr}\,(Sx)$, is a bounded linear functional on $\tau(\mathcal{A})$ such that $\|f_S\|=\|S\|$. Conversely, each bounded linear functional on $\tau(\mathcal{A})$ is of the form f_S for some $S\in R(\mathcal{A})$. Thus $R(\mathcal{A})$ is isometric isomorphic to $\tau(\mathcal{A})^*$.*

Example 3.5. Consider standard structure $\ell_2(\mathbb{N})$ with the common addition and scalar product. Suppose $a=(a_1,a_2,\cdots)=\{a_i\}_{i=1}^\infty,b=(b_1,b_2,\cdots)=\{b_i\}_{i=1}^\infty\in\ell_2(\mathbb{N})$ where $a_i,b_i\in\mathbb{F}=\mathbb{C}$. We define $a\cdot b:=\{a_i\cdot b_i\}_{i=1}^\infty$, $\langle a,b\rangle_{\mathcal{A}}:=\sum_{i=1}^\infty a_i\overline{b_i}$ and $a^*:=(\overline{a_1},\overline{a_2},\cdots)$ where $\overline{a_i}$ is conjugate of complex number a_i. Then $\|a\|_{\mathcal{A}}=\langle a,a\rangle_{\mathcal{A}}^{1/2}=(\sum_{n=1}^\infty|a_n|^2)^{1/2}$ is induced norm. $\mathcal{A}$ is an H^*-algebra, because $\langle ab,c\rangle_{\mathcal{A}}=\langle b,a^*c\rangle_{\mathcal{A}}=\langle a,cb^*\rangle_{\mathcal{A}}=\sum a_ib_i\overline{c}_i$, but it has not C^*-algebra structure. For check this, let $a=(2,3,0,0,\cdots)$. Then $\|a\|_{\mathcal{A}}^2\ne\|a^*a\|_{\mathcal{A}}$.

Let $\delta_i=\{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $i\in\mathbb{N}$, where δ_{ij} is the Kronecker delta. Then $\{\delta_i\}$ is family of doubly orthogonal primitive sa-idempotents.

For every $a=\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $[a]=\{|a_n|\}_{n=1}^\infty$. Then $\mathrm{tr}\,(a)=\sum_{n=1}^\infty a_n$ and $\tau(a)=\sum_{n=1}^\infty|a_n|$. Therefore $\|a\|_{\mathcal{A}}=\langle a,a\rangle_{\mathcal{A}}^{1/2}=\sqrt{\tau(a^*a)}$.

Finally, $(\tau(\mathcal{A}),\tau(\cdot))$ is a Banach algebra, but is not a C^*-algebra.

References

[1] W. Ambrose, Structure theorems for a special class of Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 57 (1945), 364–386.

[2] M. A. Moarrefi and A. Nazari, Investigate of the C^*-algebraic Structure of the Clifford Algebra, 49th Annual Iranian Mathematics Conference, Elm-o-Sanat University, Tehran, Iran, pp 3069–3075, 2018.

[3] L. Molnar, Modular bases in a hilbert A-module, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 42 (1992), 649–656.

[4] A. Nazari and M. A. Moarrefi, Survey on trace class for proper H^*-algebra, 10th Seminar on Linar Algebra and its Applications, Shahid Bahonar University, Kerman, Iran, 2020 (Submitted).

[5] P. P. Saworotnow, Trace-class and centralizers of an H^*-algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26 (1970), 101–104.

چکیده مبسوط ششمین سمینار آنالیز تابعی و کابردهای آن

۸-۹ بهمن ۱۳۹۹، دانشگاه اصفهان

عملگرهای هم جوشی قاب ها

نرگس سادات بنی طبا

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه پیام نور
banitaba@pnu.ac.ir

چکیده. در این نوشته سعی داریم قاب های هم جوش را معرفی کرده سپس عملگرهای متناظر با این دسته از قاب ها که به عنوان قاب های زیر فضا نیز نامگذاری می شوند، معرفی و بررسی نماییم . خواهیم دید که عملگرهای این دسته از قاب ها با عملگرهای قابی متناظر مرتبط هستند و عموما خواص مشابهی دارند .

