



دانشگاه علامه طباطبائی

دانشکده آمار، ریاضی و رایانه

مجموعه مقالات

ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی

تهیه و تدوین:

محمد جلوداری ممقانی، علی صفدری

(اسفند ماه ۱۳۹۹)

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پیشگفتار

همایش ریاضیات و علوم انسانی با محوریت ریاضی مالی میعادگاه تبادل و به اشتراک گذاشتن تجربه و علم میان فعالان بازار سرمایه و پژوهشگران دانشگاهی در زمینه های مالی و پولی است. محل آشنایی دانش آموختگان دانشگاه و کارآفرینان بازار سرمایه است، مکانی است برای شناسایی استعدادهای جوان و جذب آنها در بازار کار، و سرانجام جایی است که استادان دانشگاه تجربه های فعالان بازار سرمایه را دریافت و در برنامه های درسی خود لحاظ می کنند.

ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی روزهای چهارم الی ششم اسفند ۹۹ در دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی با پشتوانه برگزاری پنج همایش قبلی در طول یازده سال گذشته، برگزار خواهد شد. هدف این است که شرکت کنندگان در این همایش تجربیات علمی، آموزشی، اداری و فنی خود و موسساتی را که به آن وابسته اند، به اشتراک بگذارند. بنابراین یک نتیجه فوری برگزاری این همایش شناخت نقاط قوت و ضعف این افراد و موسسات و لذا برقراری پیوند بین آن ها جهت یاری رساندن به یکدیگر است. برقراری این پیوند وقتی اهمیت پیدا می کند که دانش آموختگان رشته های ریاضیات مالی، اقتصاد، مدیریت مالی، مهندسی مالی، بیمه و بیم سنجی در این همایش با همکاران بالقوه خود در موسسات مالی و پولی آشنا شده و در آینده ای نه چندان دور به یاری آن ها شتافته و شغل مورد نظر خود را پیدا می کنند. هدفی که بنیان گذاران رشته ریاضیات مالی از بدو تاسیس در صدد دستیابی به آن بوده و هستند.

ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی در حالی در دانشگاه علامه طباطبائی آغاز به کار می کند که پاندمی کوید ۱۹ طومار آموزش و کنفرانس های سنتی را در نوردیده و رسم نوین آموزش و کنفرانس آنلاین را آنچنان بر جوامع بشری تحمیل کرده است که تصور باز گشت به روش های سنتی قبل از شیوع کوید ۱۹ را دور از ذهن می نماید. بنابراین نحوه اجرای این همایش با تمام همایش های پیشین متفاوت است. به دستگاه های مخابراتی قوی و متخصصین پشتیبان آن ها وابسته است. بسیار تکنولوژیک است و هیجان انگیز و هراس آور، زیرا اگر رشته از دست مان در رود و ارتباط به هر دلیلی قطع گردد، بار همایش به مقصد نمی رسد.

از سوی دیگر این تکنولوژی قدرت ارتباطی فعالان همایش را آنچنان ارتقا بخشیده که توانسته اند پای صحبت اندشمندانی بنشینند که پیش از این تصورش هم ممکن نبود. این گسترش جغرافیا خواه ناخواه به گسترش موضوعی سخنرانی ها نیز منجر شده است و لذا در این همایش با دامنه وسیعی از موضوعات مواجهیم که از یک سو با دامنه موضوعات ارایه شده در

پنجمین همایش قابل قیاس نیست و از طرف دیگر موضوعات بسیاری را در بر می‌گیرد که در حال حاضر در ریاضیات مالی در سطح دنیا مورد تحقیق اند.

به عنوان نمونه در این همایش سخنرانی‌هایی با موضوع "یادگیری ماشین در نظریه مالی"، "یادگیری ماشین در بیمه"، "تکنولوژی مالی"، "شبیه‌سازی بازارهای مالی"، "نظریه قرارداد، که طراحان آن جایزه نوبل اقتصاد را در ۲۰۱۶ نصیب خود کردند"، و ... ارایه شده است.

این گسترش تکنولوژیک ما را قادر ساخته است با دستاوردهای علمی جهانیان به ویژه هموطنان خود در داخل و خارج کشور به سرعت برق و باد آشنا و به آن‌ها دسترسی داشته باشیم. با این حال در ریاضیات مالی آشنایی صرف بدون در اختیار داشتن آزمایشگاهی بزرگ، عرصه نوآوری را از دسترس پژوهشگر خارج می‌کند و او را به سوی تحقیقاتی رهنمون می‌شود که رابطه‌ای ارگانیک با بازارهای مالی ندارد و بنابراین دستاوردهای وی در عمل در بازار کاربرد چندانی پیدا نمی‌کند و در خوشبینانه ترین حالت ریاضیات مالی به ریاضیات فیزیک تبدیل می‌شود. بنابراین یکی از اهداف این همایش پیوند دادن اندیشمندان داخلی ریاضیات مالی با همکاران خود در خارج از ایران است تا با استفاده از تجربیات آن‌ها پژوهشگران ریاضیات مالی در دانشگاه‌های ایران از امکانات تحقیقاتی و انتشاراتی آن‌ها بهره‌مند شوند. در این صورت تحقیقات ریاضیات مالی در کشور ما قدم در راهی می‌گذارد که به آزمایشگاه‌های ریاضیات مالی، بازارهای مالی جهان، منتهی می‌شود و ریاضیات مالی تولید شده در ایران به ریاضیات جهانی نزدیک و نزدیک تر می‌شود. البته فراهم آوردن امکانات ورود ایرانیان به این بازارها یکی دیگر از ابزارهای این تقریب است که انشالله در آینده‌ای نه چندان دور محقق می‌شود.

ریاضیات مالی به مثابه ریاضیات بورس، بانک، و بیمه نقطه هم‌رس چندین رشته ریاضی از یک طرف و چندین رشته اقتصادی و مدیریتی از طرف دیگر است. بنابراین تحقیقات اصیل در آن نیز نیازمند همکاری متخصصین مختلف علمی و لذا نیازمند همکاری تیمی است. بنابراین یکی دیگر از هدف های برگزاری این همایش فراهم کردن بستر همکاری های چند جانبه علمی، آموزشی، و فنی بین شرکت کنندگان در همایش است.

اعضای کمیته علمی همایش از دانشگاه ها و موسساتی دعوت شده اند که به نحوی در گروه های خود با رشته ریاضیات مالی سروکار دارند و متناسب با افزایش محورهای همایش مطابق با تخصص های مورد نیاز برای محورهای جدید دعوت به همکاری می شوند. در مورد ششمین همایش اعضای این کمیته از ۱۳ دانشگاه دعوت شده اند.

کمیته برگزاری ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی، این همایش را میعادگاه کنشگران بازار سرمایه، اساتید محترم دانشگاه، علاقمندان به مباحث بورس و بانک و بیمه، دانشجویان ریاضیات

مالی، اقتصاد، مهندسی مالی، مدیریت مالی، اقتصاد مالی، بیمه، و بیم سنجی، می داند و همگان را دعوت می کند که در آن فعالانه شرکت نمایند.

در پایان از کلیه ارگان‌های دانشگاه علامه طباطبائی مرتبط با این همایش، مشخصاً معاونت پژوهشی، دفتر همکاری‌های بین‌المللی، مدیرکل پژوهشی، شبکه مجازی دانشگاه، رئیس دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، و اعضای گروه ریاضی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

محمد جلوداری ممقانی

دبیر ششمین همایش ریاضیات

و علوم انسانی

اهداف برگزاری همایش:

فراهم آوردن زمینه های تبادل نظر بین فعالان بازار سرمایه و فعالان دانشگاهی در زمینه ی ریاضیات مالی و مهندسی مالی ، شناسایی زمینه های تحقیقاتی مورد نیاز بازار سرمایه از سوی فعالان دانشگاهی و لذا هدایت تحقیقات به سوی رفع نیاز های واقعی کشور ، شناسایی مسایل آموزشی مورد نیاز بازار سرمایه و ایجاد زمینه برای تغییرات متناسب در برنامه های آموزشی ، آشنا کردن بازار های پولی و مالی با رشته های تحصیلی ریاضیات مالی و مهندسی مالی.همچنین فراهم آوردن امکان هم اندیشی و تبادل نظر بین مدرسین و کاربران ریاضیات در شاخه های مختلف علوم انسانی.

محورهای همایش:

- **ریاضیات مالی:** حسابان مالیات و کاربردهای آن در نظریه مالی، مدل‌های مالی و قیمت گذاری مشتقات مالی، اعتبارات، ریسک اعتباری، نظریه نرخ‌های بهره و مشتقات نرخ بهره، سواب‌های نکول اعتباری، معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کاربرد آن‌ها در علوم انسانی، نظریه بهینه سازی سبدهای سرمایه گذاری، ریاضیات سرمایه گذاری، نظریه سرمایه گذاری، هندسه‌های متناظر با مدل‌های مالی، فیزیک مالی. کنترل بهینه،
- **ریاضیات بیمه:** ریاضیات صندوق های سرمایه گذاری، بیمسنجی. ریاضیات بیمه های فاجعه آمیز
- **مهندسی مالی:** مدیریت ریسک مالی و مدیریت قیمت گذاری، تحلیل بنیادی
- **کاربرد ریاضیات در علوم انسانی:** ریاضیات در اقتصاد، ریاضیات در علوم اجتماعی، ریاضیات در زبانشناسی، ریاضیات در مدیریت
- **بازارهای سرمایه:** بنگاه‌های سرمایه‌گذاری، بورس‌ها، بیمه‌ها... ,
- **رمز ارزها:** ریاضیات رمزارزها، کاربردهای در بازارهای مالی و مهندسی مالی و ...

سخنرانان مدعو:

دکتر عرفان صلواتی

Utility Maximization Under Ambiguity

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر محمدرضا اصغری اسکوئی

مروری بر یادگیری ماشین و کاربرد آن در تحلیل داده های مالی

دانشگاه علامه طباطبائی

دکتر خسرو دهنداد

رمز ارزها و پیامدهای اقتصادی آنها

Colombia University

دکتر زیبا حبیبی لشکری

The Future of Fintech and its impact in Different Markets

Universidad Politécnica de Madrid

دکتر هیربد آسا

Market consistent and hedging consistent valuation

Kent Business School

دکتر احسان آزموده

On Stein method and applications in finance & insurance

University of Leeds

دکتر امیر تیمور پاینده

طراحی و ارزیابی بیمه های اتکایی

دانشگاه شهید بهشتی

دکتر مسلم پیمانی

معرفی ابزارها و روش های نوین معاملاتی بازار سرمایه ایران با تاکید بر تفاوت های آنها

با دیگر کشورها جهت بومی سازی مدل های ریاضی

دانشگاه علامه طباطبائی

دکتر لیلی نیاکان

ارزیابی و نظارت ریسک محور در شرکت های بیمه
پژوهشکده بیمه

دکتر مهدیه طهماسبی

STOCHASTIC VOLATILITY DRIVEN BY WEIGHTED FRACTIONAL
BROWNIAN MOTION WITH DELAY

دانشگاه تربیت مدرس

دکتر حمیدرضا آراین

The uncertain shape of grey swans

دانشگاه صنعتی شریف

دکتر آرش فهیم

نظریه قراردادها در زمان پیوسته

Florida State University

سازمان همایش:

دبیر همایش: محمد جلوداری ممقانی

مدیر اجرایی همایش: علی صفدری وایقانی

کمیته علمی: عبدالساده نیسی، عباس شاکری، حسین عبده تبریزی، بیژن ظهوری زنگنه،
امیر تیمور پاینده نجف آبادی، رضا پورطاهری، محمد تقی جهاننیده، سیدمحمد حسینی،
ناصر خیابانی، عرفان صلواتی، احمد پویانفر، کاظم نوری، داود احمدیان، نویده مدرسی،
علی فروش باستانی، احمدرضا یزدانیان، علی دلاور خلفی.

کمیته اجرایی: شکوفه بنی‌هاشمی، محمد جلوداری ممقانی، علی صفدری وایقانی، آذر
غیاثی، نویده مدرسی، عبدالساده نیسی، شکوه شاه بیگ.

برنامه‌ی ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی

دوشنبه ۴ اسفند ۱۳۹۹					
روز	نام و نام خانوادگی	عنوان سخنرانی	دانشگاه	محل برگزاری	ساعت
		افتتاحیه		سالن یک	۱۳:۳۰-۱۴:۴۵
	دکتر عرفان صلواتی	Utility Maximization Under Ambiguity	امیرکبیر	سالن یک	۱۴:۴۵-۱۵:۳۰
	دکتر محمدرضا اصغری اسکویی	مروری بر یادگیری ماشین و کاربرد آن در تحلیل داده های مالی	علامه طباطبائی	سالن یک	۱۵:۳۰-۱۶:۱۵
		استراحت			۱۶:۱۵-۱۶:۳۰
	دکتر خسرو دهناد	Cryptocurrencies and their economic implications	Colombia University	سالن یک	۱۶:۳۰-۱۷:۱۵
	دکتر زیبا حبیبی	The Future of Fintech and its impact in Different Markets	Universidad Politécnica de Madrid	سالن یک	۱۷:۱۵-۱۸:۰۰
	دکتر مهرآسا آیت الهی	Optimization of a dynamic duopoly system using optimal control strategy	دانشگاه پیام نور	سالن یک	۱۸:۰۰-۱۸:۳۵
	محمدحسین آقابرگ افجه	EVALUATION OF A VARIABLE ANNUITY PORTFOLIO WITH DEATH BENEFIT USING MACHINE LEARNING METHODS	علامه طباطبائی	سالن یک	۱۸:۳۵-۱۸:۵۰
	مهران نامجو	STABILITY AND CONVERGENCE ANALYSIS OF A NONSTANDARDFINITE DIFFERENCE SCHEME FOR STOCHASTIC PARTIALDIFFERENTIAL EQUATIONS	ولی عصر رفسنجان	سالن دو	۱۸:۰۰-۱۸:۳۵
	مینا محمدی احمد آباد	رویکرد جدید تصادفی برای شبیه سازی بازارهای مالی با نوسانات زیاد	ارومیه	سالن دو	۱۸:۳۵-۱۸:۵۰

برنامه‌ی ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی

سه‌شنبه ۵ اسفند ۱۳۹۹						زمان
ساعت	محل برگزاری	دانشگاه	عنوان سخنرانی	نام و نام خانوادگی		
۱۳:۳۰-۱۴:۱۵	سالن یک	صنعتی شریف	The uncertain shape of grey swans	دکتر حمیدرضا آرنی		
۱۴:۱۵-۱۵:۰۰	سالن یک	شهید بهشتی	طراحی و ارزیابی بیمه‌های انکابی	دکتر امیر تیمور پاینده		
۱۵:۰۰-۱۵:۴۵	سالن یک	علامه طباطبائی	معرفی ابزارها و روش های نوین معاملاتی بازار سرمایه ایران با تاکید بر تفاوت‌های آنها با دیگر کشورها	دکتر مسلم پیمانی		
۱۵:۴۵-۱۶:۰۰			استراحت			
۱۶:۰۰-۱۶:۴۵	سالن یک	پژوهشکده بیمه	ارزیابی و نظارت ریسک‌محور در شرکت‌های بیمه	دکتر لیلی نیاکان		
۱۶:۴۵-۱۷:۱۰	سالن یک	شهید بهشتی	A MARKOV-MODULATED MODEL FOR CONTINUOUS-INSTALLMENT OPTION PROBLEMS UNDER REGIME-SWITCHING	دکتر سافو حیدری		
۱۷:۱۰-۱۷:۳۵	سالن یک	شهید بهشتی	معرفی و ارزشگذاری محصول جدید بیمه درمان با خدمات بستری محدود و تعاقب مزایای قابل برداشت تقسیم شده	سارا سادات موسوی		
۱۷:۳۵-۱۷:۵۰			استراحت			
۱۷:۵۰-۱۸:۱۵	سالن یک	ولی عصر رفسنجان	شرایب لاگرانژ و مدل مارکوفیتر بیمه سازی مدیریت ریسک	دکتر سیدعلی محمد محسنی الحسینی		
۱۸:۱۵-۱۸:۴۰	سالن یک	تبریز	Numerical Solution of Fractional Stochastic Differential Equations and Stability Analysis	رامین آذری		
۱۸:۴۰-۱۹:۰۵	سالن یک	اراک	A Robust Numerical Method for Multi-Asset Option Pricing	دکتر سیما مشایخی		
۱۹:۰۵-۱۹:۳۰	سالن دو	علامه طباطبائی	بهبود سازی سبد سهام تحت دینامیک های تصادفی	زینب غلام پور نقدر		
۱۹:۳۰-۱۹:۴۵	سالن دو	آزاد شیراز	APPLICATION OF STEINE'S LEMMA IN MODERN FINANCE	دکتر آسیه ایلچی		
۱۹:۴۵-۲۰:۱۰	سالن دو	بیرجند	PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR THE TIME FRACTIONAL BLACK-SCHOLES EUROPEAN OPTION PRICING MODEL	دکتر محمد مهدی ایردوخواه		
۲۰:۱۰-۲۰:۱۵	سالن دو	وزارت کار	مدل بندی سری زمانی هزینه های خانوار شهری از سال ۱۳۴۹ تا ۱۳۹۷	کیانا ملک پور		
۲۰:۱۵-۲۰:۴۰	سالن دو	مرافقه	NUMERICAL METHOD FOR OPTION PRICING MODEL	دکتر محمد مهدی زاده		
۲۰:۴۰-۲۱:۰۵	سالن دو	تبریز	A new finite difference/spectral method for numerical solution of the Black-Scholes	دکتر یونس طالبی		

برنامه‌ی ششمین همایش ریاضیات و علوم انسانی

زمان	نام و نام خانوادگی	عنوان سخنرانی	دانشگاه	محل برگزاری	ساعت
چهارشنبه ۶ اسفند ۱۳۹۹					
	دکتر احسان آزموده	On Stein method and applications in finance & insurance	University of Leeds	سالن یک	۱۴:۰۰-۱۴:۴۵
	دکتر مهدیه طهماسبی	STOCHASTIC VOLATILITY DRIVEN BY BROWNIAN MOTION WEIGHTED FRACTIONAL WITH DELAY	تربیت مدرس	سالن یک	۱۴:۴۵-۱۵:۳۰
	استراحت				
	دکتر آرش فهیم	نظریه قرار دادها در زمان پیوسته	Florida State University	سالن یک	۱۶:۰۰-۱۶:۴۵
	دکتر هیرید آسا	Market consistent and hedging consistent valuation	Kent Business School	سالن یک	۱۶:۴۵-۱۷:۳۰
	دکتر مصطفی پورعلیراده	Advances in Financial Machine Learning	علامه طباطبائی	سالن یک	۱۷:۳۰-۱۷:۵۵
	دکتر کاظم توری	STOCHASTIC RUNGE-KUTTA ROSENBROCK STRONG GLOBAL ORDER TYPE SCHEME WITH ONE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS	سمنان	سالن یک	۱۷:۵۵-۱۸:۳۰
	مریم عبدا.. زاده	قیمت گذاری سازگار اختیارهای شاخص و مشتقات تلاطم	علامه طباطبائی	سالن یک	۱۸:۳۰-۱۸:۴۵
	سید سجاد حسینی	مطالعه رمز ارزها با استفاده از نظریه بازی‌ها	یزد	سالن دو	۱۷:۳۰-۱۷:۵۵
	فاطمه عطاطلب	مدلسازی تأخیر در گزارش دهی خسارت در ذخیره خسارت بیمه‌های غیرزندگی	شهید بهشتی	سالن دو	۱۷:۵۵-۱۸:۳۰
	عاطفه کعبانی	طراحی بیمه درمان بلند مدت قابل به روزرسانی	شهید بهشتی	سالن دو	۱۸:۳۰-۱۸:۴۵

سالن یک: <https://et-adobe.atu.ac.ir/mcs-scmh>

سالن دو: <https://et-adobe.atu.ac.ir/mcs-scmh>^۱

Cryptocurrencies and their economic implications

Khosrow Dehnad

Columbia University & Director of Analytics and Chief Data Scientist CONCORD ADVICE.