۱. پیش‌گفتار

نظریه قاب ها به سرعت در ریاضی پیشرفت کرد چون کاربردهای آن در شاخه های مختلف محض و کاربردی مشخص گردید . از جمله این کاربردها می توان به پردازش سیگنال ها ، پردازش تصاویر و داده ها ، نظریه نمونه سازی و غیره اشاره کرد . بازسازی و بازیابی قسمتهایی از داده های منتقل شده که به هر دلیل حذف شده اند یکی از کاربردهای مهم قاب هاست [3] . برای بهبود بخشیدن و کاربردی ساختن ساختار قاب ها می توان در ابتدا مولفه های لازم را ساخت و پس از ترکیب آن ها ، قاب مورد نظر را به دست آورد. ارتباط بین این مولفه ها و قاب هایی که ساخته میشوند مرتبط با قاب های زیر فضا یا به عبارتی قاب های هم جوشی است . اهمیت این دسته از قاب ها از آن جهت است که انها بسیار شبیه به $g-$ قاب ها رفتار می کنند . میتوان برای این دسته از قاب ها ، عملگرهای تجزیه ، ترکیب و عملگرهای قابی و حتی فرمول بازسازی نیز به دست آورد .همچنین مفاهیمی مثل فشردگی ، مینیمم سازی و خاصیت دقیق بودن نیز می تواند مورد بحث قرار گیرد .
انواع متفاوتی از قاب های زیر فضا به دست آمده است که یکی از انواع خاص و مهم آنها ، قاب

2010 Mathematics Subject Classification. 46xx

واژگان کلیدی. قاب ، قاب های هم جوشی ، عملگر قابی .

های زیر فضای هارمونیک است که در آن موجک ها در زیر فضا نیز از انالیز چند ریزه ساز قاب های زیر فضا به دست می آید . می توان به عنوان نقطه آغازین بررسی قاب های زیر فضا ، ساختن قاب های موضعی و سپس اتصال آنها به منظور رسیدن به قاب هایی در تمام فضاست . در گام بعدی می توان با ایجاد شرایط لازم برای مولفه ها به قابی برای کل فضا با ساختار خاص و دلخواه رسید . ایده ساختن قاب ها در کل فضا از قاب های موضعی به مطالعات دافین[1] و شیفر [2] باز می گردد . روشهای مشابهی برای ساختن موجک ها و قاب های گابور به دست آمده است $[1, 2, 4, 5]$. روش های دیگری هم با استفاده از C^* − جبرها به دست آمده است $[3]$.

۲. مروری بر قاب ها

در ابتدا تعاریف و خواص پایه ایی قاب ها را بیان میکنیم . برای مطالعه بیشتر به $[i$ مراجعه گردد . دنباله $F = \{f_i\}_{i\in I}$ در فضای هیلبرت H ، قابی برای H است اگر ثابت های $0 < A \leq B < \infty$ (کران های پایینی و بالایی) موجود باشند به طوری که

$$A \;\; \|f\|^2 \;\; \leq \;\; \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \;\; \leq B \;\; \|f\|^2 \quad , \quad \forall f \in H \;\; .$$

فضای متناظر با یک قاب $l^2(I)$ است . به منظور تحلیل بردار $f \in H$ ، انرا به توی فضای متناظر آن تصویر می کنیم . عملگر تجزیه به صورت زیر تعریف میگردد :

$$T_F : H \longrightarrow l_2(I)$$
$$T_F(f) = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$$

و عملگر ترکیب متناظرش که نگاشتی از فضای متناظرش به H است به صورت الحاقی عملگر تجزیه تعریف میگردد:

$${T_F}^* : i_2(I) \longrightarrow H$$
$${T_F}^*(\{c_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

از ترکیب T_F و ${T_F}^*$ به عملگر قابی خواهیم رسید :

$$S_F : H \longrightarrow H$$
$$S_F(f) = {T_F}^* T_F(f) = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i$$

که عملگری مثبت ، خود الحاق و وارون پذیر است :

$$S = TT^* \Longrightarrow S^* = (TT^*)^* = TT^* = S.$$
$$f \in H, \quad Sf = 0 \Longrightarrow \langle Sf, f\rangle = 0 = \sum_{k=1}^{m} |\langle f, f_k\rangle|^2$$