Abstract. There is a great deal of controversy in the financial community about Bitcoin and cryptocurrencies. Optimists believe that Bitcoin and the blockchain technology behind it have the potential to transform the Financial Industry and the way transactions are done in the Economy. On the other hand, pessimists believe that Bitcoin is a fad and a bubble similar to Tulip Mania and will implode and cause a great deal of financial pain.

This talk examines the mathematical and computer science foundation of cryptocurrencies. It also discuss the challenges to regulators and central banks and the question of trading and risk managing such assets.

Utility Maximization Under Ambiguity

Erfan Salavati
Amirkabir University

Abstract: In classical utility theory, the basic assumption is that each individual is trying to maximize the expected utility of his outcome. This expectation is assumed to be taken under some known probability distribution $\mathbb{P}$.

After the financial crisis of a decade ago, the assumptions of classical utility theory have been called into question. One of these assumptions has been the specificity of the probability distribution. The proposed alternative is a situation in which even the distribution is not known a priori, but rather it comes from a family of distributions. This family is called the ambiguity set. Instead of ordinary expected utility, the individual is trying to maximize a robust utility functional,

$$X \mapsto \min_{Q \in \mathcal{Q}} [U(X)]$$

Where $\mathcal{Q}$ is the ambiguity set.

In recent years a lot of research has been done in Robust Utility Maximization, each one concerned with a different assumption on ambiguity set. Among these works, the G-expectation theory of Peng (2007) seems to have been the most successful.

In this talk, we generalize the G-expectation to the heavy-tailed distributions. We also propose a new risk measure which is suitable for such non-linear expectation. Then, we find the explicit solution for the optimal portfolio under this new risk measure.

کاربرد یادگیری ماشین در تحلیل داده‌های مالی

محمدرضا اصغری اسکویی
گروه رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده: پیشرفت هوش مصنوعی سبب شده که ماشین قادر به انجام کارهای باشد که تا قبل از آن در انحصار انسان متخصص بود. در حوزه مالی شاهد رشد فناوری و پدیده‌های جدیدی همچون معاملات پرتواتر و ماشینی، رمزارز، زنجیره بلوکی، قراردادهای هوشمند و تامین مالی جمعی هستیم. یادگیری ماشین یکی از مباحث هوش مصنوعی است که امکان ساخت اتوماتیک برنامه‌های محاسباتی براساس داده و مشاهدات با هدف ارتقاء کارآمدی و مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده و پویا را فراهم می‌نماید. از خصوصیات مهم یادگیری ماشین، مدل‌سازی با قدرت تطبیق‌پذیری بالا، امکان تحلیل انواع داده از جمله متن و تصویر در کنار اعداد و ارقام، شناسایی الگوی‌های پیچیده و امکان کنترل فرابرازش در تخمین و مدل‌سازی است.

امروزه کاربردهای مختلفی از یادگیری ماشین در حوزه مالی مطرح و عملیاتی شده است که از جمله مدل‌سازی و پیش‌بینی تغییرات متغیرهای مالی با کمک شبکه‌های عمیق، تشکیل سبد دارایی بهینه، تحلیل محتوی شبکه‌های اجتماعی، اخبار و گزارشات در کنار مدل‌های مالی و شناسایی الگوی ترکیبی و ساختاری تحولات مالی، معاملات آلفوریتمی شامل تصمیم خرید، نگهداری و فروش دارایی و تخمین حجم بهینه خرید و فروش، تحلیل ریسک و اثر شوک، ارزیابی استراتژی‌های خرید و فروش، کشف الگوی تقلب و نیز اعتبار سنجی را می‌توان نام برد. در این سخنرانی به تشریح برخی از این کاربردها پرداخته و چالش‌های مرتبط معرفی می‌شود.

آینده تکنولوژی های نوین مالی و تاثیر آن بر بازارهای متفاوت

زیبا حبیبی لشکری
دانشگاه پلی تکنیک مادرید

چکیده: پیشرفت های اخیر عرصه ی مالی در جهان، سهم به سزایی در گشایش افق های نوین بر رفتار مصرف کنندگان داشته و منجر به چالشی عظیم میان بانک ها و فناوری های مالی گردیده است. از این رو، بانک ها را به ویژه آن هایی که نگرشی همسو با تغییرات نوین ندارند به منظور تضمین سودآوری مجبور به تغییر روش های سنتی-تجاری خویش از جمله مقابله با کاهش مداوم نرخ بهره، رشد اعتبار پایین و رقابت رو به رشد خرده فروشی کرده و روی به فناوری مالی (فین تک) آورده اند. از سوی دیگر، الگوریتم های جدید، کلان داده ها، بلاک چین و قراردادهای هوشمند نیز بانک ها را محکوم به رقابت با انواع جدید واسطه ها کرده است.

مغفول نماند که فناوری های مالی علی رغم تمامی این پیشرفت ها در این عرصه، از نداشتن دسترسی کافی به بازارهای سرمایه، اعتبار و پایگاه مشتریان و به طور کلی فقدان شناخت مطلوب در مورد آنها رنج می برند.

حال که همه گیری ویروس کرونا ما را در عمیق ترین رکود جهانی تاکنون قرار داده، بانک ها نیز از این قاعده مستثنی نبوده و با توجه به تجارب گذشته ی خویش، آنها نیز برای عبور از این رکود مجبور به پذیرفتن گزینه های دیجیتالی جدید به دلیل برخورداری بیشتر از سرعت عمل، انعطاف پذیری و امنیت شده اند. مزید بر این دلایل، فناوری های جدید با قابلیت انعطاف پذیری بالا در مقابل مشکلات روزافزون حال حاضر جهان مانند مقررات دولتها و حتی مشکلات مقطعی مانند فاصله ی اجتماعی در دوران کرونا مورد توجه قرار گرفته اند.

در آخر شاید پر بیراه نباشد با عنایت به تغییرات سریع و بلاانقطاع جهانی، ما اندیشمندانه تر و شکیباتر نسبت به اتفاقات پیش روی عرصه ی مالی و نتایج این تغییرات در بازار گفتگو و تعامل کنیم.

The uncertain shape of grey swans

Hamidreza Arian
Sharif University

Abstract. Extreme Value Theory (EVT) is one of the most commonly used approaches in finance for measuring the downside risk of investment portfolios, especially during financial crises. In this paper, we propose a novel approach based on EVT called Uncertain EVT to improve its forecast accuracy and capture the statistical characteristics of risk beyond the EVT threshold. In our framework, the extreme risk threshold, which is commonly assumed a constant, is a dynamic random variable. More precisely, we model and calibrate the EVT threshold by a state-dependent hidden variable, called Break-Even Risk Threshold (BRT), as a function of both risk and ambiguity. We will show that when EVT approach is combined with the unobservable BRT process, the Uncertain EVT's predicted VaR can foresee the risk of large financial losses, outperforms the original EVT approach out-of-sample, and is competitive to well-known VaR models when back-tested for validity and predictability.

طراحی و ارزیابی بیمه‌های اتکایی

امیر تیمورپاینده نجف آبادی

دانشگاه شهید بهشتی

چکیده: بیمه‌های اتکایی نقش بسیار مهمی در توسعه صنعت بیمه‌ای هر کشور ایفا می‌کنند. به گونه‌ای که در برخی از کشورها (نظیر ایران) بیمه‌ای اتکایی به صورت اجباری به صنعت تکلیف می‌شود. در این سخنرانی در مورد ضرورت وجود بیمه‌های اتکایی و چگونگی طراحی بیمه‌های اتکایی بحث خواهیم کرد. سرانجام با ارائه چند نمونه واقعی، چگونگی طراحی بیمه‌های اتکایی برای بیمه‌های غیرزندگی و بیمه‌های خرد را نشان خواهیم داد.

کلید واژه: بیمه‌های زندگی، بیمه‌های غیرزندگی، بیمه‌های خرد، بیمه‌های تعاونی، سنجه‌های

ریسک

معرفی ابزارها و روش های نوین معاملاتی بازار سرمایه ایران با تاکید بر تفاوت های آنها با دیگر کشورها

مسلم پیمانی
دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده: بازارهای سرمایه جهان، یکی از پیشروترین بازارها در توسعه ابزارهای مالی جدید و عموماً پیچیده ای است که با هدف پوشش نیازهای متنوع فعالین گسترده این بازارها طراحی و اجرا می شود. علی رغم وجود شباهت هایی کلی بین بازار سرمایه کشورهای مختلف، تفاوت هایی در این ابزارها و روش های معاملاتی وجود دارد که عموماً به دلیل نیازهای خاص هر بازار و الزامات قانونی هر کشور است. بازار سرمایه ایران نیز از این قاعده مستثنی نبوده و به دلیل شرایط خاص اقتصادی کشور و همچنین قوانین و الزامات شرعی حاکم بر آن، تغییرات جزئی و بعضاً اساسی در نحوه اجرا و پیاده سازی این ابزارها و روش ها در ایران رخ داده است. بر این مبنای ضروری است در استفاده از مدل های ریاضی شناخته شده و پذیرفته شده موجود بین المللی برای قیمت گذاری و تصمیم گیری در خصوص این ابزارها و روش ها دقت لازم به عمل آمده و اصلاحات ضروری و حتی بنیادینی در آنها صورت گیرد تا قابلیت کاربرد و اجرا در این مدل ها ایجاد گردد. بر این اساس پس از معرفی ابزارها و روش های نوین معاملاتی بازار سرمایه ایران، این تفاوت ها توضیح داده شده و راه کارهای اولیه ای برای توسعه مدل های ریاضی خاص آنها ارائه می گردد تا پژوهشگران علاقه مند به حوزه ریاضیات مالی به توسعه و حل این مدل های کاربردی و بومی بپردازند.

لغات کلیدی: ابزارهای و روش های نوین معاملاتی، بازار سرمایه، الزامات قانونی و شرعی، بومی - سازی مدل های ریاضی.

ارزیابی و نظارت ریسک محور در شرکت های بیمه

لیلی نیاکان

پژوهشکده بیمه

چکیده: هر کشوری با توجه به میزان توسعه یافتگی صنعت بیمه و میزان رقابت حاکم بر بازار خود، نظام های نظارتی مختلفی را به کار می گیرد. یکی از تحولاتی که در سال های اخیر در نظام نظارت بر صنعت بیمه ایران رخ داده است تغییر نظام نظارت تعرفه ای به نظارت مالی بوده است که باعث شد مداخله در عملیات بیمه ای شرکت های بیمه کمتر شود. در این نظام نظارتی، درعین محدودیت های کمتر برای فعالیت های بیمه گران، مسئولیت سنگین تری در خصوص حسابرسی داخلی، حسابرسی قانونی، الزامات توانگری، حاکمیت شرکتی و نظارت بر عهده آنها گذاشته شد. در رویکرد نظارت فعلی که مالی و مبتنی بر قواعد است، عمدتاً بر میزان رعایت مقررات توسط مؤسسات بیمه نظارت صورت می گیرد. در این رویکرد همه ریسک هایی که بیمه گر با آنها مواجه است در نظر گرفته نمی شود؛ لذا در سال های اخیر رویکرد نظارت مبتنی بر ریسک مورد توجه انجمن بین المللی ناظران بیمه و همچنین نهادهای ناظر بیمه در بسیاری از کشورها قرار گرفته است. رویکرد نظارتی جدید مبتنی بر تمرکز نهاد ناظر بر حوزه های ریسکی جدی و در شرکت هایی است که به توجه بیشتری احتیاج دارند.

هدف این مقاله معرفی فرایند ارزیابی ریسک شرکت های بیمه در نظام نظارت مبتنی بر ریسک و نحوه نظارت بر آنهاست. این ارزیابی نظارتی بر مبنای ارزیابی ریسک های بازار، بیمه گری، اعتباری و عملیاتی، کفایت سرمایه و حاکمیت شرکتی است که درنهایت با مدل سازی آنها می توان نمره ریسک هر شرکت بیمه را تعیین و نوع اقدام نظارتی متناسب با وضعیت ریسک شرکت بیمه را مشخص نمود. مزیت استفاده از این روش این است که علاوه بر داشتن دید کلی نسبت به وضعیت شرکت، حوزه هایی را که شرکت در آنها با مشکل مواجه است می توان شناسایی و نسبت به رفع مشکل مربوطه اقدام نمود.

STOCHASTIC VOLATILITY DRIVEN BY WEIGHTED FRACTIONAL BROWNIAN MOTION WITH DELAY

Mahdieh Tahmasbi

Tarbiat Modares University

Abstract. Malliavin Calculus is an infinite-dimensional differential calculus on the Wiener space and there are various applications in finance, for example in pricing and hedging financial options and also in sensibility with respect to the parameters. In this Lecture, we give a brief introduction of Malliavin calculus on the stochastic integrals of weighted fractional brownian motion (wfBm) and then we state its application to approximate the price of one financial derivative with stochastic volatility driven by wfBm and some time-delay τ .

Keywords: Malliavin calculus, Stochastic volatility models, Weighted fractional Brownian motion, Implicit Euler scheme.

Classification: 65C30, and 60H07.

On Stein method and applications in finance & insurance

Ehsan Azmodeh
Leeds University

Abstract: Stein method is devised in the early seventies by Charles Stein (1920-2016) a Stanford statistician to measure the distance between probability distributions by means of characterizing differential operators. Stein's motivation was to develop an effective alternative to Fourier methods to prove Berry-Esseen type CLTs when dealing with functionals of dependent random variables. A few years after, the method was adapted to the Poisson approximation by Louis Chen, his former Ph.D student. Since then, Stein's original idea has got a lot of attentions and the methodology has been applied to a very broad family of probability distributions. In this talk, we explain the Chen-Stein road map and illustrate some applications in finance and insurance mathematics.

نظریه قراردادها در زمان پیوسته

آرش فهیم

دانشگاه ایالتی فلوریدا

چکیده: نظریه قراردادها در زمان گسسته تاریخچه طولانی دارد. میلگرام، برنده نوبل اقتصاد، یکی از مبدعان و متخصصان این شاخه است. مهم‌ترین ابزار ریاضی مورد استفاده در این شاخه، نظریه کنترل تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی پسرو است. در این سخنرانی، ضمن شرح مدل‌های اولیه‌ی زمان-پیوسته در نظریه قراردادها، به توسعه این مدل‌ها پرداخته و نتایج اقتصادی منتج از این مدل‌ها را شرح می‌دهیم. به علاوه، نشان خواهیم داد چگونه معادلات پسرو به طور طبیعی در نظریه قراردادها ظاهر می‌شوند و روش حل ارائه شده بر پایه‌ی این معادلات چیست.

Market consistent and hedging consistent valuation

Hirbod Asa
Kent Business School

Abstract: The existing literature on market-consistent valuation (MCV) always assumes that the liquid assets cannot change the market valuation of a risky portfolio. In other words, an MCV needs also to be a hedging consistent valuation (or HCV). In this talk, we will discuss how HCV can be a restrictive condition when it comes to MCV. Then we consider a pure MCV, or MCV without hedging, and discuss how one can relate it to market sub-consistent valuation (MSCV). The discussions will follow by proposing methods for real word implement.

ساختار دوره‌ای در سری‌های زمانی و کاربردهای آن

مهدی شمس^۱

^۱ دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

چکیده: مدل‌های سری‌های زمانی مربوط به داده‌های هواشناسی، رفتار نامانا دارند. اگر یک متغیر در هر روز در یک زمان یکسان مشاهده شود، به نظر می‌رسد در یک دوره چند هفته‌ای ماناست، اما دارای یک ساختار تغییرات فصلی است. به عنوان مثال، میانگین و چگالی طیفی در فصل‌های تابستان و زمستان متفاوت هستند. رویکرد معمول برای این مشکل تقسیم یک سال به بخش‌های مجزا و تجزیه و تحلیل داده‌ها به صورت جداگانه برای دو یا سه ماه از چندین سال است. در این مقاله در پیش‌بینی سری‌های زمانی با ساختار دوره‌ای، برابری برای پارامترها و همچنین واریانس پیشنهاد می‌شود.

کلمات کلیدی: ساختار دوره‌ای، فرایند مانا، مدل اتورگرسیو، رگرسیون خطی، سری فوریه.

طبقه بندی موضوعی: 62J05, 62M10, 60G10.

۱ مقدمه

یک فرایند تصادفی $X(t)$ دارای ساختار دوره‌ای است، اگر برای هر تعداد دلخواه n از نقاط زمانی t_i ، هر عدد صحیح k و برخی اعداد مثبت T به نام دوره رابطه
$$\left(X(t_1), \dots, X(t_n) \right)^d = \left(X(t_1 + kT), \dots, X(t_n + kT) \right)$$
 برقرار باشد. یک فرایند اکیداً مانا یک حالت خاص از یک ساختار دوره‌ای است، زیرا توزیع احتمال توأم برای هر مقدار T یکسان است. در [1] یک دنباله تصادفی به طور دوره‌ای همبسته به عنوان یک فرایند با ساختار دوره‌ای در معنای وسیع تعریف شد. فرض کنید برای هر t ، $E\{X^2(t)\}$ متناهی است، اگر
$$m(t) = E\{X(t)\}$$
 تابع میانگین سری زمانی باشد، در این صورت برای هر t و هر عدد صحیح k ، $m(t) = m(t + kT)$. تابع کوواریانس

^۱ سخنران

$$R(s, t) = E \left[\{X(s) - m(s)\} \{X(t) - m(t)\} \right]$$

نیز برای هر s و t و هر عدد صحیح k ، در رابطه $R(s, t) = R(s + kT, t + kT)$ صدق می-کند. برای پارامتر پیوسته t فرض می‌شود که $X(t)$ در میانگین درجه دوم پیوسته است. همچنین [2] نشان داد که یک فرایند تصادفی با ساختار دوره‌ای، هماهنگی‌پذیر است ([5]، ص ۴۷۴)، زیرا داری نمایش $X(t) - m(t) = \int e^{2\pi i f t} dZ(f)$ است که در آن $Z(f)$ یک تابع تصادفی با میانگین صفر و حدود انتگرال برای $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و پارامتر پیوسته t به ترتیب به صورت $(-\infty, \infty)$ و $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ است. تابع کوواریانس یک فرایند هماهنگی‌پذیر داری نمایش

$$R(s, t) = \int \int \exp \{2\pi i (sf_1 - tf_2)\} dS(f_1, f_2)$$

است که در آن $dS(f_1, f_2) = E \{dZ(f_1) d\bar{Z}(f_2)\}$

برای یک فرایند با ساختار دوره‌ای $Z(f)$ لزوماً یک فرایند با نمونه‌های ناهمبسته نیست. تابع دوبعدی $S(f_1, f_2)$ ثابت است مگر اینکه $T(f_1 - f_2)$ یک عدد صحیح باشد. اگر $S(f_1, f_2)$ یک تابع توزیع طیفی دوبعدی در نظر گرفته شود، تابع چگالی طیفی بر روی خطوط موازی متمرکز می‌شود.

در این مقاله برای پارامترها و واریانس در پیش‌بینی سری‌های زمانی با ساختار دوره‌ای، برابری پیشنهاد می‌شود.

۲ نمایش اتورگرسیو

یک روش عملی پیش‌بینی سری‌های زمانی، برازش یک مدل اتورگرسیون متناهی به کمک روش حداقل مربعات است. اگر یک فرایند گسسته-زمان مانا یک چگالی طیفی کران‌دار و دور از صفر داشته باشد، طیف را می‌توان توسط یک مدل اتورگرسیون متناهی تقریب زد. با استفاده از روش گام به گام پیشنهاد شده در [6]، با استفاده از حداقل محاسبات می‌توان اتورگرسیون‌های با مرتبه بالا را برآورد کرد.