وبا استفاده از خاصیت قابی $f = 0$ و S عملگری یک به یک است .
در $[3]$ نتیجه ۳.۱.۱ عنوان شده است که خانواده عناصر $\{f_k\}_{k=1}^m$ در فضای H یک قاب است اگر و تنها اگر $span\{f_k\}_{k=1}^m = H$ ا ین نتیجه نشان میدهد که یک قاب می تواند عناصری

[1] Duffin
[2] Scheafer

بیش از یک پایه را شامل باشد . در واقع اگر $\{f_k\}_{k=1}^m$ قابی برای H و $\{g_k\}_{k=1}^n$ نیز خانواده دلخواهی از بردارهای H باشد ، $\{f_k\}_{k=1}^m \cup \{g_k\}_{k=1}^n$ مجددا یک قاب برای H خواهد بود . قابی که پایه نباشد فوق کامل یا دارای افزونگی نامیده میشود .
حال چون $span\{f_k\}_{k=1}^m = H$ برقرار است ، پس عملگر ترکیب T پوشاست ، حال اگر f مفروض باشد می توان $g \in C^m$ را طوری یافت که $Tg = f$ و $g \in {N_T}^{\perp} = R_{T^*}$
$_S = R_{TT^*} = H$

و لذا S پوشاست و در نهایت وارون پذیر است . از طرفی هر f ، دارای نمایشی به فرم زیر است :

$$f = SS^{-1}f = \sum_{k=1}^m \langle S^{-1}f, f_k\rangle f_k$$

و با استفاده از خاصیت خودالحاقی S ،

$$f = \sum_{k=1}^m \langle f, s^{-1}f_k\rangle f_k$$

اگر $F = \{f_i\}_{i\in I}$ یک قاب باشد ، حداقل یک دوگان قابی $\{\widehat{f_i}\}_{i\in I}$ هست به طوری که

$$f = \sum_{i\in I}\langle f, f_i\rangle \widehat{f_i} = \sum_{i\in I}\langle f, \widehat{f_i}\rangle f_i \quad , \quad \forall f \in H.$$

یک قاب چسبان ، قابی است که در آن $A = B$ و اگر $A = B = 1$ ، F را یک قاب پارسوال می نامیم . در این حالت دوگان قابی کانونیک برابر است با $\{\frac{1}{A}f_i\}_{i\in I}$ و لذا به ازای هر f می توان نوشت :

$$f = \frac{1}{A}{T_F}^* T_F(f)$$

روش های گوناگونی برای ساخت قاب های چسبان یا قاب های پارسوال به دست آمده است [4] . روش های ساختن قاب های پارسوال به دلایلی پیچیده هستند . جزئیات بیشتر در $[1, 4, 5]$ آمده است .

تعریف ۱.۲. فرض کنید I یک مجموعه اندیس شمارا و $\{w_i\}_{i\in I}$ خانواده ایی از زیر فضاهای بسته در H و $\{v_i\}_{i\in Z}$ خانواده ایی از وزن ها ، $(v_i > 0)$ است . در این صورت $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک هم جوشی قابی نامیده میشود اگر ثابت های $0 < C \le D < \infty$ موجود باشند که

$$C\|f\|^2 \le \sum_{i\in I} {v_i}^2 \|\Pi_{w_i}(f)\|^2 \le D\|f\|^2 \quad , \quad \forall f \in H$$

که در آن Π_{w_i} ، تصویر متعامد به روی زیر فضای w_i است . C و D را کران های هم جوشی قاب می نامند .

خانواده $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب هم جوشی C فشرده است اگر

$$C\|f\|^2 = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \|\Pi_{w_i}(f)\|^2$$

اگر $C = D$ ، یک قاب هم جوشی پارسوال داریم اگر $C = D = 1$ و یک پایه هم جوشی متعامد یکه داریم اگر

$$H = \bigoplus_{i\in I} w_i.$$

اگر $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}$ فقط در قسمت راست نامساوی تعریف هم جوشی صدق کند گوییم یک دنباله بسل هم جوشی با کران هم جوشی بسلی D داریم .