برای یک فرایند با ساختار دوره‌ای، ضرایب اتورگرسیو می‌توانند در طول دوره تغییر کنند. استفاده از ضرایب زمان-متغیر برای پیشگوه‌های فرایندهای با تغییرات فصلی برای میانگین‌های متحرک با وزن‌های نمایی [3] و برای فرایندهای نامانا [7] استفاده شد.

اگر یک فرایند با ساختار دوره‌ای $X(t)$ ، دارای میانگین صفر باشد، اتورگرسیون متناهی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$X(t) + a_1(t-1)X(t-1) + \dots + a_p(t-p)X(t-p) = \varepsilon(t) \quad (۱,۲)$$

که در آن برای هر t و s که $s \neq t$ و هر عدد صحیح k ، $a_m(t) = a_m(t+kT)$ ،

$$E\{\varepsilon^2(t)\} = E\{\varepsilon^2(t+kT)\} \text{ و } E\{\varepsilon(s)\varepsilon(t)\} = 0, E\{\varepsilon(t)\} = 0$$

برای یک فرایندهای مانا، ضرایب اتورگرسیو یعنی $a_m(t)$ ، باید در شرایط مانایی صدق کنند. محدودیت‌های لازم را می‌توان با تبدیل فرایند به یک فرایند مانای چندمتغیره و با شکستن آن به دوره‌ها و متناسب کردن هر نقطه زمانی در یک دوره به عنوان یک مولفه از یک فرایند چندمتغیره بدست آورد. این روش توسط [1] برای نشان دادن هماهنگی‌پذیر بودن دنباله‌های تصادفی به طور دوره‌ای همبستگی استفاده شد. شرایط ماتریس‌های ضرایب اتورگرسیو یک فرایند مانای چندمتغیره در [6] یک شرط لازم برای $a_m(t)$ را فراهم می‌کنند.

از آنجایی که ضرایب اتورگرسیو با دوره T دوره‌ای هستند، توسط یک سری فوری به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$a_m(t-m) = \sum_{n=0}^{[T/2]} [a_{mn} \cos\{2\pi n(t-m)/T\} + b_{mn} \sin\{2\pi n(t-m)/T\}].$$

اگر ساختار فرایند به آرامی با زمان تغییر کند، می‌توان $a_m(t-m)$ را با یک سری فوری به صورت زیر تخمین زد:

$$a_m(t-m) \approx \sum_{n=0}^q [a_{mn} \cos\{2\pi n(t-m)/T\} + b_{mn} \sin\{2\pi n(t-m)/T\}], \quad q < [T/2].$$

بنابراین معادله (۱,۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$X(t) + \sum_{m=1}^p \sum_{n=0}^q X(t-m) [a_{mn} \cos\{2\pi n(t-m)/T\} + b_{mn} \sin\{2\pi n(t-m)/T\}] = \varepsilon(t)$$

یا

$$X(t) = -\sum_{m=1}^p a_{m0} X(t-m) - \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q [a_{mn} X(t-m) \cos\{2\pi n(t-m)/T\} + b_{mn} X(t-m) \sin\{2\pi n(t-m)/T\}] + \varepsilon(t).$$

این معادله نشان می‌دهد که پیش‌بینی‌های خطی سری‌های زمانی با ساختار دوره‌ای توسط رگرسیون کردن حال، نه تنها روی گذشته خود سری زمانی، بلکه روی گذشته سری زمانی به دست آمده توسط ضرب داده‌ها با سینوس‌ها و کسینوس‌های فرکانس‌های اصلی و هارمونیک دوره به دست می‌آید.

بسط سری‌های زمانی چندمتغیره با ساختار دوره‌ای تنها توسط بردار ستونی $X(t)$ و ماتریس-های مربعی a_{mn} و b_{mn} تفسیر می‌شوند.

۳ مثال‌های چندمتغیره

برآورد پارامترهای یک مدل اتورگرسیو بر روی داده‌های دمای دو متغیره شامل حداکثر و حداقل دمای روزانه در یک منطقه انجام شده است. به منظور حذف میانگین دوره‌ای، روی خواص مرتبه دوم تمرکز می‌شود و داده‌ها به بخش‌های ۴ ساله متشکل از ۱۴۶۰ نقطه زمانی با شروع از اول فروردین در یک سال کبیسه تقسیم شده است. دو بخش با هم جفت و تفریق می‌شوند و یک سری دومتغیره از ۱۴۶۰ نقطه زمانی و میانگین صفر را به دست می‌دهند. در چارچوب رگرسیون خطی معمولی $y = X\beta + \varepsilon$ که در آن برای یک فرایند دومتغیره، بعد ماتریس‌های $Y_{n \times 2}$ ، $X_{n \times p}$ ، $\beta_{p \times 2}$ و $\varepsilon_{n \times 2}$ با اندیس‌هایشان نشان داده شده است. با استفاده از برآورد معین مثبت از ماتریس تابع کوواریانس، یک راه حل پایا، در [6] ارائه شده است.

از سری زمانی دومتغیره $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]'$ سری زمانی k بعدی چندمتغیره به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$U(t) = [x_1(t), x_2(t), x_1(t) \sin(2\pi t/T), x_2(t) \sin(2\pi t/T), x_1(t) \cos(2\pi t/T), \dots]'. \\ \text{پیش‌بینی توسط رگرسیون کردن } X(t) \text{ روی } U(t-1), U(t-2), \dots, U(t-p) \text{ یعنی}$$

$$X(t) = B(1)U(t-1) + B(2)U(t-2) + \dots + B(p)U(t-p) + \varepsilon(t)$$

به دست می‌آید. برای حل رگرسیون خطی از محاسبات ماتریسی

$$\Gamma(m) = \sum_{t=m+1}^N U(t)U'(t-m), \quad (m=0,1,\dots,p-1),$$

$$H(m) = \sum_{t=m+1}^N U(t)X'(t+m), \quad (m=1,2,\dots,p)$$

و به طور معادل حل معادلات نرمال اصلاح شده یعنی

$$H = \begin{bmatrix} H(1) \\ H(2) \\ \vdots \\ H(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \dots & \Gamma(p-1) \\ \Gamma'(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma'(p-1) & \Gamma'(p-2) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}(1) \\ \hat{B}(2) \\ \vdots \\ \hat{B}(p) \end{bmatrix} = \Gamma \hat{B} \quad (1,3)$$

استفاده می‌شود. معکوس ماتریس Γ در معادله (1,3) با استفاده از فرمول افراز برای ماتریس‌های

متقارن تولید شده است. در یک مرحله مشخص،

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma(1) & \dots & \Gamma(r-1) \\ \Gamma'(1) & \Gamma(0) & \dots & \Gamma(r-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma'(r-1) & \Gamma'(r-2) & \dots & \Gamma(0) \end{bmatrix}^{-1}$$

از مرحله قبل در دسترس است. ضرایب رگرسیون برآورد شده، $\hat{B} = \Gamma^{-1}H$ و باقیمانده‌ها به

صورت

$$e(t) = X(t) - \hat{B}'(1)U(t-1) - \hat{B}'(2)U(t-2) - \dots - \hat{B}'(p)U(t-p)$$

هستند. اگر فرایند دارای ساختار دوره‌ای باشد، واریانس خطا می‌تواند به طور دوره‌ای تغییر کند.

این نوع فرایند توسط [4] مورد بررسی قرار گرفت. برآورد تغییرات با فرض این که واریانس خطا

می‌تواند با یک سری فوریه شامل یک جمله تقریب زده شود، به دست می‌آید. ضرایب برآورد شده

برای $n=1,\dots,7$ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\hat{V}_0 &= \frac{1}{N-pk} \sum_{t=1}^N e(t)e'(t), \\ \hat{V}_n &= \frac{1}{N-pk} \sum_{t=1}^N e(t)e'(t)\cos(2\pi nt/T), \\ \hat{W} &= \frac{1}{N-pk} \sum_{t=1}^N e(t)e'(t)\sin(2\pi nt/T).\end{aligned}$$

و از این رو

$$\begin{aligned}V_0 &= \hat{V}_0, \\ V_n &= \frac{1}{2}\hat{V}_n \{1 + \cos(\pi n/8)\} \\ W_n &= \frac{1}{2}\hat{W}_n \{1 + \cos(\pi n/8)\}\end{aligned}$$

و همچنین $V(t) = V_0 + 2 \sum_{n=1}^7 \{V_n \cos(2\pi nt/T) + W_n \sin(2\pi nt/T)\}$ در انتها

رگرسیون با استفاده از واریانس خطای برآورد شده برای حداقل مربعات وزنی تکرار می‌شود.

مرجع‌ها

1. E. G. Gladyshev, Periodically correlated random sequences. *Soviet Math.* 2(1961), pp. 385-388.
2. E. G. Gladyshev, Periodically and almost periodically correlated random processes with continuous time parameter. *Theory Prob. Appl.* 8 (1963), pp. 173-177.
3. P. J. Harbison, Short-term sales forecasting. *Appl. Statist.* 14 (1965), pp. 102-139.
4. L. J. Herbst, Periodogram analysis and variance fluctuations. *J. R. Statist. Soc. B* 25 (1963), pp. 422-450.
5. M. Loeve, *Probability Theory* (third edition). Princeton: D. Van Nostrand, 1963.
6. P. Whittle, On the fitting of multivariate autoregressions, and the approximate canonical factorization of a spectral density matrix. *Biometrika* 50 (1963), pp. 129-134.
7. P. Whittle, Recursive relations for predictors of non-stationary processes. *J. R. Statist. Soc. B* 27 (1965), pp. 523-532.

قیمت‌گذاری سازگار اختیارهای شاخص و مشتقات تلاطم

مریم عبدالله زاده^۱، علی صفدری وایقانی^۲

دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

^۲asafdari@atu.ac.ir, ^۱m_abdollahzadeh@atu.ac.ir

چکیده: در این تحقیق مدل‌سازی دینامیک توأم سواپ واریانس سلف و شاخص بررسی و مساله قیمت‌گذاری اختیار اروپایی شاخص پایه و قیمت‌گذاری اختیار اروپایی سواپ‌های واریانس سلف مورد مطالعه قرار گرفته است. در مدل ارائه شده که براساس نتایج تحقیقاتی برگامی [2-4] استوار است، قیمت‌گذاری اختیار شاخص سازگار با سواپ‌های واریانس سلف انجام می‌گیرد. در ادامه برتری‌های آن نسبت به مدل‌های کلاسیک از جمله قابلیت کنترل مجزای چولگی و همبستگی‌های تلاطم/اسپات بیان شده است. همچنین کارایی مدل مورد مطالعه در قیمت‌گذاری اختیار اروپایی S&P500 و اختیارهای شاخص تلاطم VIX، سواپ واریانس

کلمات کلیدی: مشتقات تلاطم، شاخص تلاطم VIX، سواپ واریانس

طبقه بندی موضوعی AMS: 35R09, 91G20, 91G30

۱-مقدمه

اخیرا قراردادهای سواپ واریانس برای پوشش ریسک تلاطم سبدهای اختیار مورد توجه قرار گرفته است. در مدل معرفی شده توسط برگامی [2-4] دینامیک توأم دارایی پایه و تلاطم سلف را به گونه ای معرفی کرد که نه منعطف و نه به صورت مستقیم قابل دستیابی بود. در نتیجه کالیبره سازی پارامترها با موانعی مواجه گردید. برگامی مدل‌سازی تلاطم آنی را با مدل سواپ‌های واریانس سلف که در هر بازه مقدار جدید و متفاوتی اتخاذ می‌کرد جایگزین نمود. این مدل را می‌توان شبیه مدل بازار لایبور برای تلاطم در نظر گرفت.

در این پژوهش مدلی مبتنی بر نتایج برگامی با ساختار بدون آربیتراژ از دینامیک توأم سواپ واریانس و شاخص پایه با ویژگی‌های زیر را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

- قابلیت انطباق لبخند تلاطم ضمنی شاخص و قیمت اختیار شاخص.

- تعیین اختیار VIX با تطابق قیمت/لبخند تلاطم ضمنی آن.
- امکان ایجاد ساختار زمانی نرخ سواپ واریانس مشاهده شده.
- دینامیک توأم با امکان پرش در بازده و تلاطم‌ها.
- امکان پارامتری سازی مستقل همبستگی تلاطم/اسپات و چولگی تلاطم ضمنی اختیارها.
- امکان کنترل مجزای چولگی و ساختار زمانی تلاطم تلاطم.
- قابلیت انعطاف و کارا در قیمت گذاری اختیارها.

در مدل ارایه شده انعطاف پذیری به دلیل وجود پرش در ساختار پواسون فراهم شده است. علاوه براین امکان کالیبره سازی رویه تلاطم ضمنی بعنوان یک برتری نسبی از مدل برگامی شمرده می شود که تنها قابلیت کالیبره کردن لبخند تلاطم ضمنی ATM را داشت.

$$RV_{t,T} = \frac{M}{k} \sum_{i=1}^k \left(\log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2 \quad \text{به صورت } [0, T] \text{ زمانی } S_t \text{ در بازه ی}$$

تعریف می شود که k تعداد افرازاها و M تعداد معاملات این بازه ی زمانی است. اگر S_t را نیم-مارتینگل در نظر بگیریم، واریانس تحقق یافته به تغییرات مرتبه دوم لگاریتم قیمت همگراست.

$$\sum_{i=1}^k \left(\log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \right)^2 \xrightarrow{\square} [\log S]_T - [\log S]_t. \quad (1,1)$$

سواپ واریانس (VS) با شروع از t و سررسید $T > t$ ، مابه التفاوت واریانس تحقق یافته بازده لگاریتمی و مقدار توافقی (نرخ سواپ واریانس V_t^T) است و پرداخت نرخ ثابت سواپ واریانس از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$V_t^T = \frac{1}{T-t} E([\log S]_T - [\log S]_t | F_t). \quad (2,1)$$

واریانس سلف در زمان t ، $t < T_1 < T_2$ ، در دوره ی $[T_1, T_2]$ به صورت زیر است.

(3,1)

$$V_t^{T_1, T_2} = \frac{1}{T_2 - T_1} E([\log S]_{T_2} - [\log S]_{T_1} | F_t) = \frac{(T_2 - t)V_t^{T_2} - (T_1 - t)V_t^{T_1}}{T_2 - T_1}.$$

و بنابراین قیمت اختیار خرید سواپ واریانس سلف با سررسید T قیمت توافقی K برای دوره زمانی $[T_1, T_2]$ ، در زمان t در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\pi(t, T_1, T_2, K) = e^{-\int_t^{T_2} r_s ds} E \left((V_{T_1, T_2}^{T_1, T_2} - K)^+ \mid F_t \right).$$

۲- دینامیک‌های توام سواپ واریانس و شاخص پایه

تنها فرض برای توزیع توأم دارایی پایه و نرخ‌های سواپ واریانس سلف تقسیم‌پذیر نامتناهی بودن آن است.

فرایند سواپ‌های واریانس گسسته V_t^i ، $(V_t^i := V_{t_i}^{T_i - T_{i+1}})$ از معادله پرش-انتشار زیر تبعیت می‌نماید

(۱،۲)

$$V_t^i = V_0^i e^{X_t^i} = V_0^i \exp \left\{ \int_0^t \mu_s^i ds + \int_0^t \omega e^{-k_1(T_i - s)} dZ_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-k_2(T_i - s)} x J(dx ds) \right\}.$$

که در رابطه فوق Z_t حرکت براونی، k_1 ، k_2 مقادیری ثابت و J اندازه پواسون است. برای تعیین دینامیک دارایی پایه بایستی موارد زیر را مد نظر قرار دهیم.

۱. قیمت تنزیل‌یافته‌ی اسپات $S_t = \exp(-\int_0^t (r_s - q_s) ds) S_t$ مارتینگل مثبت باشد.

۲. دینامیکی سازگار با V_t^i داشته باشد به طوری که تغییرات مرتبه دوم فرایند با توجه به

$$\text{رابطه (۲،۱) به صورت } E[[\ln S]_{T_{i+1}} - [\ln S]_{T_i} \mid F_t] = V_t^i \text{ باشد.}$$

۳. قیمت اختیارهای خرید/فروش با دارایی پایه S_t سازگار با مقادیر مشاهده شده به ازای قیمت‌های توافقی و سرسیدها در بازار باشد.

برگامی تابع "تلاطم موضعی" تصادفی را برای فراهم ساختن شرایط فوق معرفی کرد که در هر بازه‌ای مقادیر آن به روزرسانی می‌شد تا با V_t^i مشاهده شده متناسب باشد. در این مقاله دینامیک دارایی پایه را که با رابطه (۱،۲) سازگار است به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_{T_m} = S_0 \exp \left\{ \int_0^{T_m} (r_s - q_s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \mu_i (T_{i+1} - T_i) + \sigma_i (W_{T_{i+1}} - W_{T_i}) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_{\mathbb{R}} u_i(x, V_{T_i}^i) J(dx ds) \right\}. \quad (۲،۲)$$

توجه داریم همبستگی جزء انتشار سواپ واریانس و حرکت براونی دارایی پایه به صورت $\rho = \langle W, Z \rangle_t$ و تابع تعینی $u_i(x, V^i)$ بیانگر سائز پرش دارایی پایه (تابعی از سواپ واریانس) است. با توجه به روابط (۱,۲)، (۲,۲) و (۲,۳) داریم:

$$V_{T_i}^i = \sigma_i^2 + \int_{\square} u_i(x, V_{T_i}^i)^2 \nu(dx). \quad (۳,۲)$$

۳- قیمت گذاری اختیار خرید

قیمت اختیار خرید اروپایی $C(0, S_0, K, T_m)$ با سررسید T_m و قیمت توافقی K به صورت زیر قابل بیان است [1].

$$C(0, S_0, K, T_m) = E[C^{BS}(U_{T_m}, K, T_m; \sigma_*)]. \quad (۱,۳)$$

که C^{BS} جواب معادله بلک شولز به ازای پارامتر تلاطم $(1 - \rho^2)(T_{i+1} - T_i)$ و $\sigma_*^2 = \frac{1}{T_m} \sum_{i=0}^{T_m} \sigma_i^2$

متغیر تصادفی $F_{T_m}^{(Z, J)}$ اندازه پذیر U_{T_m} است که

$$(۲,۳)$$

$$U_{T_m} = S_0 \exp \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \sigma_i^2 \rho^2 + \int_{\square} (e^{u_i(x, V_{T_i}^i)} - 1) \nu(dx) \right) (T_{i+1} - T_i) \rho(Z_{T_{i+1}} - Z_{T_i}) \sigma_i + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_{\square} u_i(x, V_{T_i}^i) J(dx ds) \right\}.$$

رابطه (۱,۳) می تواند با روش مونت کارلو به ازای N مسیر از Z و J تحقیق شود [1] به عبارتی

$$\hat{C}_N = \frac{1}{N} C^{BS}(U_{T_m}^{(k)}, K, T_m; \sigma_*(k)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C(0, S_0, K, T_m). \quad (۳,۳)$$

معادله (۳,۳) امکان کالیبره کردن مدل برای تمام رویه تلاطم ضمنی را می دهد در حالیکه مدل برگامی فقط برای کالیبره کردن چولگی تلاطم ضمنی ATM کاراست. اندازه لوی $\nu(dx)$ و تابع u_i در معادله (۲,۳) به ازای اندازه پرش های نرمال (مدل پرش-انتشار مرتون) بصورت زیر می باشد.

$$u_i(x, V_{T_i}^i) = \left(\frac{V_{T_i}^i}{V_0^i} \right)^{1/2} b_i x, \quad v(dx) = \lambda \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} dx$$

با جایگذاری تابع و اندازه فوق در رابطه (۳,۲) داریم.

$$\sigma_i^2 = V_{T_i}^i - \lambda \frac{V_{T_i}^i}{V_0^i} (b_i^2 m^2 + b_i^2 \delta^2).$$

که m میانگین و δ^2 واریانس توزیع نرمال، λ شدت پرش و مقدار ثابت b_i دلخواه اما به گونه ای انتخاب می شود که σ_i^2 نامنفی باشد، از طرفی این پارامتر حاوی جهت مخالف پرش دارایی پایه و پرش شاخص VIX است.

۴- شاخص تلاطم VIX

بورس اختیار معامله ی شیکاگو^۲ (CBOE) شاخص تلاطم VIX را معرفی کرد که مقدار آن به کمک سوپ واریانس

$$VS_t^T = \frac{2}{T-t} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{r_t^T (T-t)} Q(K_i, T; t) - \frac{1}{T-t} \left(\frac{F_t}{K_0} - 1 \right)^2, \quad (1,4)$$

به ازای دو زمان سررسید $N_{T_1} \leq 30 \leq N_{T_2}$ به صورت زیر محاسبه می شود [1]

(۲,۴)

$$VIX_t = 100 \sqrt{\frac{365}{30} \left((T_1 - t) VS_t^{T_1} \frac{N_{T_2} - 30}{N_{T_2} - N_{T_1}} + (T_2 - t) VS_t^{T_2} \frac{30 - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right)}.$$

تابع Q قیمت میانی عرضه و تقاضا اختیارها (خرید/فروش) با قیمت توافقی K_i و سررسید T ،

F_t قیمت شاخص سلف S&P500 و K_0 اولین قیمت توافقی، ΔK_i تفاضل دو کمترین

سررسید است به طوری که $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$. فرض می کنیم پرش ها تغییرات متناهی

دارند، واریانس تحقق یافته (۱,۱) را با توجه به تعریف سوپ واریانس (VS) و رابطه ی (۱,۴) به

سه عبارت مجزا تجزیه می کنیم

² Chicago Board Options Exchange

$$[\log S]_T - [\log S]_t = \frac{2}{T-t} \left(\int_0^{F_t} \frac{1}{K^2} (K - S_T)^+ dK + \int_{F_t}^{\infty} \frac{1}{K^2} (S_T - K)^+ dK \right. \\ \left. + \int_t^T \left(\frac{1}{F_{s^-}} - \frac{1}{F_t} \right) dF_s - \int_t^T \int_{\square} \left(e^y - 1 - y - \frac{y^2}{2} \right) J(dy ds) \right) \quad (۳,۴)$$

با محاسبه امید ریاضی رابطه فوق و مقایسه با فرمول (۱,۴) خواهیم داشت

$$VIX_t^2 = V_t^{t+30} + \frac{2}{T-t} E \left[\int_t^T \int_{\square} \left(e^y - 1 - y - \frac{y^2}{2} \right) \nu(dy) ds \mid F_t \right]. \quad (۳,۴)$$

مرجع‌ها

8. R. Cont, and T. Kokholm, A Consistent Pricing Model for Index Options and Volatility Derivatives, Mathematical Finance, (2011), 1-27.
9. L. Bergomi, Smile Dynamics, Mathematical Finance, (2004), Risk 17, 117-123.
10. L. Bergomi, Smile Dynamics II, Mathematical Finance, (2005), Risk 18, 67-73.
11. L. Bergomi, Smile Dynamics III, Mathematical Finance, (2008b), Risk 21, 90-96.

مقایسه کاربرد مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای برای صکوک

در بازارهای مالی

مرتضی رحمانی^۳ rahmanimr@yahoo.com ،

فریبا مرادنوری^{۴*} fmoradnoori@gmail.com

چکیده : مهم‌ترین کارکرد یک نظام مالی، تسهیل جریان مالی و سوق دادن آن در جهت کاراترین نوع سرمایه‌گذاری است. ابزار مالی به عنوان تسهیل‌کننده جریان مالی، به تولیدکنندگان فرصت می‌دهد تا منابع اقتصادی را با اتکا به منابع پولی و مالی با سرعت و دقت بیشتری مورد جابه‌جایی قرار دهند. در نظام مالی اسلامی وجود ابزارهای مالی مناسب سبب افزایش کارایی سرمایه و تخصیص بهینه منابع خواهد شد. در این میان اوراق بهادار اسلامی (صکوک) نوعی از ابزارهای مالی است که سبب افزایش کارایی سرمایه و تخصیص بهینه منابع می‌شود. از آن جایی که محاسبه ریسک و بازده در مورد صکوک نیز حایز اهمیت می‌باشد از این رو به مقایسه کاربرد مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای برای صکوک در بازارهای مالی ایران پرداخته شده است. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که قدرت تبیین مدل SCAPM با بتای پرتفوی صفر برابر با ۰/۸۲ و قدرت تبیین مدل SCAPM با بهره صفر برابر با ۰/۷۷ می‌باشد در حالی که این عامل برای مدل CAPM برابر با ۰/۵۵ است. از این رو می‌توان چنین نتیجه گرفت که برای قیمت‌گذاری صکوک در بازار سرمایه‌ای ایران، مدل اول در مقایسه با سایر مدل‌ها از اولویت بیشتری برخوردار است.

واژگان کلیدی : بازارهای مالی، قیمت‌گذاری، صکوک

طبقه‌بندی موضوعی: G12

۱- مقدمه

فرایند تامین مالی یکی از مباحث مهم اقتصاد مالی و یکی از دغدغه‌های اصلی دولت و شرکت‌ها است. برای تامین مالی روش‌ها و ابزارهای گوناگونی وجود دارد که هر کدام دارای ویژگی‌ها و خواص مربوط به خود است [۱]. توسعه و پیشرفت اقتصادی هر کشوری در گرو توسعه بازارها، نهادها و ابزارهای مالی است. کشورهایی که بخش عمده‌ای از جمعیت آن‌ها را مسلمانان

^۳ عضو هیئت علمی ریاضی و آمار دانشگاه علم و فرهنگ

^{۴*} کارشناسی ارشد ریاضی مالی، دانشگاه علم و فرهنگ (نویسنده مسئول)

تشکیل می‌دهند در پاسخ به نیازهای مالی خود از بازارهای بدهی کلاسیک (مبتنی بر بهره)، دچار محدودیت‌هایی می‌شوند. حال از آنجایی که بسیاری از ابزارهای مالی در دنیا مبتنی بر بهره هستند لذا مسلمانان نیاز به یک بازار مالی دارند که بتوانند سرمایه‌گذاری و تامین مالی کنند، از طرفی ربا در این عملیات وجود نداشته باشد [۱]. ابزار مالی اسلامی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که دارندگان اوراق به صورت مشاع در فعالیت‌های واقعی اقتصاد حضور دارند و سود این فعالیت‌ها پس از کسر هزینه‌های عملیاتی بین دارندگان اوراق توزیع می‌شود.

یکی از مهم ترین ابزارها به عنوان صکوک شناخته می‌شود که معمولاً به عنوان اوراق بهادار مطابق با شریعت نامیده می‌شود. امروزه صکوک به عنوان محصول اصلی در بازار سرمایه اسلامی محسوب می‌شود که کارکردهای آن متفاوت است. یک توضیح ساده درباره صکوک مدرن این است که صکوک ابزارهای مالی هستند که به فعالان بازار اجازه می‌دهد تا مقدار زیادی پول یا سرمایه را از سرمایه‌گذاران بدست آورند. این کار می‌تواند با ایجاد ساختار متنوعی از صکوک با دارایی یا دارایی پایه انجام شود. فرایند اوراق قرضه شامل وام‌دهندگان و وام‌گیرندگان است در حالیکه فرایند صکوک شامل اوراق بهادار و سرمایه‌گذاری از طریق قراردادهای اسلامی است. سرمایه‌گذارانی که علاقمند به اشتراک یا خرید صکوک هستند، سندی را دریافت خواهند کرد که بیانگر مالکیت دارایی، ریسک و جریان‌های نقدی است. پس از سررسید، این سرمایه‌گذاران حق دارند معادل ارزش صکوک را دریافت نمایند [4].

۲- مبانی نظری

یکی از مباحث مهم بازار سرمایه، آگاهی از میزان ریسک شرکت‌ها، به ویژه ریسک سیستماتیک است که می‌تواند نقش به سزایی در تصمیم‌گیری‌ها ایفا کند؛ زیرا اعتقاد بر این است که بازده سهام شرکت‌ها تابعی از ریسک سیستماتیک بوده و ریسک سیستماتیک بیانگر تغییرات نرخ بازده یک سهم نسبت به نرخ بازده کل بازار سهام است [۲].

یکی از موضوعات مهم در بحث ابزارهای مالی اسلامی بحث قیمت‌گذاری می‌باشد. یکی از معروف‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی، مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای (CAPM)^۵ می‌باشد. مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه یکی از مدل‌های پیش‌بینی بازده مورد انتظار سهام می‌باشد. فرم کلی مدل CAPM عبارت است از :

^۵ Capital asset pricing model

$$R_j = R_f + \beta_0 (R_m - R_f) \quad (2-1)$$

که در آن: R_j : بازده مورد انتظار سهم j ام، R_f : نرخ بازده بدون ریسک، R_m : بازده بازار (شاخص بازار)، $(R_j - R_f)$: صرف ریسک، $(R_m - R_f)$: صرف بازار و β_0 : درجه تغییرپذیری بازده ورقه‌بهادار فرضی را نسبت به تغییرپذیری بازده یک ورقه‌بهادار متوسط نشان می‌دهد. شارپ (۱۹۶۴) تئوری میانگین-واریانس مارکوویتز^۶ (MVT) را برای توسعه مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه (CAPM) تحت شرایط تعادل بازار گسترش داد [۳]. مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه شارپ نمی‌تواند به طور مستقیم برای برآورد بازده ابزارهای مالی اسلامی پر ریسک بکار رود زیرا ورودی‌های مدل به دنیای سرمایه‌گذاری سرمایه‌گذاران مسلمان تعلق ندارد. اسلام سرمایه‌گذاری در دارایی‌های ریسک‌دار و تجارت غیرحلال را ممنوع کرده است. بنابراین، لازم است طبق دستورات شریعت، مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه ایجاد شود که با ابزارهای مالی اسلامی تطبیق داده شده است. در این راستا، دو رویکرد برای پیشنهاد دو نسخه از مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه مطابق با شریعت (SCAPM) اتخاذ می‌شود.

۱) SCAPM با سبد سهام بتا صفر ((SCAPM(Z):

$$E(r_{i_s}) = E(r_{z_s}) + \beta_{i_s} [E(r_{M_s}) - E(r_{z_s})] \quad (2-2)$$

۲) SCAPM با وجه نقد یا بازده بدون ریسک صفر ((SCAPM(C):

$$E(r_{i_s}) = \beta_{i_s} [E(r_{M_s})] \quad (2-3)$$

که در آن r_{i_s} ، r_{z_s} و r_{M_s} به ترتیب بازده سهام مطابق با شریعت، پورتنوی بتا صفر و سبد سهام بازار می‌باشد. β_{i_s} نشان‌دهنده کوواریانس استاندارد بین i_s بازده سهام مطابق با شریعت و M_s بازده سبد سهام بازار مطابق با شریعت می‌باشد [۳].

۳- تحلیل مدل پژوهش

داده و اطلاعات مورد استفاده در این پژوهش مربوط به شرکت‌هایی است که اوراق صکوک در بازه زمانی ۹۷-۹۰ منتشر کرده‌اند. که مجموعاً شامل ۷۱ شرکت می‌باشد. تجزیه و تحلیل رگرسیونی برای هر مدل به صورت جداگانه انجام شده است؛ نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل رگرسیون داده‌های این پژوهش به شرح زیر می‌باشند:

⁶ Mean Variance Theory (MVT)

۳-۱- تحلیل مدل SCAPM با بتای صفر

این مدل، همان مدل قیمت گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای است با این تفاوت که عامل چولگی به آن اضافه شده است.

جدول ۱: تخمین مدل SCAPM با بتای صفر

بتا	ضریب تعیین تعدیل شده	عرض از مبدا	پرتفوی ها	
۰/۲۱۴	۰/۶۸۱	۱/۲۱ ۲/۱۸	ضریب	SH
			tآماره	
۰/۳۲۸	۰/۵۱۹	۱/۰۸ ۲/۸۷	ضریب	SM
			tآماره	
۰/۴۸۹	۰/۸۱۵	۱/۱۸ ۱/۹۷	ضریب	SL
			tآماره	
۰/۸۷۳	۰/۴۷۴	۰/۳۵ ۲/۷۱	ضریب	BH
			tآماره	
۰/۲۲۷	۰/۵۱۸	۱/۹۴ ۲/۸۳	ضریب	BM
			tآماره	
۰/۵۱۶	۰/۶۶۸	۱/۵۶ ۱/۹۳	ضریب	BL
			tآماره	

در جدول ۱، بتا نشان‌دهنده‌ی ریسک سیستماتیک و ضریب^۷ نشانگر ضرایب سبد سهام شش‌گانه می‌باشند. ضرایب سبد سهام شش‌گانه در دامنه‌ای بین ۰/۳۵ و ۱/۹۴ قرار می‌گیرند. هم چنین ضریب تعیین تعدیل شده نشان‌دهنده‌ی قدرت اکتشافی (توضیحی) مدل است. همان گونه که از جدول ۱ مشاهده می‌گردد ضریب تعیین تعدیل شده این مدل در دامنه‌ای بین ۰/۴۷۴ و ۰/۸۱۵ قرار گرفته که نشان از قدرت تبیین بالای مدل دارد. این بدین معنی است که مدل مذکور می-

⁷ Coefficient

تواند تا ۸۲ درصد از تغییرات بازده مورد انتظار صکوک را تبیین نماید؛ یعنی افزایش کل عامل چولگی توانایی مدل را در برآورد نرخ بازده مورد انتظار افزایش می‌دهد.

۳-۲- تحلیل مدل SCAPM با بهره صفر

جدول ۲: تخمین مدل SCAPM با بهره صفر

پرتفوی ها	عرض از مبدا	ضریب تعیین تعدیل شده	بتا
SH	ضریب	۰/۸۷	۰/۱۱۹
	tآماره	۲/۸۸	
SM	ضریب	۰/۹۹	۰/۲۴۷
	tآماره	۲/۴۷	
SL	ضریب	۱/۰۵	۰/۳۱۶
	tآماره	۲/۵۶	
BH	ضریب	۰/۷۷	۰/۵۶۸
	tآماره	۲/۰۴	
BM	ضریب	۱/۶۷	۰/۳۳۷
	tآماره	۲/۹۵	
BL	ضریب	۰/۷۴	۰/۴۱۴
	tآماره	۱/۹۷	

در جدول ۲ ضرایب سبد سهام شش‌گانه در دامنه‌ای بین ۰/۷۴ و ۱/۰۵ قرار می‌گیرند. همان‌گونه که از جدول ۲ مشاهده می‌گردد ضریب تعیین تعدیل شده این مدل در دامنه‌ای بین ۰/۴۶۷ و ۰/۷۶۶ قرار گرفته که نشان از قدرت تبیین بالای مدل دارد. این بدین معنی است که مدل مذکور می‌تواند تا ۷۷ درصد از تغییرات بازده مورد انتظار صکوک را تبیین نماید؛ یعنی افزایش کل عامل چولگی توانایی مدل را در برآورد نرخ بازده مورد انتظار افزایش می‌دهد.

۳-۳- تحلیل مدل CAPM

جدول ۳: تخمین مدل CAPM

پرتفوی ها	عرض از مبدا	ضریب تعیین تعدیل شده	بتا
SH	ضریب	۰/۵۴۹	۰/۱۰۳
	tآماره		
SM	ضریب	۰/۳۱۳	۰/۱۸۳
	tآماره		
SL	ضریب	۰/۴۸۴	۰/۲۳۶
	tآماره		
BH	ضریب	۰/۴۷۵	۰/۲۱۴
	tآماره		
BM	ضریب	۰/۵۲۵	۰/۱۳۷
	tآماره		
BL	ضریب	۰/۵۰۲	۰/۳۶۸
	tآماره		

در جدول ۳ ضرایب سبد سهام شش گانه در دامنه‌ای بین ۰/۶۹ و ۱/۷۹ قرار می‌گیرند. همان‌گونه که از جدول ۳ مشاهده می‌گردد ضریب تعیین تعدیل شده این مدل در دامنه‌ای بین ۰/۳۱۳ و ۰/۵۴۹ قرار گرفته که نشان از قدرت تبیین مدل دارد. این بدین معنی است که مدل مذکور می‌تواند تا ۵۵ درصد از تغییرات بازده مورد انتظار صکوک را تبیین نماید.

۴- نتیجه گیری

امروزه سرمایه گذاری موفق، مستلزم شناسایی عوامل موثر بر سرمایه گذاری و ریسک های مرتبط با آن و تخصیص بهینه منابع با هدف کسب بالاترین بازده است. این امر موجب شد که نظریه ها، مدل ها و روش های گوناگونی برای قیمت گذاری دارایی های مالی و پیش بینی بازده سهام مطرح شده و هر روز در حال توسعه و تغییر باشد. باتوجه به نتایج جدول ۳ و ۲، قدرت تبیین مدل SCAPM با بتای پرتفوی صفر برابر با ۸۲ درصد می باشد و قدرت تبیین مدل SCAPM با بهره صفر برابر با ۷۷ درصد بوده در حالی که این عامل برای مدل CAPM برابر با ۵۵ درصد بوده است. از این رو می توان چنین نتیجه گرفت که برای قیمت گذاری صکوک در بازار سرمایه ای ایران،

مدل SCAPM با بتای پرتفوی صفر در مقایسه با سایر مدل‌ها از اولویت بیشتری برخوردار است. بنابراین مدل SCAPM با بتای پرتفوی صفر می‌تواند در مقایسه با سایر مدل‌ها، بازده مورد انتظار صکوک را با دقت بیشتری پیش‌بینی نماید.

۵-منابع :

۱. ارجمندی بهزاد، مریم، بررسی روش‌های تامین مالی در سیستم اسلامی با تاکید بر صکوک ، پایان نامه کارشناسی ارشد علوم اقتصادی، دانشکده علوم انسانی و مدیریت، دانشگاه پیام نور، (۱۳۸۹) .
۲. مهرآرا، محسن ؛ فلاحتی، ذبیح الله ؛ حیدری ظهیری، نازی . بررسی رابطه بین ریسک سیستماتیک و بازده سهام در بازار بورس اوراق بهادار تهران (از سال ۱۳۸۷ تا سال ۱۳۹۲) با استفاده از مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای ؛ فصلنامه سیاست‌گذاری پیشرفت اقتصادی دانشگاه الزهراء(س) ، سال اول ، شماره اول ، (۱۳۹۲)، صفحه ۶۷-۹۱ .
3. S. A. Hakim , Z. Hamid , A. K. Mydin Meera , Capital Asset Pricing Model and Pricing of Islamic Financial Instruments . Islamic Econ , vol . 29 . No,1 , (2016).pp: 21-39 .
4. S. S. Razak , B. Saiti , Y. Dinç, The contracts, structures and pricing mechanisms of sukuk: A critical assessment, Borsa Istanbul Review ,(2019), pp:21-33.