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\{(w_i, v_i\}_{i\in I}\}$ یک قاب هم جوشی در فضای H و $\{f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ قابی در w_i باشد . در این صورت $\{(w_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i}\}_{i\in I}\}$ یک سیستم هم جوشی قاب در فضای H است . اگر C و D کران های قاب هم جوشی برای $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}\}$ باشند ، کران های سیستم هم جوشی قابی نیز خواهند بود . اگر A و B کران های قابی مشترک برای قاب های $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}\}$ باشند ، کران های قابی موضعی نیز هستند .

گردایه دوگان های قابی $\{\widehat{f_{ij}}\}_{j\in J_i, i\in I}$متناظر با قاب های موضعی ، دوگان های موضعی قاب هستند . در مورد ارتباط بین خواص قاب های هم جوشی و ابسته و دنباله شامل بردارهای قابی موضعی ، قضیه زیر را از [4] آورده ایم .

قضیه ۳.۲. به ازای هر i ، فرض کنید $v_i > 0$ باشد و w_i زیر فضای بسته ایی از H و $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ قابی برای w_i با کران های A_i و B_i باشد . همچنین داریم $A = inf_{i\in I} A_i \leq sup_{i\in I} B_i = B < \infty$. در این صورت شرایط زیر هم ارز است :

(i) $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب هم جوشی برای H است .
(ii) $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$یک قاب برای H است .

به ویژه اگر $\{(w_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک سیستم قاب هم جوشی برای H با کران های قابی هم جوشی C و D باشند آنگاه $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ یک قاب برای H با کران های AC و BD است .
همچنین اگر $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ یک قاب برای H با کران های C و D باشد ، آنگاه $\{(w_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک سیستم هم جوشی قاب برای H با کران های قابی هم جوشی $\frac{C}{B}$ و $\frac{D}{A}$ است .
قاب های فشرده به خاطر داشتن ساختار خاص ، در ایجاد فرمولهای بازسازی اسانتر نقش مهمی دارند . قاب های هم جوشی فشرده نیز همین طورند . باید توجه داشت که در قضیه قبل ثابت شده است که $\{(w_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب هم جوشی C– فشرده برای H است اگر و تنها اگر $\{v_i f_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ یک قاب C – فشرده برای H باشد .

۳. دست‌آوردهای پژوهش

از دیدگاه نظریه قاب ها ، یک سیگنال ورودی توسط گردایه ایی از ضرایب اسکالر نمایش داده میشود . این ضرایب تصویر متعامد سیگنال ها را روی هر بردار قابی اندازه میگیرد . فضای مورد

نظر در این مبحث نیز $l^2(I)$ می باشد . از دیدگاه قاب های هم جوشی ، یک سیگنال توسط گردایه ایی از ضرایب برداری که تصویر متعامد سیگنال را روی هر زیر فضا نمایش می دهند ، مشخص می شود . برای همین منظور فضای نمایش این بحث را به صورت زیر در نظر میگیریم

$$(\sum_{i\in I}\bigoplus w_i)_{l^2}=\{\{f_i\}_{i\in I}\ \mid\ f_i\in w_i\quad ,\quad \{\|f_i\|\}_{i\in I}\ \in\ l^2(I)\}$$

به طور مشابه می توان تعاریف عملگرهای ترکیب ، تجزیه و عملگر قابی هم جوشی را تعریف کرد .

تعریف ۱.۳. فرض کنید $W=\{(w_i,v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب هم جوشی برای H باشد . یک سیگنال را به جهت تحلیل به فضای نمایش متناظرش تصویر می کنیم . عملگر تجزیه متناظر آن T_W به شکل زیر تعریف می گردد:

$$T_W\ :\ H\longrightarrow(\sum_{i\in I}\bigoplus W_i)_{l^2}$$
$$T_W(f)=\{v_i\Pi_{w_i}(f)\}_{i\in I}$$

اگر الحاقی عملگر فوق ، T^* را به دست آوریم عملگر ترکیب به دست می آید :

$${T_w}^*\ :\ (\sum_{i\in I}\bigoplus w_i)_{l^2}\quad\longrightarrow\quad H$$
$${T_W}^*(f)=\sum_{i\in I}v_if_i\quad ,\quad f=\{f_i\}_{i\in I}\quad\in\quad(\sum_{i\in I}\bigoplus w_i)_{l^2}$$

و در آخر عملگر قابی هم جوشی S_W برای W به شکل زیر به دست می آید :

$$S_W(f)={T_W}^*T_W(f)=\sum_i{v_i}^2\Pi_{w_i}(f)\quad .$$

عملگر قابی هم جوشی بسیاری از خواص عملگر قابی را داراست .