معرفی و ارزشگذاری محصول جدید بیمه درمان با خدمات بستری محدود و الحاقیه مزایای قابل برداشت تضمین شده

ساراسادات موسوی^{۸۱}، دکتر امیرتیمور پاینده نجفآبادی^{۹۲}

^۱ گروه بیمسنجی دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

^۲ گروه بیمسنجی دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

چکیده: مستمری متغیر نوعی محصول مستمری هستند که با سرمایه‌گذاری موجودی حساب در بازارهای مالی، فرصت تولید نرخ بازده بالاتری را به سرمایه‌گذاران می‌دهد. بر اساس همین ویژگی، مستمری‌های متغیر برای حفاظت از درآمدهای ثابتی است که طولانی مدت به بیمه‌گذار پرداخت می‌گردد. به علاوه این نوع مستمری سپر دفاعی خوبی در مقابل تورم و سایر معضلات اقتصادی از این دست خواهد بود. معمولاً شرکت‌های بیمه محصولات مستمری متغیر را به همراه انواع الحاقیه‌هایی ارائه می‌دهند که به آن ضمانت مستمری می‌گویند. این ضمانت‌ها باعث جذابیت بیشتر محصول شده و تمایل افراد را به خرید بیمه‌نامه بیشتر می‌کند. این مقاله محصول جدید مستمری متغیری در حوزه بیمه درمان را معرفی و ارزشگذاری خواهد کرد که علاوه بر هزینه‌های پزشکی فرد بیمه‌گذار، خدمات بستری محدودی را نیز پوشش می‌دهد. از طرف دیگر به دلیل وجود الحاقیه مزایای قابل برداشت تضمین شده، این محصول با محصولات بانکی قابل رقابت بوده و لذا سپر دفاعی مناسبی در مقابل معضلات اقتصادی است. به همین دلیل است محصول معرفی شده، جذابیت ویژه‌ای برای بیمه‌گذاران دارد.

کلمات کلیدی: مستمری متغیر، مراقبت بلندمدت، مستمری مراقبت، مزایای قابل برداشت تضمین شده تمام عمر.

طبقه بندی موضوعی: G22, I1.

۱ مقدمه

پیشرفت تکنولوژی‌های پزشکی و همزمان با آن نیاز افراد به درمان بیماری‌های جدید، همچنین آگاهی از ریسک مرتبط با طول عمر از جمله مواردی است که تمایل افراد برای استفاده از بیمه

^۸ سخنران، s_moosavi@sbu.ac.ir

^۹ amirtpayandeh@sbu.ac.ir

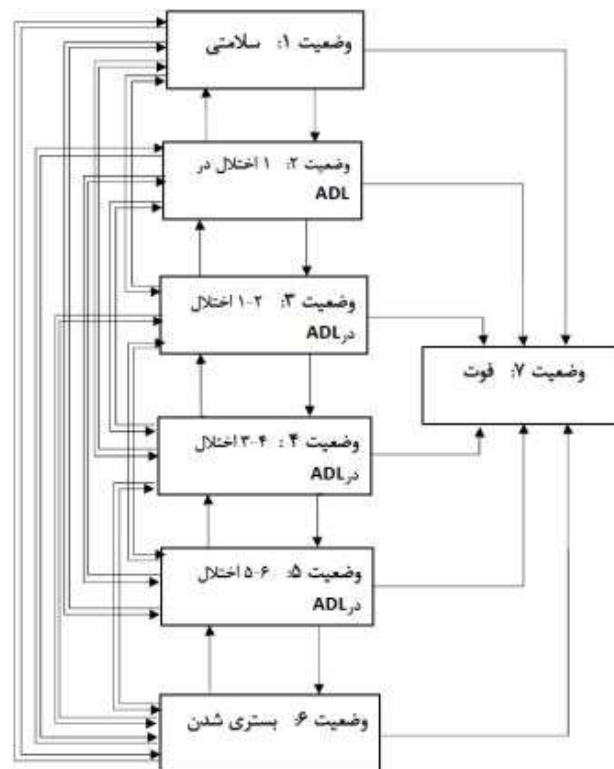
مراقبت بلندمدت و محصولات مستمری را بیشتر کرده است. به همین منظور شرکت‌های بیمه به منظور خدمت‌رسانی بهتر به افراد سالخورده و از کارافتاده‌ی جامعه محصولات جدیدی را ارائه کرده و به این ترتیب موجب کاهش هزینه‌های درمان افراد، افزایش رضایت آنان و به علاوه افزایش کارایی شرکت بیمه شده‌اند. اما به دلیل برخی اشتباهات عملیاتی و وجود مشکلات مالی محصولات بیمه مستمری و بیمه مراقبت بلند مدت به خوبی جوابگوی این موارد و نیازهای زیربنایی نبوده‌اند. همین امر سبب شده است که محصول ترکیبی از دو محصول مستمری و بیمه مراقبت بلندمدت به نام مستمری مراقبت عمر معرفی شود. مرتو و همکاران برای اولین بار در سال ۲۰۰۱ محصول ترکیبی حاصل از دو محصول بیمه مراقبت بلندمدت و مستمری‌ها را ارائه نمودند. براون و وارشاوسکی (۲۰۱۳) و وب (۲۰۰۹) نیز نشان دادند که مستمری مراقبت عمر می‌تواند در راستای کاهش رکود بازار محصول بیمه‌ای مراقبت بلند مدت به کار گرفته شود. به علاوه آنها نشان دادند که ترکیب این محصول بیمه‌ای ترکیبی مزیت‌های دیگری چون کاهش هزینه مراقبت بلند مدت و سهولت دسترسی خدمات بیمه‌ای برای عموم را در بر دارد.

در سال ۲۰۱۸ هاسی و همکاران محصول جدیدی ارائه کردند که از ترکیب بیمه مراقبت بلند مدت و مستمری متغیر همراه با الحاقیه مزایای قابل برداشت تضمین شده^{۱۰} حاصل می‌شود. پرداخت مزایای چنین محصولاتی با وضعیت سلامت بیمه‌گذار ارتباط مستقیم دارد و همین امر موجب می‌شود تا ارزیابی این محصولات بسیار پیچیده شود. در این مقاله ما محصول جدیدی را ارزشگذاری کرده‌ایم که علاوه بر الحاقیه مزایای قابل برداشت تضمین شده، خدمات بستری محدودی را نیز پوشش می‌دهد. در زیربخش ۱.۱ جزئیات محصول جدید معرفی شده و روش ارزشگذاری این محصول را مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت نیز در بخش ۲ نتایج عددی مربوط به شبیه‌سازی و ارزشگذاری محصول مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۱ خصوصیات محصول

قبل از توضیح خصوصیات مربوط به این محصول، فرض می‌کنیم که وضعیت جسمی و روحی فرد بیمه‌گذار به صورت شکل (۱) بوده و شدت انتقال از وضعیت‌ها بر اساس مقاله پریچارد [3] محاسبه می‌شود.

¹⁰ Guaranteed Lifetime Withdrawal Benefit



شکل ۱: وضعیت بیمه‌گذار برای این بیمه‌نامه

در ابتدای قرارداد فرض می‌کنیم که بیمه‌گذار در وضعیت سلامتی بوده و مبلغ w_0 را به بیمه‌گر می‌پردازد. بیمه‌گر نیز این مبلغ را در یک صندوق با میزان بازده مشخص $R(t)$ در سال t سرمایه‌گذاری کرده و هر سال هزینه‌های شرکت بیمه (هزینه‌های مدیریتی ثابت و هزینه مربوط به تضمین) و مزایای بیمه‌گذار (هزینه‌های پزشکی، هزینه‌های بستری برای تعداد روز متناهی و مزایای برداشت تضمین شده) را از حساب کسر کرده و به بیمه‌گذار می‌پردازد. این بیمه‌نامه زمانی منقضی می‌شود که فرد بیمه‌گذار فوت کند و یا اینکه حساب مذکور به صفر برسد. به عبارت دیگر بیمه‌گر

- در انتهای سال t $g_t = \beta w_0$ را به عنوان مزایای مستمری پراخت می‌کند. به علاوه در این زمان با توجه به وضعیت‌های سلامتی فرد بیمه‌گذار، یکی از مزایای بیمه مراقبت بلند مدت SB_t^x یا مزایای بستری محدود HB_t^x (تنها برای L روز) را نیز می‌پردازد.

- در ابتدای سال t ام، حق الزحمه تضمین شده αW_t^- و حق الزحمه مدیریتی ثابت M را از حساب برداشت می‌کند.

حال اگر $M_x(t)$ وضعیت سلامتی بیمه‌گذار را در زمان t نشان دهد، در این بیمه‌نامه فرض کرده‌ایم که مزایای پرداختی به بیمه‌گذار از سوی شرکت بیمه و در ازای خرید این محصول به صورت زیر است:

$$SB_t^x = 0I_{\{M_x(t)=1,2,3,6,7\}} + cw_0(1+\pi)^t I_{\{M_x(t)=4,5\}},$$

$$HB_t^x = \left(b_t T_t^x I_{\{0,D_x\}} + \left(\sum_{i=1}^{D_x} b_i L - \sum_{i=1}^{t-1} b_i T_i^x \right) I_{\{D_x\}} \right) I_{\{M_x(t)=6\}}, \quad (1)$$

به طوریکه c, π, b_t, T_t^x و D_x به ترتیب مقدار ثابت، نرخ تورم، مبلغ پرداختی برای بستری در سال t ام بیمه‌نامه، تعداد کل روزهای بستری تا سال t ام بیمه‌نامه و اولین زمانی که تعداد روزهای بستری به سقف خود (L روز) می‌رسد، هستند. به علاوه بازده سالانه صندوق سرمایه‌گذاری مشترک در سال t ام به صورت زیر در نظر گرفته شده است که T و B_t به ترتیب حرکت براونی استاندارد و باقیمانده عمر فرد بیمه‌گذار هستند:

$$R_t = \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \sigma (B_t - B_{t-1}) \right\}, t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

حال اگر ارزش حساب در زمان t و قبل از برداشت مزایا با نماد W_t^- نمایش داده شده و W_t^+ ارزش حساب در زمان t و بعد از برداشت باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} W_0^- &= w_0 \\ W_0^+ &= \max((1-\alpha)W_0^- - M, 0). \\ W_t^- &= R_t W_{t-1}^+, 1 = 1, 2, \dots, T \\ W_t^+ &= \max((1-\alpha)W_0^- - M - g_t - SB_t^x - HB_t^x, 0), t = 1, 2, \dots, T-1 \\ W_T^+ &= \max(g_T + SB_T^x + HB_T^x, W_T^-). \end{aligned} \quad (3)$$

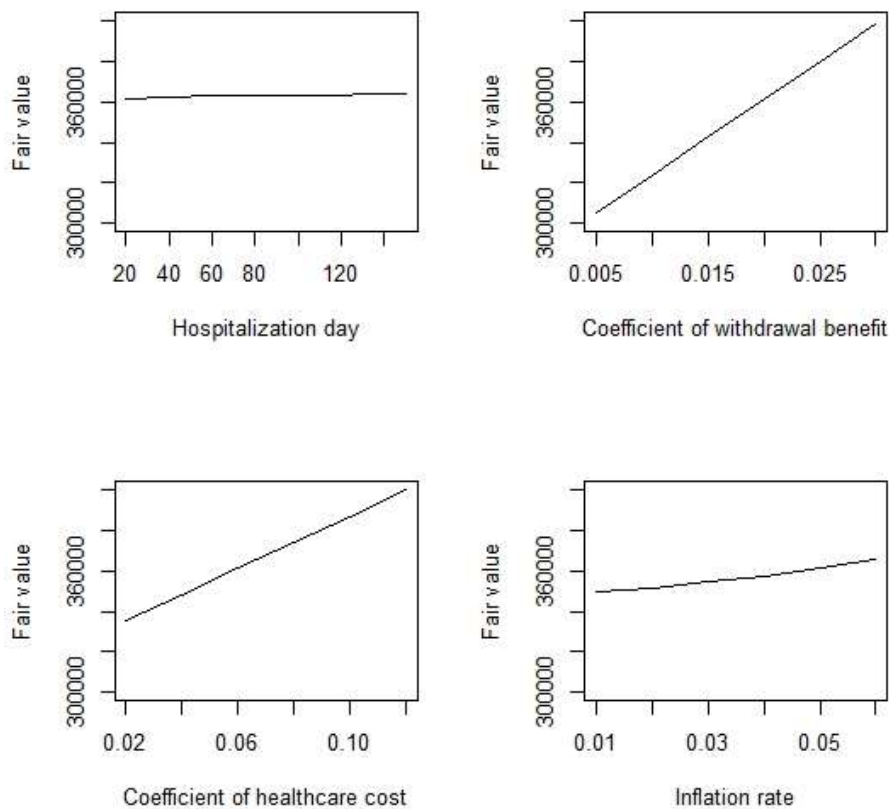
برای ارزشگذاری محصول کافی است عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$E_Q \left[\sum_{t=1}^T \frac{(g_T + SB_T^x + HB_T^x)}{B(t)} \right] + E_Q \left[\frac{\max(0, W_T^- - (g_T + SB_T^x + HB_T^x))}{B(T)} \right], \quad (4)$$

به طوریکه E_Q امیدریاضی تحت اندازه ریسک خنثی Q بوده و $B(t)$ ارزش حساب بازار پول با ارزش اولیه ۱ واحد در زمان t است.

۲ نتایج اساسی

با توجه به آنچه در بخش قبل توضیح داده شده، در این بخش نتایج عددی مربوط به ارزشگذاری محصول را ارائه می‌دهیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که مبلغ پرداختی برای هر روز بستری در بیمارستان و تعداد کل روزهای تحت پوشش به ترتیب برابر با ۱۰۰۰ و ۱۰ باشد. همچنین تعداد روزهای بستری T_t^x نیز از توزیع پواسن مرکب با نرخ ۰٫۳ و ۱۲٫۳ شبیه‌سازی شده است. به علاوه هزینه مدیریتی، حق‌الزحمه تضمین، C ، نرخ تورم و β به ترتیب ۳۰۰، ۰٫۰۰۸، ۰٫۰۶٪، ۰٫۵٪ و ۰٫۲٪ در نظر گرفته شده است. پارامتر میانگین و انحراف استاندارد موجود در رابطه ۲ نیز به ترتیب ۰٫۰۴ و ۰٫۱۶ در نظر گرفته شده است. شکل زیر میزان حساسیت ارزش منصفانه محصول را در برابر پارامترهای مربوطه نشان می‌دهد.



شکل ۲: تغییر ارزش منصفانه محصول در مقابل تغییر پارامترهای مهم روزهای بستری، ضریب مزایای برداشتنی، ضریب هزینه‌های درمان و نرخ تورم

همانطور که در شکل (۲) می‌بینیم، ارزش منصفانه محصول معرفی شده ارتباط مستقیم با تعداد روزهای بستری دارد. چرا که با افزایش روزهای بستری، تعهد بیمه‌گر نسبت به بیمه‌گذار بیشتر می‌شود و باید مزایای بیشتری به وی بپردازد. اینمطلب در خصوص ضریب مزایای مربوط به هزینه‌های پزشکی که در رابطه (۱) معرفی شده است نیز صادق است. علاوه بر این دو مورد، تاثیر ضریب مربوط به برداشت‌های تضمین شده و نرخ بهره نیز به صورت مستقیم بوده و با افزایش این موارد، ارزش منصفانه محصول نیز افزایش می‌یابد.

مرجع‌ها

1. M.-h., J. L. Hsieh, Y.-F. Wang, Chiu, and Y.-C. Chen , Valuation of variable long-term care annuities with guaranteed lifetime withdrawal benefits: A variance reduction approach. Insurance: Mathematics and Economics 78, (2018), 246–254.
2. D. C. Webb, Asymmetric Information, Long Term Care Insurance, and Annuities: The Case for Bundled Contracts. Journal of Risk Insurance, 76 (2009), 53-85.
3. D. Pritchard, Modeling disability in long-term care insurance, North American Actuarial Journal 10 (2006), 48–75.
4. C. M. Murtaugh, , B. C. Spillman, and M. J. Warshawsky, In sickness and in health: An annuity approach to financing long-term care and retirement income. Journal of Risk and Insurance, (2001), 225–253.

کاربرد نظریه گراف در دستور زایشی

ابراهیم بدخشان^۱، شهلا صیفوری^۲

^۱دانشیار گروه زبان‌شناسی دانشگاه کردستان ebadakhshan@uok.ac.ir

^۲دانشجوی کارشناسی ارشد زبان‌شناسی همگانی دانشگاه کردستان seifourish@yahoo.com

چکیده: مفاهیم و روش‌های ریاضی در تجزیه و تحلیل‌های دستور زایشی به صورت گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند و اساس الگوهای نظری چامسکی جهت «توصیف ساختار زبان» را تشکیل می‌دهند. هدف این مقاله مروری بر نظریه گراف در دستور زایشی است. پس از طرح مفهوم گراف به این نکته پرداخته می‌شود که در نحو زایشی به تبعیت از ریاضیات برای ایجاد ترتیب در اعضای مجموعه از ضرب‌های دکارتی در ایجاد زوج مرتب استفاده می‌شود و این عملیات در ساخت سلسله مراتبی برگرفته از نظریه گراف انجام می‌پذیرد. کاربرد ساختار سلسله مراتبی در تبیین‌های برنامه کمینه‌گرا در دستور زایشی مدلی مناسب است که چامسکی به کمک آن از عهده نسبی تجزیه و تحلیل ساخت جمله برآمده است این مطالعه سعی در مطرح نمودن کاربرد نظریه گراف در دستور زایشی را دارد. تجزیه و تحلیل سلسله مراتبی در واقع رویکرد تحلیلی یا قیاسی و رویکرد استقرایی یا سیستمی را باهم ترکیب می‌نماید. کاربرد مبانی ریاضیات در علوم انسانی خصوصاً در دستور زایشی موجبات درک و بسط هرچه بیشتر این حیطه را فراهم آورده است.

کلمات کلیدی: ریاضی، دستور زایشی، نظریه گراف

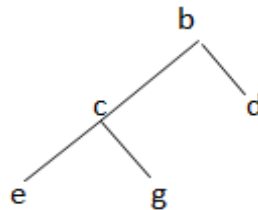
طبقه‌بندی موضوعی: طبقه‌بندی JEL:Z13

۱ مقدمه

مفاهیم و روش‌های ریاضی اساس الگوهای نظری چامسکی برای توصیف ساختار زبان‌شناسی را تشکیل می‌دهد به کارگیری روش‌ها و مفاهیم ریاضیات در دستور زایشی هر چه بیشتر این حیطه را با مباحث انتزاعی در هم می‌آمیزد. گاه درهم‌آمیختگی با مفاهیم انتزاعی در نحو زایشی به چنان درجه‌ای می‌رسد که از نظر یک مخاطب ناآشنا به مباحث پایه در ریاضیات نامفهوم به نظر می‌رسد. درک این انتزاع، نیازمند یک دانش پیش‌زمینه‌ای به مباحث پایه در زبان‌شناسی ریاضیاتی و کاربردی نمودن این مفاهیم در این حیطه است؛ بنابراین به طور پیش‌فرض این امکان وجود دارد که برخی از سازوکارهای مبتنی بر محتوا از حساب ریاضی یا دیگر رشته‌های ریاضی به

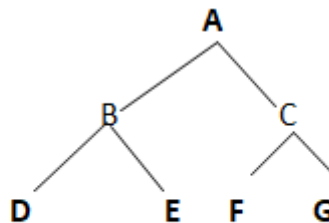
حوزه ساختار جمله منتقل شود (کارنی، ۲۰۱۱: ۲۹). بکار بستن مفاهیم و روش‌های ریاضی در نظام‌های زبانی یا در پدیده‌هایی که در زبان‌های طبیعی مشاهده می‌شود و یا کاربرد آن روش‌ها در الگوهای دستوری، ناشی از زبان‌شناسی ریاضیاتی است که چامسکی خود یکی از افرادی است که باعث توسعه این رشته با کاربرد روش‌های ریاضی در الگوهای دستوری در نحو زایشی شده است. دستور زبان پانینی (Pāṇini) مدت‌هاست توسط زبان‌شناسان به‌عنوان اولین دستور گشتاری^(۱) generative grammar در معنای مدرن شناخته‌شده است و این بینش را که زبان طبیعی به‌صورت بالقوه از امکان محدود توانایی تولید نامحدود را دارد وام‌دار ویلهلم فون هومبولت است و این تفکر توسط دستورنویس هندی پاتاجالی در حدود دو قرن قبل از میلاد نیز بیان‌شده است. زبان محاسباتی (computing language) را می‌توان این‌گونه تعریف کرد که زبان محاسباتی یک زبان محاسبه‌ای صوری است که قادر است به‌روشنی و صراحت قواعد محاسبات جهانی متعلق به برخی از زبان‌های صوری را از طریق یک فرا زبان بیان نماید با بسط قیاس‌های منطقی بلومفیلد (۱۹۲۶) دستگاه مفهومی پایه زبان‌شناسی ریاضی به‌ویژه ایده ساختارهای سلسله مراتبی بر اساس پدیده‌های واجی و ساختارهای توسعه یافت (پولوم و کرنای، ۲۰۰۳). به‌واسطه نیازهای داخلی زبان‌شناسی نظری و تکمیل ایده‌های اساسی آن و نیز مشکلات پردازش خودکار اطلاعات زبان‌شناختی، زبان‌شناسی ریاضیاتی رونق بیشتری گرفت و تقریباً منشأ زبان‌شناسی ریاضیاتی را می‌توان دهه ۱۹۵۰ دانست. پیچیدگی فرایندهای محاسباتی در بسیاری از مباحث زبان‌شناسی نظری، خصوصاً در دستور زایشی، زبان‌شناسان، ازجمله چامسکی را متمایل به استفاده هرچه بیشتر از ابزار زبان‌شناسی ریاضیاتی نموده است، یک‌زبان صوری با مجموعه‌ای از قاعده‌های موجود در آن زبان شناسایی می‌شود از طرفی نوام چامسکی، زبان‌شناس آمریکایی، در سال ۱۹۵۷ ایده گرامر مولد یا دستور زایشی را معرفی کرده است. این رویکرد به نحو در مطالعه ساختار جمله کاملاً صوری است بدین شکل که گرامر مولد چامسکی بر اساس نمادها و قواعد بنیان نهاده شده است. واضح است که در رویکرد چامسکی در دستور مولد یا دستور زایشی موردنظر جملات و کلمات را نمی‌توان به‌عنوان زبان دانست زیرا یک گرامر مولد باید از قوانینی پیروی نماید تا یک‌زبان نامیده شود. در نحو زایشی به تبعیت از ریاضیات با استفاده از ضرب‌های دکارتی بر روی ساخت سلسله مراتبی که از نظریه گراف در ریاضیات منشعب شده است و به نام ساخت سازه‌ای درخت مورد استفاده واقع می‌شود، زوج‌های مرتب ایجاد می‌شوند و موجبات ترتیب واژگان در مجموعه فراهم می‌شود و درواقع پروسه خطی شدن ساخت سلسله مراتبی شکل می‌گیرد. همان‌گونه که گفته شد ساخت سازه‌ای درختان متأثر از نظریه گراف در ریاضیات است. گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته است که اعضای آن به طریقی به هم مرتبط هستند. یک گراف تشکیل‌شده از رأس و یال؛ و با توجه به تعداد رأس‌ها و یال‌ها انواع متنوعی را در ریاضیات می‌توان برای آن متذکر شد. پس یک

گراف متشکل از مجموعه‌ای متناهی از یال‌ها و رأس‌ها است. یک گراف را همبند می‌گوییم اگر حداقل مسیری بین هر جفت رأس در آن گراف وجود داشته باشد. یک گراف هم بند بدون دور درخت نامیده می‌شود. انواع گراف درخت عبارت‌اند از: درخت ریشه‌دار: اگر یک رأس درخت به‌عنوان ریشه از سایر رأس‌های دیگر متمایز گردد درخت را ریشه‌دار گویند نمودار (الف).



نمودار (الف) یک درخت با ریشه b

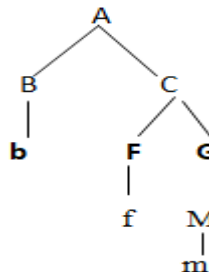
در دستور گشتاری استفاده از ساخت سلسله مراتبی کمک شایانی در توضیح و رفع ابهامات نحوی در جملات نموده است و اینکه ساختارهای نحوی به‌صورت سلسله مراتبی به سازهایی سازمان‌دهی شده‌اند. گراف‌ها عمدتاً با اشاره به دو مجموعه توصیف می‌شوند. مجموعه اول مجموعه‌ای از رأس‌ها است (نمودار ب). رئوس گره‌های برچسب دار در درخت هستند.



نمودار (ب) مجموعه رئوس و مجموعه حاشیه

در درخت (ب) مجموعه رئوس عبارت‌اند از $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. شاخه‌های درخت مجموعه دیگری را تشکیل می‌دهند کارنی (۲۰۱۰) این مجموعه را مجموعه حاشیه (edge set) نامیده است و این مجموعه به لحاظ جفت گره‌هایی که به‌وسیله شاخه‌ها به هم متصل می‌شوند تعریف می‌شود. در توجه به تسلط سازه‌ای در نمودار درختی، یک ترتیب در جفت‌ها مشاهده می‌شود؛ بنابراین جفت گره‌ها در مجموعه حاشیه زوج‌های مرتب در ساختار سلسله مراتبی می‌باشند (کارنی، ۲۰۱۰: ۴۹). زوج‌های مرتب در مجموعه حاشیه در نمودار (ب) عبارت‌اند از: $\langle B, E \rangle, \langle C, F \rangle, \langle C, G \rangle, \langle A, B \rangle, \langle A, C \rangle, \langle B, D \rangle$ در زوج‌های مرتب مذکور، عضو اول زوج مرتب در نمودار، بالاتر از عضو دوم است.

نمودار درختی (ج) را در نظر می‌گیریم:



می‌توان با استفاده از ضرب‌های دکارتی زوج‌های مرتب در مجموعه ایجاد کرد. ابتدا گره‌های غیر پایانی در هم ضرب داخلی می‌شود و حاصل ضرب دکارتی زوج‌های مرتب در مجموعه P خواهد بود و سپس گره‌های پایانی در هم ضرب دکارتی می‌شوند و نتیجه مجموعه زوج‌های مرتب در مجموعه Z خواهد بود. گفته شد جابجایی اعضا، مجموعه را تغییر نمی‌دهد اما در زوج مرتب جابجایی اعضا زوج مرتب آن را تغییر می‌دهد به عبارتی A ضربدر B با B ضربدر A مساوی نیست.

$$A \times B \neq B \times A$$

$$P = \langle B, F \rangle, \langle B, G \rangle, \langle B, M \rangle, \langle F, M \rangle$$

$$Z = \langle b, f \rangle, \langle b, m \rangle, \langle f, m \rangle$$

در دو مجموعه P و Z مختصه اول در زوج‌های مرتب تسلط سازه‌ای نامتقارن بر مختصه دوم دارند. کین (۱۹۹۴) به صورت گسترده در تبیین مفاهیم LCA از متدها و مفاهیم ریاضی از جمله ضرب‌های دکارتی و زوج‌های مرتب بهره جسته است (بدخشان و صیفوری، ۱۳۹۷). سه اصل اساسی در تفکر تحلیلی وجود دارد که یکی از آن‌ها اصل ترسیم درخت سلسله‌مراتب است. در انسان توانایی جهت درک موضوعات مختلف و تمییز دادن آن موضوعات و ارتباط دادن اجزای آن موضوعات موجود است و نظریه گراف به عنوان یک ابزار توانمند در علوم مختلف از جمله در دستور زایشی کاربرد دارد.

۲ نتایج اساسی

به طور کلی کاربرد هر نظریه ریاضی در هر مسئله واقعی مستلزم ساختن مدلی از آن مسئله به زبان ریاضیاتی است. درک چگونگی تناظر مفهومی از مدل با مفهومی متناظر از مسئله نیاز به درک هر دو زمینه از سوی شخصی دارد که کاربرد را انجام می‌دهد. اگر مسئله فیزیکی باشد باید بر حقایق فیزیکی که باید به آن‌ها ربط داده شود وقوف داشت. همچنین باید درک کرد که چه ارتباطی بین مفاهیم ریاضی وجود دارد تا بتوان تناظری بین این مفاهیم و مفاهیم فیزیکی برقرار کرد.

در صورتی که این تناظر بر اساس معنی و مفاهیم خاصی برقرار شده باشد، احتمالاً نتیجه به دست آمده در مدل ریاضی معنی و مفهوم فیزیکی خواهد داشت. اگر به دلیل این جنبه استفاده از مدل های ریاضی نبود، ریاضی سهم کمی در مسئله می داشت زیرا نمی توانست به حقیقت یا نتیجه تازه دست یابد (نرینگ، ۱۹۷۰، ۲۱۹). اشاره شد که کاربرد ساختار سلسله مراتبی در دستور زایشی مدلی مناسب است که چامسکی به کمک آن از عهده نسبی تجزیه و تحلیل ساخت جمله برآمده است. سازوکاری که جهت انتقال نتایج از سطوح بالا به پایین و برعکس، می تواند پاسخگو باشد. این سلسله مراتب ابزاری است که تفکیک اطلاعات را در سطح جمله در برمی گیرد. در واقع بهره بردن از نظریه گراف ریاضی در تجزیه و تحلیل ساختار جمله، سازوکار را برای چامسکی در جهت تفکیک اطلاعات در سطح جمله و انتقال نتایج از نحو محض به سطوح رابط را هموار نموده است. استفاده برنامه کمینه گرا از طراحی این نوع از سیستم سلسله مراتبی، مراحل مختلف صورت بندی نحو محض و کاربرد عملی طیف وسیعی از تجزیه و تحلیل های علمی را میسر نموده است و متعاقباً در برنامه ریزی خطی شدگی نمود انواع پارامترها و مشخصه های خاص آن ها فراهم شده است. سعی دستور زایشی در به کارگیری مدل های ریاضی برای حل مسائل ساختاری در جملات بوده است و بدین شکل نگرش کلی و مدیریت علمی در بخش نحو قویاً نمایان است. هدف این مقاله تجزیه و تحلیلی از کاربرد نظریه گراف در دستور زایشی بود که در برگیرنده هر دو نوع ساخت سلسله مراتبی و خطی است و همان گونه که اشاره شد ساخت سلسله مراتبی از نظریه گراف در ریاضیات منشعب شده و این خود شاهدهی بر این نکته است که بنیان نحو زایشی بر مبانی ریاضیات استوار است.

مرجع ها

۱. ا. بدخشان، ش. صیفوری، کاربرد ضرب های دکارتی در زبان شناسی، دهمین همایش بین المللی زبان شناسی / ایران، بخش پوستر همایش، تهران، دانشگاه علامه طباطبائی، ۱۳۹۷.
۲. پ. رشیدیان، نظریه گراف، ناشر دانشگاه کردستان، (۱۳۸۲).
3. N. Chomsky, *Syntactic structure*, Mouton, (1957).
4. N. Chomsky, *Knowledge of language: Its nature, origin, and use*, Greenwood Publishing Group (1986).
5. A. Carnie, *Constituent structure*. Vol. 5, Oxford University Press (2010).
6. G. K., Pullum, and A. Kornai. "Mathematical linguistics.", (2003): 17-20.
7. R. S., Kayne, *The antisymmetry of syntax*. No. 25, MIT Press, (1994).
8. E. D., Nering, *Linear algebra and matrix theory* (No. 04; QA251, N4, (1970)).

رهیافت‌های ارزش در معرض ریسک با استفاده از فیلتر نویسی برای مدیریت ریسک در بازار اوراق بهادار

مجتبی رضائی mojtabarezaee@gmail.com * کاظم نوری knouri@semnan.ac.ir
لیلا ترک‌زاده torkzadeh@semnan.ac.ir

دانشگاه سمنان، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

چکیده: انجام مدیریت ریسک برای بازده پرتفویهای مالی، انرژی و کالاهای انرژی یک ضرورت می‌باشد. با این حال، روش‌های موجود در مدیریت ریسک در بازارهای مالی، مانند GARCH و یا روش‌های مدیریت ریسک دیگری که وجود دارد، مخصوصاً در بازارهای انرژی دچار خطا می‌شود. بنابراین ضروری است که مدیریت ریسک انرژی روش‌های بهتری را برای نظارت و ارزیابی دقیق برای ارزش در معرض ریسک تعیین کنند. از آنجایی که هیچ روش خاصی نسبت به روش دیگر بهتر نبوده و برای این کار روش دقیق وجود ندارد، همواره روش‌های مختلف برای مدیریت ریسک بکار برده می‌شود. این روش‌ها با اینکه روش‌های خوبی هستند ولی همواره کاربرد آن برای عموم مردم بسیار دشوار است، برای بهبود و بازده بهتر، روش‌های ساده و موجود مانند روش پارامتریک و شبیه سازی تاریخی و چندین روش دیگر را با فیلتر نویسی ترکیب نموده و بررسی می‌کنیم که کدام روش برای کمینه سازی ریسک برای سرمایه گذاران، بازرگان و سرمایه گذاران خرد بر اساس راهبرد خود مناسب تر می‌باشد. هم‌چنین با استفاده از فیلتر نویسی مقدار ارزش در معرض ریسک و رویکردهای مرتبط با آن را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: کالاهای انرژی، مدیریت ریسک، ارزش در معرض ریسک (VaR)، فیلتر نویسی.

طبقه بندی موضوعی: K32, A32, D32

۱ مقدمه

برای رشد و شکوفایی بازارهای مالی هر کشور، نیاز به داشتن اوراق بهادار متنوع می‌باشد، از این رو در بیشتر کشورهای توسعه یافته، اوراق بهادار متنوعی وجود دارد، که در این بازارهای مالی

شرکت‌های بورسی به خدمات به سرمایه‌گذاران می‌پردازند و همواره نقدینگی‌های سرگردان که می‌تواند موجب ناهنجاری در کشور شود را جذب این بازارها می‌کنند.

با توسعه بازارهای مالی نیاز به عرضه اوراق مشتقه انرژی و اوراق دیگر برای بهبود پوشش ریسک برای سرمایه‌گذاران بسیار ضروری است، از آنجایی که تعداد ابزار مشتقه زیاد می‌شود تحلیل و نظارت بر نحوه‌ی رفتار قیمت‌های این ابزار نیاز به نیروی انسانی بسیار زیاد و همچنین یک کار زمان‌بر می‌باشد. با استفاده از فیلتر نویسی می‌توان بصورت لحظه‌ای این کار را انجام داد و خدمات متناسبی را ارائه نمود. هم‌چنین با استفاده از فیلتر می‌توان یک روش را برای کل بازار اوراق بهادار استفاده نمود.

۲ فیلتر نویسی

به علت وسیع بودن بازار سرمایه و زیاد بودن تعداد شرکت‌های بورسی و هم‌چنین وجود اوراق مشتقه‌ی فراوان زیر نظر گرفتن تمامی بازار سرمایه بسیار مشکل است. برای از بین بردن این مشکل سایت اوراق بهادار ویژگی فیلتر نویسی را به قسمت دیدبان اضافه نموده است، که می‌توان با استفاده از این قسمت ویژگی‌ها و پارامترهایی که لازم است، به بازار سرمایه اشراف داشت و از آن استفاده نمود.

۲-۱ ترکیب ارزش در معرض ریسک (VaR) و فیلتر نویسی

یکی از مسائل مهم و ضروری [1] برای سرمایه‌گذاران، بازرگانان و تولیدکنندگان محاسبه‌ی میزان ریسک فعالیت خود به صورت کمی می‌باشد. یکی از رویکردهای مهم و کاربردی برای فعالیت در بازارهای سرمایه هر کشور VaR می‌باشد، زیر VaR می‌تواند میزان ریسک اوراق مشتقه را به صورت کمی و به واحد پول بیان کند. روش‌های متنوعی وجود دارد که به محاسبه ریسک در شرایط مختلف می‌پردازد. هم‌چنین تمامی این روش‌ها ممکن است همواره با خطا همراه شود، و هیچ روشی بهتر از روش دیگر نمی‌باشد. سعی می‌کنیم با استفاده از فیلتر نویسی و با استفاده از پارامتر بازده روزانه، میزان VaR را با سه روش مختلف محاسبه کنیم. از آنجایی که میزان اطلاعات موجود در سایت اوراق بهادار شصت روز می‌باشد، پس نمی‌توان به اطلاعات آنلاین بیش از شصت روز کاری دسترسی داشته باشیم. یکی از روش‌های محاسبه‌ی VaR محاسبه‌ی میزان تغییر پذیری اوراق مشتقه می‌باشد، که می‌توان این مقدار را با استفاده از فیلتر نویسی روی سایت

اوراق بهادار محاسبه نمود و تغییر پذیری شصت روزه را بدست آورد. فرمول محاسبه بازده‌های

روزانه $u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$ و مقدار تغییرپذیری به صورت زیر است:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2 \quad (۱.۰)$$

پس از محاسبه‌ی میزان تغییر پذیری مقدار VaR را با توجه به سطح اطمینان مورد نظر می‌توان از فرمول زیر بدست آورد:

$$VaR = Z_\alpha \times \sigma \times \sqrt{t} \quad (۲.۰)$$

یکی از معایب روش بالا، تأثیر برابر بازدهای قدیمی و جدید به یک اندازه می‌باشد. حال سعی می‌کنیم داده‌های خود را به گروه‌های ده تایی تقسیم نموده و به محاسبه ارزش در معرض ریسک بپردازیم. در این صورت تأثیر دادهای جدید بیشتر از قبل بوده و محاسبه‌ی مقدار VaR شصت روزه به شکل بهتری انجام می‌شود. هم‌چنین در روش سوم، روش خاص از میانگین متحرک موزون نمایی (EWMA) استفاده می‌کنیم. و از فرمول زیر میزان تغییر پذیری را محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda) u_{n-1}^2 \quad (۳.۰)$$

حال تمامی این روش‌ها را با استفاده از فیلتر نویسی، فیلتر نموده و خروجی خود را در قسمت دیدبان برای گروه‌های مختلف در جدول ۱ نمایش می‌دهیم.

۲-۲ ترکیب فیلتر نویسی و ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR)

یکی از مسائل مهم برای سرمایه گذاران [2] ارزش در معرض ریسک شرطی CVaR می‌باشد. با استفاده از فیلتر نویسی می‌توان هر شرط دلخواه را برای محاسبه‌ی VaR شصت روزه بکار برد. با توجه به تعاریف در قسمت‌های قبل و شرط پنج روزه صف فروش و ریزش ۱۵ درصدی در یک روزه را به فیلتر اضافه نموده و خروجی را در جدول ۲ نمایش می‌دهیم، هم‌چنین می‌توان هر شرط دلخواهی را به این قسمت اضافه نمود.

جدول ۱: محاسبه VaR با استفاده از سه روش بالا برای گروه فرآورده‌های نفتی، کرک و

سوخت هسته ای

نماد	روش اول	روش دوم	روش سوم
شبه‌رنت	12.81	24.55	25.81
ونفت	19.13	28.70	29.96
شیاوان	23.10	29.42	29.24
شپنا	17.87	30.68	33.39
شنتفت	11.01	18.77	20.57
شتراز	21.12	22.38	21.84
شپاس	13.54	22.74	22.92
شپندر	16.06	31.04	35.01
شترانل	19.67	26.89	28.70
شیریز	16.06	31.22	34.29
شتران	18.05	29.60	33.03
شسپا	15.16	24.73	29.06

جدول ۲: محاسبه ارزش در معرض ریسک شرطی CVaR برای گروه فرآورده‌های نفتی

نماد	روش اول	روش دوم	روش سوم
شبه‌رنت	45.66	49.81	67.32
ونفت	47.65	51.80	68.58
شیاوان	49.09	52.16	68.94
شپنا	NaN	52.70	69.30
شنتفت	45.30	47.47	65.70
شتراز	48.37	48.91	66.60
شپاس	45.84	49.09	66.78
شپندر	46.56	52.88	69.49
شترانل	47.83	50.90	68.04
شیریز	46.56	52.88	69.49
شتران	47.29	52.16	68.94
شسپا	46.38	49.81	67.32

۳ ترکیب درآمد در معرض ریسک (EaR) و جریان‌ات نقدی در معرض

ریسک (CFaR) و فیلتر نویسی

یکی دیگر از مسائل مهم درآمد در معرض ریسک EaR می‌باشد [3]، زیرا بسیاری از سرمایه‌گذاران و سهام‌داران به دنبال دریافت سود سالانه هستند. با ترکیب p/e و فیلتر نویسی و VaR می‌توان فیلتر را گسترش داد و فیلتر را برای سهم‌هایی که p/e کمتری دارند محاسبه نمود (جدول ۳). هم‌چنین یکی از مسائل مهم، جریان‌ات نقدی در معرض ریسک CFaR است که می‌توان با ترکیب فیلتر نویسی و رفتار سرمایه‌گذاران به اطلاعات دلخواه رسید [4]، پیاده‌سازی برای برخی سهام دلخواه در جدول ۴ قابل مشاهده است. هم‌چنین این روش بستگی به استراتژی معاملاتی و سرمایه‌گذاری افراد داشته، زیرا هر فرد پارامترها و ویژگی‌های خاصی را همواره برای سرمایه‌گذاری مفید می‌داند.