قضیه ۲.۳. اگر $\{W_i\}_{i\in I}$ یک قاب زیر فضای وابسته به $\{v_i\}_{i\in I}$ با کران های C ، D باشد ، عملگر قابی $S_{w,v}$ برای $\{w_i\}_{i\in I}$ و $\{v_i\}_{i\in I}$ عملگری مثبت ، خود الحاق و وارون پذیر است و

$$CI\le S_{w,v}\le DI\ .$$

فرمول بازسازی در آن به صورت زیر خواهد بود :

$$f=T_{S_{w,v}^{-1}}w,v\ \ {T_{w,v}}^*(f)=\sum_{i\in I}{v_i}^2\ \ {S_{w,v}}^{-1}\Pi_{w_i}(f)\quad ,\quad f\in H\quad .$$

اثبات : به ازای هر $f\in H$:

$$\langle S_{w,v}(f),f\rangle=\langle\sum_{i\in I}{v_i}^2\Pi_{w_i}(f),f\rangle=\sum_{i\in I}{v_i}^2\langle\Pi_{w_i}(f),f\rangle=\sum_{i\in I}{v_i}^2\|\Pi_{w_i}(f)\|^2$$

پس $S_{w,v}$ عملگری مثبت است .

$$\langle Cf,f\rangle=C\|f\|^2\le\sum_{i\in I}{v_i}^2\|\Pi_{w_i}(f)\|^2=\langle S_{w,v}(f),f\rangle\le\langle Df,f\rangle\Longrightarrow CI\le S_{w,v}\le DI$$

پس $S_{w,v}$ عملگری وارون پذیر روی H است . از طرفی به ازای هر $f, g \in H$ ،

$$\langle S_{w,v}(f), g\rangle = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \langle \Pi_{w_i}(f), g\rangle = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \langle f, \Pi_{w_i}(g)\rangle$$

پس $S_{w,v}$ خودالحاق است و در نهایت فرمول بازسازی را میتوان به شکل زیر به دست آورد :

$$f = {S_{w,v}}^{-1} S_{w,v}(f) = \sum_i {v_i}^2 {S_{w,v}}^{-1} \Pi_{w_i}(f) \quad .$$

۴. نمایش عملگرقابی هم جوشی

فرض کنید $\{(w_i, v_i, \{f_{ij}\}_{j\in J_i})\}_{i\in I}$ یک سیستم قابی هم جوشی برای H است و به ازای $i \in I$ ، $\widehat{F_i} = \{\widehat{f_{ij}}\}_{j\in J_j}$ دوگان های قابی متناظر باشند ، در این صورت عملگر قابی هم جوشی متناظر ، S_w را می توان به صورت زیر به دست آورد :

$$S_w = \sum_{i\in I} {v_i}^2 T^*_{\widehat{F_i}} T_{F_i} = \sum_{i\in I} {v_i}^2 {T_{F_i}}^* T_{\widehat{F_i}} \quad .$$

اثبات : به ازای هر $f \in H$ ،

$$S_w(f) = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \Pi_{w_i}(f) = \sum_{i\in I} {v_i}^2 \sum_{j\in J_i} \langle f, f_{ij}\rangle \widehat{f_{ij}} =$$

$$\sum_{i\in I} {v_i}^2 \sum_{j\in J_i} \langle f, \widehat{f_{ij}}\rangle f_{ij} \quad .$$

با توجه به تعریف عملگرهای تجزیه T_{F_i} و $T_{\widehat{F_i}}$ و عملگرهای ترکیب متناظر نتیجه به دست می آید .

مراجع

1. J. Benedetto, A. Powell, O. Yilmaz, Sigma-Delta quantization and finite frames, IEEE Trans. Inform. Theory 52(2006)1990-2005.
2. M. S. Asgari, A. Khosravi, frames and bases of subspaces hn Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 308 (2005) 541-553.
3. O. Cheristensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases , Birkhauser, Boston, 2003.
4. P. G. Casazza, Custom building finite frames, in : Wavelets, Frames and Operator Theory , College Park, MD, 2003, in:Contemp. Math., vol. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 61-86.
5. P. G. Casazza, J. C. Tremain, The Kadison-Singer Problem in Mathematics and engineering, Proc. Nalt. Acad. Sci. 103(7)(2006) 2032-2039.

The Extended Abstracts of
The 6th Seminar on Functional Analysis and its Applications
27-28th January 2021, University of Isfahan, Iran

ON THE PERTURBATION OF FRAMES

N.RAMEZANZADE *, [1] A.A. AREFIJAMAAL [2]

[1] *Department of Mathematics,Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran*
N_ramezanzade@yahoo.com
[2] *Department of Mathematics,Hakim Sabzevari University, Sabzevar, Iran*
Arefijamaal@hsu.ac.ir

ABSTRACT. There are several results on the perturbation of frame sequences in Hilbert spaces that have introduced by Christensen. We state some results on the perturbation of dual frames.

1. Introduction

A sequence $\{f_i\}$ in a Hilbert space H is called a frame if there exist constants $A, B > 0$ such that

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mid \langle f, f_i\rangle \mid^2 \leqslant B \parallel f \parallel^2, \quad (f \in H).$$

The numbers A and B are called frame bound, also they are not unique. In addition, it follows from the definition that if $\{f_i\}$ is a frame for H, then $\overline{span}\ \{f_i\} = H$. The frame is called tight frame when $A = B$. If $A = B = 1$, it is called a Parseval frame. We say that $\{f_i\}$ is a frame sequence if it is a frame for $\overline{span}\ \{f_i\}$. The sequence $\{f_i\} \subseteq H$ is a Bessel sequence if at least the upper frame bound B exists. In this case the bounded operator $T : l^2(\mathbb{N}) \to H$ defined by $T\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ is usually called the pre-frame operator. Furthermore, the composing

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 47H10; Secondary: 47H09.
Key words and phrases. Frames; Dual frames; Perturbations; Riesz bases.
* Speaker.

of operator T with its adjoint gives the frame operator

$$S: H \to H, \quad Sf := TT^*f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_i \rangle f_i.$$

If both of the frame conditions are satisfied, then S is invertible and self-adjoint. Moreover, the following is holds

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_i \rangle f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle S^{-1}f_i.$$

A sequence $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ is called a dual frame for $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ if

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, g_i \rangle f_i, \quad (f \in H).$$

The classical choice for $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ is $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Every frame at least has a dual. In fact, if $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a frame, then $\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty}$, which is a frame with bounds B^{-1} and A^{-1}, is a dual for $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$; it is called the canonical dual, a dual which is not be the canonical dual is called an alternate dual, or simply a dual.

Example 1.1. [2] Let $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ be an orthonormal basis for H and consider the frame

$$\{f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \cdots\},$$

which is a frame with bounds $A = 1, B = 2$. The canonical dual frame is given by

$$\{S^{-1}f_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, e_2, e_3, \cdots\right\}$$

As an example of non-canonical dual frame we mention

$$\{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \{0, e_1, e_2, e_3, \cdots\}$$

and

$$\{g_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{2}{3}e_1, e_2, e_3, \cdots\right\}$$

Theorem 1.2. [1] *Let $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a frame for H with the pre-frame operator T. Then $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a dual for $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ if and only if*

$$g_i = S^{-1}f_i + u_i$$

for some Bessel sequence $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, f_i \rangle u_i = 0, \quad (f \in H).$$

2. Main results

The question of stability where plays a crucial role states that if $\{e_i\}$ is an orthonormal basis and $\{g_i\}$ in some sense is "close" to $\{e_i\}$, does it follow that $\{g_i\}$ also is a basis?A classical result states that if $\{e_i\}$ is an orthonormal basis for a H, then a sequence $\{g_i\}$ in H is a orthonormal basis if there exists a constant $\lambda \in (0,1)$ such that

$$\|\sum c_i(e_i - g_i) \leqslant \|\sum c_i e_i\|,$$

for all finite sequences of scalars $\{c_i\}$. We will now discuss a natural extension of this result to the frame setting.That is, assuming that $\{f_i\}$ is a frame for a Hilbert space H, we want to find conditions on a perturbed family $\{g_i\}$ that imply that it is a frame.We discuss also similar results for dual frames.