جدول ۳: محاسبه درآمد در معرض ریسک EaR برای سهم‌هایی که p/e کمتر از ۴ دارند.

نماد	روش اول	روش دوم	روش سوم
خیابان	5.96	19.13	18.63
وویا	12.76	25.20	29.24
وسکاب	9.35	17.69	19.83
وتوسم	12.89	22.93	22.93
وبوعلی	11.67	18.69	20.57
حقاری	14.28	22.30	23.90
صبا	15.11	25.07	28.56
وضعت	11.69	20.61	21.93
پترول	10.80	15.84	18.00
وستمازن	0.00	1.11	1.11
وگستر	15.93	22.24	23.29
وستخراش	0.00	0.00	0.00
وسلرستا	3.67	2.18	2.18

جدول ۴: محاسبه جریان‌ات نقدی در معرض ریسک CFaR برای سهم‌های دلخواه با توجه به

رفتار سرمایه‌گذاران

نماد	روش اول	روش دوم	روش سوم
شام	8.97	11.88	12.38
خكمك	9.98	20.09	19.58
كفارس	10.61	18.32	17.94
قنقش	1.26	3.54	3.54
مداران	11.50	19.08	20.47
بهباك	14.53	19.20	20.72
بزاگرس	11.88	19.58	19.46
غفارس	10.99	16.80	16.68
فالوم	10.23	18.82	19.83

نتایج: رصد نمودن مطلوب بازار سرمایه مستلزم هزینه زمانی بسیار زیاد و ناشدنی است، استفاده از فیلترنویسی این امر را امکان پذیر می سازد. از آنجایی که این فیلترها همیشگی بوده و همواره سایت آن‌ها را به روز می کند، بسیار کاربردی بوده و بر اساس رفتار و اتفاقات قیمتی، مقدار کمی آن تغییر پیدا می کند. هم چنین با استفاده از زبان های برنامه نویسی پیشرفته تر می توان آن را گسترش داد و به محاسبه بلند مدت و روش های پیچیده تر پرداخت. یکی از امکانات ویژه ارسال هم زمان مقادیر محاسبه شده به صفحات اجتماعی برای استفاده عموم مردم می باشد.

مرجع ها

1. G.E. Halkos, A.S. Tsirivis, Value-at-risk methodologies for effective energy portfolio risk management, Economic Analysis and Policy 62 (2019), 197-212.
2. R.T. Rockafellar, S. Uryasev, Optimization of conditional value-at-risk, Journal of Risk 2 (2000), 21-42.
3. M. Denton, A. Palmer, R. Masiello, P. Skantze, Managing market risk in energy, IEEE Transactions on Power Systems 18 (2003), 494-502.
4. G. Louis, S. Kristina, Cash flow at risk for non financial companies, Global Energy Business 6 (2001), 12-14.

بررسی مدل‌های سری‌های زمانی و شبکه‌های عصبی در پیش‌بینی مصرف گاز، مطالعه موردی: شهر ارومیه

هانه نیلی^{۱*}، پریسا نباتی^۲

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران

^۲ استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران. p.nabati@uut.ac.ir

چکیده:

هدف مطالعه حاضر، افزایش قدرت پیش‌بینی مصرف و تقاضای گاز به دنبال افزایش قدرت مدیریت ریسک و افزایش دقت در پیش‌بینی مقدار مصرف گاز در این شهر می‌باشد. بدین منظور، از داده‌های آماری ماهانه طی سال‌های ۱۳۹۲-۱۳۹۶، و از مدل‌های اقتصادسنجی و هوش مصنوعی همچون شبکه‌های عصبی مصرف گاز در شهر ارومیه، استفاده شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که معیارهای خطای شبکه‌های عصبی پژوهش به عنوان بهترین مدل‌های پیش‌بینی‌کننده مصرف گاز در شهر ارومیه می‌باشند. انتخاب مدل برتر پیش‌بینی مقدار مصرف گاز از مدل شبکه عصبی GMDH توسط متخصصان حرفه‌ای حوزه سوخت، به منظور کاهش ریسک و مدیریت مصرف در فصل‌های مهم سال شهر ارومیه و دیگر شهرها از پیشنهادهای اساسی این مقاله می‌باشد.

کلمات کلیدی: ارومیه، شبکه عصبی، مصرف گاز، مدل‌های ARIMA و GMDH

طبقه بندی موضوعی: F47، Q47، C01.

۱ مقدمه

رشد و توسعه اقتصادی کشور از مهم‌ترین شاخص‌های عملکردی اقتصاد کلان است و دستیابی به نرخ رشد اقتصادی بالا و پایدار از جمله اهداف مهم هر نظام اقتصادی به شمار می‌رود. یکی از مهم‌ترین ارکان اصلی رشد و توسعه هر کشور و چرخه اقتصادی آن بخش انرژی است. از مهم‌ترین اهداف هر کشور به خصوص کشورهای توسعه یافته مدیریت این منابع انرژی است. نیاز به مدیریت صحیح و همچنین پیش‌بینی مقادیر مصرف و تولید انرژی از فعالیت‌های اصلی مدیریت انرژی است. عمده‌ترین شکل انرژی در جهان انرژی‌های فسیلی هستند، این انرژی‌ها با وجود

* سخنران

ذخیره زیاد در کشورهای خاورمیانه تجدیدپذیر نمی‌باشند بنابراین بر مدیریت صحیح این منابع افزوده خواهد شد. گاز از مهم‌ترین این منابع است که با توجه به نو بودن و علاوه بر آن عدم آلاینده‌گی کمتر نسبت به نفت و مشتقات آن از اولویت خاصی در مدیریت انرژی در سطح کلان برخوردار است. یکی از مسائل مهم اقتصادی ایران نقش مهم گاز در رشد و توسعه‌ی کشور است. این منبع مهم سوختی با وجود صادرات در داخل کشور علاوه بر مصرف در صنعت در مصرف خانگی نیز نقش اساسی دارد.

از موارد مهم در مدیریت مصرف گاز در سطح کشور و در هر کشوری که دارای منابع و ذخایر انرژی هستند، پیش‌بینی مقادیر مصرف در هر سطحی اعم از خانگی و صنعتی است. زیرا با توجه به اقلیم چند فصلی در ایران و وجود زمستان‌های سرد در مناطق انتهایی خطوط انتقال گاز توجه بیشتر بر پیش‌بینی و مدیریت انتقال سوخت به این نقاط حائز اهمیت است. همچنین در نظر گرفتن عوامل مهم تاثیرگذار، ارائه مدل‌های مناسب در راستای مدیریت صحیح این منبع مهم دارای اهمیت است.

با عنایت به مسائل مهم در مصرف و پیش‌بینی مقادیر مصرف گاز بخش قابل توجهی از مطالعات تجربی داخلی و خارجی در این زمینه وجود دارد. در این خصوص می‌توان به مطالعات داخلی و خارجی انجام شده توسط ابریشمی و همکاران (۱۳۹۳) [۱]، داغبندان و ستایش (۱۳۹۵) [۲]، شیخ و همکاران (۲۰۱۷) [۳] و تامبا و همکاران (۲۰۱۸) [۴] که به پیش‌بینی تقاضای گاز طبیعی پرداختند اشاره کرد. با این وجود، براساس بررسی انجام شده، وجه تمایز مطالعه حاضر با پژوهش‌های خارجی و داخلی مرتبط با مصرف و پیش‌بینی مقادیر مصرف گاز، ارائه مدل مناسب جهت پیش‌بینی و بررسی قابلیت مدل‌های مختلف سری زمانی می‌باشد.

۲ مدل ریاضی

مهم‌ترین روش‌های پیش‌بینی عبارتند از، مدل‌های کیفی، سببی و سری زمانی. یکی از معروف‌ترین روش‌های مدل‌سازی در اقتصادسنجی و سری زمانی روش خودرگرسیون میانگین متحرک انباشته (ARMA) است که معادله‌ی آن به شرح زیر است:

$$x_t = \mu + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1)$$

در رابطه مشخص شده، x_t نشان‌دهنده متغیر وابسته در زمان t ، x_{t-1} نشان‌دهنده متغیر

وابسته در زمان $t-1$ ، θ و ϕ نشان‌دهنده ضرایب متغیرهای مستقل، ε_t نشان‌دهنده میزان خطا در

زمان t است و p و q نیز نشان‌دهنده درجه مدل و در عین حال گویای میزان تأثیر در اثرپذیری متغیرهای مستقل است.

الگوی ARFIMA برای سری زمانی نامتناهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(L)(1-L)^d(x_t) = \theta(L)\varepsilon_t \quad (2)$$

که در آن ε_t نوفه سفید است. L عملگر وقفه و $(1-L)^d$ عملگر تفاضل‌گیری کسری است و $d \in (-0.5, 0.5)$ است. شرط لازم و کافی برای اینکه به توان سری $\{x_t\}$ را دارای یک فرآیند ARFIMA دانست این است که $(1-L)^d(x_t)$ یک فرآیند ARIMA باشد.

شکل کلی مدل SARIMA به صورت رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود.

$$\phi_p(B)\gamma_p B^S \nabla^d x_t = \theta_q B \varphi_q(B^S) \partial_t \quad (3)$$

در رابطه فوق B بیانگر عملگر انتقال پسرو است که بر روی زمان عمل می‌نماید که به اندازه

یک واحد زمانی به عقب می‌برد تا سری زمان جدیدی را تشکیل دهد و به صورت

$(B)X_t = X_{t-1}$ تعریف شود. پارامترهای $\gamma_p, \theta_q, \phi_p$ به ترتیب چند جمله‌ایهایی با مرتبه p, q, P هستند. ضرایب p و q به ترتیب مرتبه غیر فصلی و P و Q مرتبه فصلی بخش‌های اتو رگرسیون و میانگین متحرک را نشان می‌دهند.

فرآیند سری زمانی ساختاری (STSM) نیز به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$Q_t = \alpha + \beta_t + z_t \delta + \varepsilon_t \quad (4)$$

در این رابطه متغیر وابسته به عنوان رگرسیون از روند زمان و مجموعه‌ای از متغیرهای دامی (مجازی) تولید شده است و متغیر مستقل تابعی از زمان است و پارامترهای مدل متغیر با زمان می‌باشند. (هاروی و شفارد، ۱۹۹۳).

مبنای ریاضی الگوریتم GMDH یا روش سازماندهی کردن داده بر اساس تجزیه سری توابع ولترا به چند جمله‌ای های دو متغیر با درجه دوم تجزیه شده است.

$$G(x_i, x_j) = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_j^2 + a_4x_i^2 + a_5x_ix_j \quad (5)$$

در این تجزیه، سری ولترا به دسته‌ای از معادلات بازگشتی زنجیره‌ای تبدیل شده است. به این شکل که مجدداً با جایگزین کردن جبری هر یک از روابط بازگشتی در یکدیگر، این رابطه برقرار می‌شود. در واقع هدف این الگوریتم یافتن ضرایب مجهول در سری توابع ولترا می باشد. بدین منظور با تجزیه آن به چند جمله‌ای‌های درجه دوم و دومتغیره این ضرایب مجهول در عوامل تجزیه شده گسترده می‌شوند و بدین ترتیب ضرایب مجهول در این چند جمله‌ای‌ها با درجه دوم تخمین زده می‌شوند.

۳ نتایج اساسی

در این پژوهش پیش بینی مصرف گاز با استفاده از داده‌های جمع آوری شده از نمونه آماری شامل ۴ سال مصرف گاز در شهر ارومیه به صورت ماهانه در دوره زمانی ۱۳۹۲-۱۳۹۶ بررسی شده است. روش آزمون در مطالعه حاضر روش داده‌های سری زمانی می‌باشد. ابتدا به منظور کسب شناخت بیشتر درباره جامعه آماری و متغیرهای مورد مطالعه، آمار توصیفی متغیرهای تحقیق و نرمال بودن توزیع متغیرهای وابسته آزمون می‌گردد. نتایج نشان دهنده ی این است که میانگین داده‌های مصرف گاز در شهر ارومیه برابر ۱۸۶۰۰۰۰۰۰ است. بر اساس آمار توصیفی داده‌ی کشیدگی و چولگی پژوهش و همچنین آماره احتمال آزمون‌های جاک و برا و کلموگروف اسمرینوف دادی مورد پژوهش نرمال نمی‌باشد.

۳-۱ آزمون مانایی

پیش از برآورد الگو، لازم است مانایی تمام متغیرهای مورد استفاده در تخمین‌ها آزمون شود. زیرا نامانایی متغیرها چه در مورد سری زمانی و چه داده‌های تابلویی باعث بروز مشکل رگرسیون کاذب می‌شود. برای این منظور از آزمون ایستایی دیکی- فولر تعمیم یافته (ADF)، فیلپس پرون استفاده شده است. نتایج حاصله در جدول ۳-۱ ارائه شده است.

جدول ۳-۱ آزمون مانایی

آزمون	مقدار آماره	احتمال آماره	نتیجه
-------	-------------	--------------	-------

مانا	۰/۰۰۰۲	-۱۰/۷۰۸۴۳	ADF
مانا	۰/۰۰۰۳	-۱۸/۲۹۶۶۷	P-P

منبع: یافته های پژوهش

با توجه به اطلاعات جدول ۳-۱ وجود ریشه واحد در متغیرهای مدل رد شده است و متغیرها در سطح اطمینان ۹۹ درصد مانا هستند.

۳-۲ مقایسه مدل های پیش بینی مصرف گاز شهر ارومیه با معیارهای مقایسه ای

بعد از تعیین وقفه بهینه مناسب و تخمین مدل Stsm نتایج حاصل از پیش بینی تمامی روش ها و همچنین نتایج حاصل از هر یک از معیارهای ارزیابی که به صورت جداگانه برای هر مدل محاسبه شده است، در حالت بهینه با هم مقایسه گردیده است. نتایج به طور خلاصه در جدول ۳-۲ ارائه شده است.

جدول ۳-۲ نتایج حاصل از پیش بینی

مدل	S.D Error	RMSE	MSE	MAPE*
ARMA	۲۱۱۳۸۵۳۶	۲۰۹۹۶۵۸۰	۱۶۸۲۵۸۶۷	۹/۶۹۱۵
ARFIMA	۱۲۸۴۵۰۰۰	۲۴۶۴۶۸۳۹	۲۱۰۴۹۷۱۶	۱۰/۴۶۸۶
SARIMA	۲۵۰۱۱۲۲۷	۲۴۷۲۸۳۸۲	۲۰۵۴۳۳۸۴	۱۱/۶۶۳۳
STSM	۱۴۳۹۰۰۷۸	۲۶۲۶۵۹۰۹	۲۲۲۳۳۴۸۳	۱۱/۸۶۷
GMDH	۶۰۲۰۵۴۳	۵۹۵۴۷۸۳	-	۰/۰۰۰۶۷
NN2	۲۰۴۶۳۷۱۴	۲۵۱۶۵۲۴۰	-	۰/۰۸۰۸

منبع: یافته های پژوهش

نتایج و ارقام حاصل از معیارهای ارزیابی برای هر یک از روش ها و مدل های پیش بینی نشان می دهد که رویکرد پیش بینی داده سری زمانی پژوهش با استفاده از شبکه عصبی GMDH عملکرد بهتری نسبت به دیگر مدل های سری زمانی مورد استفاده در پژوهش را دارد.

* Mean Absolute Percentage Error

همان طور که در جدول بالا مشاهده می شود، مقادیر $MAPE$ و MSE ، $RMSE$ ، $S.D Error$ برای شبکه عصبی $GMDH$ از تمامی مدل های پژوهش کمتر است. بنابراین با توجه به معیارهای ارزیابی که کمتر بودن آنها حاکی از بهتر بودن عملکرد مدل در پیش بینی مصرف گاز است شبکه عصبی $GMDH$ از تمامی مدل های پژوهش عملکرد بهتری داشته است. همچنین با توجه به معیارهای ارزیابی فوق مدل $STSM$ بدترین عملکرد را در پیش بینی مصرف گاز در شهر ارومیه داشته است؛ زیرا معیارهای ارزیابی این مدل از بقیه مقدار بیشتری را به خود اختصاص داده اند. بنابراین نتایج مدل های عصبی در مقایسه با مدل های ریاضی و اقتصادسنجی نشان دهنده ی این است که مدل هایی با پیش بینی غیرخطی نسبت به مدل هایی با پیش بینی خطی مناسب تر می باشد. لازم به ذکر است که برای استفاده از روش شبکه عصبی در کارهای عملی نیاز به روز کردن به منظور پیش بینی دقیق و بررسی تغییرات جدید است زیرا این روش از طریق آموزش و یادگیری از داده های قبلی شکل می گیرد.

مرجع ها

۱. ابریشمی، حمید، جبل عاملی، فرخنده، ابولحسنی، معصومه، جوان، افشین. (۱۳۹۳). عملکرد دو روش $ARIMA$ و شبکه عصبی $GMDH$ در پیش بینی تقاضای گاز طبیعی در بخش های مختلف ایران. فصلنامه علمی پژوهشی مطالعات اقتصاد کاربردی ایران. شماره ۱۲، ۳۳-۵۷.
۲. داغیندان، الهیار، ستایش، نسا. (۱۳۹۵). مدل سازی و پیش بینی میزان مصرف گاز طبیعی به کمک شبکه عصبی $GMDH$ چند هدفی مطالعه موردی شرکت گاز شهر رشت. نشریه انرژی ایران. شماره ۱۹، ۱۳۳-۱۴۸.
3. F., Ji, Q, Shaikh, P., Shaikh, N., Mirjat, M. Uqaili, Forecasting China's natural gas demand based on optimised nonlinear grey models. Energy. Vol 140(2017), 941-951.
4. J., G, Tamba, S., Ndjakomo, E.F., Sapnken, F.D. Koffi, J., L, Nsouandele, B, Soldo, D., Njomo, Forecasting natural gas: A literature survey. International Journal of Energy Economics and Policy. 8.(2018) 216-249.