We apply the following lemma frequently.

Lemma 2.1. [4] *Let X be a Banach space and $U : X \to X$ a linear operator, if constants $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ there exist such that*

$$\|Ux - x\| \leqslant \lambda_1\|x\| + \lambda_2\|Ux\|, \quad (x \in X),$$

then the linear operator U is bounded and invertible. In addition,

$$\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|x\| \leq \|Ux\| \leqslant \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|x\|, \quad (x \in X).$$

and

$$\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_1}\|x\| \leq \|U^{-1}x\| \leqslant \frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1}\|x\|, \quad (x \in X).$$

Theorem 2.2. [3, 5, 6] *Let $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a frame with bounds A, B for H. Let $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ and suppose that there exist constants $\lambda_1, \lambda_2, \mu \geq 0$ such that max $(\lambda_1 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}, \lambda_2) < 1$ and*

$$\|\sum_{i=1}^{n} c_i(f_i - g_i)\| \leqslant \lambda_1\|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\| + \lambda_2\|\sum_{i=1}^{n} c_i g_i\| + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} \mid c_i \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

for all scalars $c_1, c_2, \cdots c_n (n \in \mathbb{N})$, then $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ is a frame with bounds

$$A\left(1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{A}}}{1+\lambda_2}\right)^2 \quad B\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{B}}}{1-\lambda_2}\right)^2.$$

Theorem 2.3. [3, 5, 6] *Suppose that $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ and a sequence $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ be a frame for $\overline{span}\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, with bounds A, B. If there exists* *constant* $\lambda_1, \mu \geq 0$, $\lambda_2 \in [0,1]$ *and scalars* $c_1, c_2, \cdots c_n \in \mathbb{N}$ *such that,*

$$\| \sum_{i=1}^{n} c_i(f_i - g_i) \| \leqslant \lambda_1 \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \| + \lambda_2 \| \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \| + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \mid c_i \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

then $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is a Bessel sequence with bound* $B\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\mu}{\sqrt{B}}}{1-\lambda_2}\right)^2$.

Theorem 2.4. [3, 5, 6] *Assume that* $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ *and a sequence* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is a frame for* H *with bounds* A, B *and* K *is a compact operator from* l^2 *into* H *with*

$$K\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f_i - g_i).$$

Then the sequence $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is a frame for* $\overline{span}\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Theorem 2.5. *Suppose that* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is a frame, then there exists an infinite dual* $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq H$ *such that*

$$K\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(g_i - S_F^{-1} f_i).$$

is a compact operator from l^2 *to* H.

Theorem 2.6. *Let* $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ *be a dual frame of* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *and* $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ *be a Bessel sequence such that*

$$K\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(g_i - h_i).$$

Then $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ *is also a dual of* $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$.

References

1. A. A. Arefijamaal and E. Zekaee, *Signal processing by alternate dual Gabor frame*, App. Comput. Harmon. Anal. 35(2013),535-540.
2. O. Christensen, *Frames and bases introductory course*, Lyngby, Denmark, 2007.
3. O. Christensen, *Frames and pseudo-inverse*, J. Math. Anal. Appl. 195(1995), 401-414.
4. O. Christensen, *Operators with closed range,pseudo-inverses and perturbation of frames for a subspace*, Canad. Math. Bull. 42(1999), 37-45.
5. O. Christensen, H. O. kim, R. Y. Kim, J. K. Lim, *Perturbation of frame sequences in shift-invariant spaces*, J. Geom. Anal. 15(2005), 181-191.
6. P. G. Casazza and O. Christensen, *Frame containing a Riesz basis and preservation of this property under perturbations*, Siam j. Math. Anal. 29(1998), 266-278.