رویکرد جدید تصادفی برای شبیه سازی بازارهای مالی

با نوسانات زیاد

پریسا نباتی^۱، مینا محمدی^{۲*}

۱. استادیار گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ایران

۲. کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه، ایران

چکیده: در این مقاله یک مدل جدید توسعه یافته برای برآورد نوسانات تصادفی بازارهای مالی با استفاده از مدل ارنشتاین-آهلبگ ترکیبی با نویز لوی مورد بررسی قرار می گیرد. فرایند مذکور فرایند ارنشتاین آهلبگ گاما نامیده می شود که کلاسی از فرایندهای زمان پیوسته لوی می باشد و دارای رفتاری با حافظه بلند مدت است (زیرا مدل دارای خاصیت مارکف نیست). این مدل اجازه می دهد تا پارامترهای نوسان یک توزیع خود تجزیه پذیر باشند. برآورد پارامترهای مدل با استفاده از روش حداکثر درستنمایی صورت می گیرد. برای نشان دادن کارایی مدل ارائه شده، معادله دیفرانسیل مورد نظر را برای برخی از مهم ترین بازارهای سهام ایران (سایپا آذین) بکار برده و شبیه سازی عددی شرکت سایپا آذین با تخمین پارامترهای فرایند ارنشتاین-آهلبگ با نویز گاما توسط داده های واقعی ارایه می گردد. نتایج شبیه سازی عددی با برنامه متلب نشان می دهد مدل ارائه شده دارای دقت بالایی می باشد و از آن می توان در سایر بازارهای مالی نیز استفاده نمود.

کلمات کلیدی: بازارهای مالی، فرایند لوی، مدل های سری زمانی، مدل ارنشتاین-آهلبگ

طبقه بندی موضوعی: 62M05, 62G20, 62F10

۱ مقدمه

بازار مالی، برای افراد همیشه به عنوان ابزاری برای افزایش ثروت جذاب بوده و کسانی که پیش بینی های دقیقی می کنند از آن سود می برند. در اینجا ما، یک ترکیب از فرایند لوی و فرایند ارنشتاین-آهلبگ را ارائه می دهیم. فرایند ارنشتاین-آهلبگ، یک فرایند گاوس-مارکف (فرایندی با مشخصات گاوسی و مارکوف) ایستا بوده و تنها فرایند غیر جزئی است که سه شرط فرایندهای گاوس-مارکوف را در نظر می گیرد و تبدیلات خطی فضا و زمان را ممکن می سازد. در طول زمان این فرایند به میانگین طولانی مدت خود میل می کند لذا به این فرایندها، فرایند بازگشت به میانگین می گویند. [1]

در این مقاله یک تکنیک برای پیش بینی سری زمانی مالی با استفاده از مدل تصادفی ارنشتاین آهلنبرگ ارائه می-دهیم. با استفاده از قیمت بسته شدن بازارهای سهام (که در آن داده های واقعی بازار از [2] گرفته می شود) نتیجه می-گیریم مدل تصادفی ارنشتاین آهلنبرگ با پارامترهای وابسته به زمان به طور قابل توجهی عملکرد پیش بینی قیمت سهام را بهبود می بخشد. ما از یک معادله دیفرانسیل تصادفی که ترکیبی از دو فرایند مستقل ارنشتاین آهلنبرگ است برای شبیه سازی داده های سری زمانی استفاده می-کنیم [3,4]. این مدل تصادفی رفتار فیزیکی داده ها را در نظر می-گیرد. در نهایت، ما یک برآورد خوب برای قیمت های شبیه سازی شده شرکت سایپا آذین به دست می-آوریم. همچنین، با استفاده از نتایج عددی نشان می-دهیم که نوسان پیش بینی شده این شرکت نزدیک به نوسان شبیه سازی شده می-باشد که در آن دینامیک نوسان از یک مدل خودهمبسته پیروی می-کند [5,6,8].

۲ مدل ارنشتاین آهلنبرگ گاما با نویز لوی

فرض کنید S_t قیمت کالا در زمان t باشد. معادله دیفرانسیل تصادفی ارنشتاین آهلنبرگ (OU) به صورت زیر باشد:

$$ds_t = -\lambda s_t dt + dz_{\lambda t} \quad s_t > 0 \quad (1.2)$$

که در آن $Z = \{z_{\lambda t}\}$ یک فرآیند پواسن مرکب $\Gamma(a, b)$ با شدت λ است. حل تحلیلی معادله (1.2) به صورت زیر است.

$$s_t = e^{-\lambda t} s_0 + \int_0^t e^{-\lambda(t-q)} dz(\lambda q) \quad (2.2)$$

در مدل توسعه یافته در این مقاله، مجموع دو مدل (OU) به صورت زیر در نظر گرفته می-شود.

$$(3.2)$$

$$s_t = w_1 s_1 e^{-\lambda_1 t} + \int_0^t w_1 e^{-\lambda_1(t-q)} dz(\lambda_1 q) + w_2 s_2 e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t w_2 e^{-\lambda_2(t-q)} dz(\lambda_2 q)$$

هدف تخمین پارامترهای مدل با استفاده از مشاهدات واقعی s_t است.

۲-۱ برآورد پارامترهای مدل

در این بخش تخمین پارامترهای توزیع $\Gamma(a, b)$ و λ را از معادله (3,2) برآورد می-کنیم. قبل از تخمین، یک اندازه لوی را بیان می-کنیم. اگر F_z اندازه لوی (۱) Z باشد فرض می-کنیم که یک ثابت مانند $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\int_{|x|>0} e^{v \cdot x} F_z(dx) < \infty, \text{ for all } |v| \leq M \quad (4.2)$$

گزاره زیر گشتاور نظری $Z(1)$ را با گشتاور نظری توزیع مانا $\{S_t\}_{t \geq 0}$ مرتبط می‌کند.

گزاره ۲,۱. فرض کنی $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند لوی باشد به طوری که

$$E(Z(1)) = \mu < \infty, \text{Var}(Z(1)) = \sigma^2 < \infty$$

M یک ثابت بزرگ باشد که در معادله (4.2) صدق می‌کند و $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ آن گاه درستی عبارت های زیر را داریم:

$$[v] \quad \text{الف)} \quad E(S_t) = \mu \quad \text{ب)} \quad \text{Var}(S_t) = \frac{\sigma^2}{t} \quad (5.2)$$

از گزاره (1,2) پارامتر های a و b مرتبط با μ و σ^2 بصورت زیر می‌باشند :

$$a = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad \text{و} \quad b = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (5.2)$$

۲-۲ تخمین پارامتر شدت

به منظور برآورد پارامتر شدت λ_1 با تعریف تابع خودهمبستگی برای فرایند داده شده در معادله (3.2) که به فرم زیر است شروع می‌کنیم.

$$\rho(q) = w_1 e^{-\lambda_1 |q|} + w_2 e^{-\lambda_2 |q|} \quad (6.2)$$

از تابع خود همبسته بیان شده در (6.2) می‌توانیم پارامتر λ_1 را تخمین بزنیم. فرض کنید در معادله (6.2) داشته باشیم $\lambda_1 = \lambda_2$ خواهیم داشت:

$$\rho(q) = w_1 e^{-\lambda_1 |q|} + w_2 e^{-\lambda_2 |q|} = e^{-\lambda_1 |q|} (w_1 + w_2). \quad (7.2)$$

$$\lambda_1 = - \frac{\log \rho(q) - \log(w_1 + w_2)}{q} \quad \text{بنابراین}$$

بدون کاستن از کلیت با فرض $q=1$ تخمین پارامتر λ_1 به صورت زیر است:

$$\hat{\lambda}_1 = -\log \rho(1) - \log(w_1 + w_2). \quad (8.2)$$

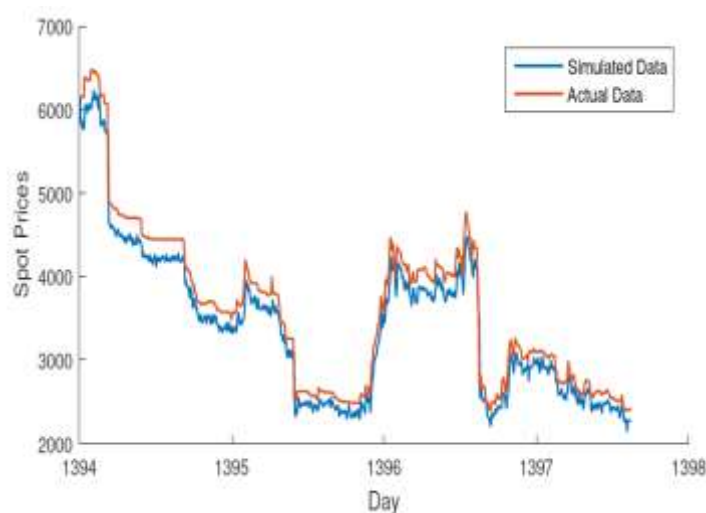
۳ شبیه سازی و نتایج عددی

در این مطالعه قیمت‌های بسته شدن روزانه شاخص سایپا آذین از سال های ۱۳۹۴-۱۳۹۷ در نظر گرفته شده است. از میان ارقام مشاهده می‌کنیم که نوسانات داده ها ثابت نیست و با گذشت زمان تغییر می‌کند، که با استفاده از نرم افزار متلب به شبیه سازی داده ها می‌پردازیم.

جدول ۱: نتایج حاصل از شبیه سازی برای شاخص سایپا آذین

RMSE	w_r	w_l	λ_r	λ_l	بورس سهام
۰,۰۴۸۹	۸۵۶,۲۱۶۷-	۸۵۷,۲۱۶۷	۰,۰۴۰۹	۰,۰۴۰۲	سایپا آذین

از نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود تخمین‌های مدل نوسانات تصادفی روی مقادیر واقعی پایدار بوده و از خصوصیات همگرایی خوبی برخوردار است و خطای کم نشان می‌دهد الگوریتم تخمین مورد استفاده برای داده های بزرگ بسیار دقیق و امکان پذیر می باشد. حتی اگر نویز واقعی مشاهده شده دقیقاً توزیع ترکیبی نرمال نباشد. نمودار داده های شبیه سازی شده بسیار متناسب با سری زمانی اصلی است. همچنین داده های شبیه سازی شده رفتار حافظه طولانی مدت را نشان می‌دهند که پیش بینی را تسهیل می‌کند. می‌توان لگاریتم نوسان های تصادفی شبیه سازی شده و پیش بینی شده یک گام روبه جلو، برای شاخص ها را محاسبه و ترسیم کرد [9,10]



شکل ۱: مقایسه داده های واقعی و داده های شبیه سازی شده روزانه شاخص های سایپا آذین

۴ نتیجه گیری و پیشنهاد برای ادامه کار

دراین مقاله، یک تکنیک جدید برای تخمین سری‌های زمانی مالی برای بازار بورس مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج عددی نشان دادند برآوردهای بدست آمده در اطراف مقدار واقعی پایدار هستند و همچنین خطای کم نشان می‌دهد که روش تخمین دقیق است و می‌توان از آن برای پیش بینی قیمت سهام های آتی، تجزیه و تحلیل بازار، طراحی نمونه کارها در سایر رشته ها چون ژئوفیزیک، پزشکی و علوم اجتماعی استفاده نمود. در نظر گرفتن مدل های رژیم سوئیچینگ، مدل هایی که نوسان یا نرخ بهره‌ی آن‌ها از مدل های تصادفی چون CIR یا هال وایت پیروی می‌کنند می‌توانند در آینده مورد بررسی قرار بگیرند. همچنین قیمت گذاری مشتقات (اختیار، انواع قراردادهای و....) می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

۵ مراجع ها

1. J.L. Doob, The Brownian Movement and Stochastic Equations, Annals of Mathematics. (1942), 43(2), pp. 351-369.
2. <http://www.fipiran.com/DataService/TradeIndex>.
3. M.C. Mariani, O. K. Tweneboah, Estimation of stochastic volatility by using Ornstein-Uhlenbeck type models, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, (2012), 421, pp.167-176.
4. C. Gouriou, ARCH models and financial applications, Springer, (1997), Heidelberg.
5. M. Qai, Gp. Zhang, An investigation of model selection criteria for neural network time series forecasting, Eur J Oper Res, (2001), pp. 132-188.
6. P. Zhang, T. Lu, L. Song, RBF networks-based inverse kinematics of R6 manipulator, Int J Adv Manuf Technol, 26, (2005), pp. 144-147.
7. K. Spiliopoulos, Method of Moments Estimation of Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by General Levy Process, ANNALES de l'I.S.U.P., (2009), 53, pp. 3-19.
8. W. Li. Y. Lou. Q. Zhu., J. Le, Applications of AR-GRNN model for financial time series forecasting, Neural Computation and Application. (2005),
9. G. Zhang, Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model, Neurocomputing, (2004), 50, pp. 159-175.
10. W. Li, J.L. Liu J., Wang, The financial time series forecasting based on proposed ARIMAGRNN model, conf. on machine learning and cybernetics, (2005).

ضرائب لاگرانژ و مدل مارکوویتز در بهینه سازی مدیریت پرتفوی

سیدعلی محمد محسنی الحسینی

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

amah@vru.ac.ir; mohsenialhosseini@gmail.com

چکیده: ورود مدل‌های ریاضی و پژوهش عملیاتی یکی از فعالیتهایی است که در توانسته بهینه سازی پرتفوی را تحت تاثیر دهد. هری مارکوویتز* در سال ۱۹۵۲ مدل اساسی پرتفوی که مشهور به تئوری مدرن پرتفوی است را ارائه کرد. در اینجا مدل ریاضی مدیریت پرتفوی که در رابطه با می نیم سازی خطای رهگیری با توجه به ریسک پذیری مدیران پرتفوی می باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین در اینجا نقش ضرائب لاگرانژ در مدل مارکوویتز در بهینه سازی مدیریت پرتفوی که در رابطه با می نیم سازی خطای رهگیری با توجه به ریسک پذیری مدیران پرتفوی می باشد را مورد بررسی قرار خواهیم داد. با بکارگیری ضرائب لاگرانژ روی مدل مارکوویتز فرمول میانگین برای مرزهای کارآمد و نرخ بازدهی پرتفوی مورد انتظار بدست می آید. کلمات کلیدی: ضرائب لاگرانژ، مدل مارکوویتز، پرتفوی بهینه. طبقه بندی موضوعی: G11-C61.

۱- مقدمه

هری مارکوویتز[□] در سال ۱۹۵۲ مدل اساسی پرتفوی که مشهور به تئوری مدرن پرتفوی است را ارائه کرد. در سال ۱۹۵۹ شارپ و لیتنر[□] زمینه را برای مدل قیمت گذاری داراییهای سرمایه ای (CAPM)[□] با استفاده از مدل هری مارکوویتز فراهم نمودند.

در سال ۱۹۷۲ مرتون** از مرز میانگین واریانس که دارای مرز کارآمد است دارای دو صندوق w_A ، $w_{\sum}$ می باشد استفاده نمود. در سال ۱۹۹۲ رول*، مرز میانگین TVE که برای بازار نا کارآمد دارای صندوق w_B می باشد بکار

* Harry Markowitz

† Harry Markowitz

‡ Sharpe & Linter

§ Capital Asset Pricing Model

** Merton

گرفت. رضا راعی و سعید فلاح پوردر سال ۱۳۹۰ مدلی را برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از ارزش در معرض ریسک والگوریتیم ژنتیک طراحی نمودند [۱]. مریم کشتکاری در سال ۱۳۸۷ روش های انتخاب اوراق بهادر وتشکیل پرتفوی بهینه را مورد بررسی قرار [۲]. در سال ۲۰۰۴ مارنیکس هنگل[□] مسائل بهینه سازی پرتفوی با استفاده مارکوویتز را مورد بررسی قرار داد [۳].

در سال ۲۰۰۹ هیون شام[□] مسائل بهینه سازی امور مالی با استفاده از نظریه کنترل را مورد بررسی قرار داد [۴]. مهم ترین نقش این تئوری، ایجاد چارچوب ریسک- بازدهی پرتفوی برای تصمیم گیری سرمایه گذاران است.

۲- مدل مارکوویتز

در این بخش ابتدا نمادهای لازم را که به کار می گیریم معرفی می کنیم.

T : ترانواده، $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$ پارامتر، $\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، C_0 : سرمایه اولیه، C_{end} سرمایه نهایی، $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$: نرخ بهره بانکی، σ_{ij} : کواریانس بازدهی پرتفوی دارایی بین i و j ، $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ میانگین دارایی ها، $\mu_p = \mu^T \theta$: نرخ

بازدهی پرتفوی مورد انتظار. $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \dots & \sigma_{mn} \end{pmatrix}$: ماتریس واریانس کواریانس از r است. در این مدل

هدف به حداقل رساندن $\theta^T \Sigma \theta$ تحت شرایط $A^T \theta = B$ است، که در آن $A = (\mu \quad \bar{1})$ و $B = \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$.

نکته: ماتریس Σ یک ماتریس متقارن ($\Sigma^T = \Sigma$) و معین مثبت ($\theta^T \Sigma \theta \geq 0$) است. حال با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ دستگاه فوق را حل می کنیم:

* Roll
† Marnix Engels
‡ Huy   n Sham

$$\begin{aligned}
L(\theta, \lambda) &= \theta^T \sum \theta + \lambda(A^T \theta - B) = (\theta_1 \quad \theta_2) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_p \\ c_0 \end{pmatrix} \right) \\
&= (\sigma_{11}\theta_1 + \sigma_{21}\theta_2 \quad \sigma_{12}\theta_1 + \sigma_{22}\theta_2) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 - \mu_p \\ \theta_1 + \theta_2 - c_0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma_{11}\theta_1^2 + \sigma_{21}\theta_1\theta_2 + \sigma_{12}\theta_1\theta_2 + \sigma_{22}\theta_2^2 + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 - \mu_p \\ \theta_1 + \theta_2 - c_0 \end{pmatrix} \\
&= \sigma_{11}\theta_1^2 + 2\sigma_{21}\theta_1\theta_2 + \sigma_{22}\theta_2^2 + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 - \mu_p \\ \theta_1 + \theta_2 - c_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

حال با مشتق گیری $L(\theta, \lambda)$ نسبت به θ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\theta, \lambda)}{\partial \theta_1} &= 2\sigma_{11}\theta_1 + 2\sigma_{21}\theta_2 = 2(\sigma_{11} \quad \sigma_{21}) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial L(\theta, \lambda)}{\partial \theta_2} &= 2\sigma_{21}\theta_1 + 2\sigma_{22}\theta_2 = 2(\sigma_{21} \quad \sigma_{22}) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + (\lambda_1 \quad \lambda_2) \begin{pmatrix} \mu_2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & 1 \\ \mu_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 2 \sum \theta + A\lambda_0 \quad : \lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

و با مشتق گیری $L(\theta, \lambda)$ نسبت به λ داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 - \mu_p \\ \theta_1 + \theta_2 - c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_p \\ c_0 \end{pmatrix} = A^T \theta - B$$

بنابراین از $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ و $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} 2\sum \theta + A\lambda_0 = 0 \\ A^T \theta = B \end{cases} \quad (1.2)$$

با بدست آوردن θ از (۱.۲) داریم:

$$2\sum \theta = -A\lambda_0 \Rightarrow \theta = \sum^{-1} A\lambda \quad : \lambda = -\frac{1}{2}\lambda_0 \quad (2.2)$$

بنا به دومین معادله (۱.۲) داریم :

$$A^T \sum^{-1} A\lambda = B \Rightarrow \lambda = (A^T \sum^{-1} A)^{-1} B = H^{-1} B \quad : H \equiv A^T \sum^{-1} A \quad (3.2)$$

از طرفی H یک ماتریس متقارن است، زیرا:

$$H^T = (A^T \sum^{-1} A)^T = B = A^T (\sum^{-1})^T A = A^T \sum^{-1} A = H$$

حال با جایگزینی (۲.۲) و (۳.۲) در فرمول واریانس $\text{var}(R_p) = \theta^T \sum \theta$ داریم:

$$\text{var}(R_p) = \theta^T \sum \theta = \theta^T \sum \sum^{-1} A\lambda = \theta^T A\lambda = (A^T \theta)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B$$

چون H یک ماتریس متقارن 2×2 هست، فرض می کنیم H به صورت زیر باشد:

$$H \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & c \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

چون $H = A^T \sum^{-1} A$ واضح است که:

$$\begin{aligned}
 a &= \mu^T \sum^{-1} \mu \\
 b &= \mu^T \sum^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \sum^{-1} \mu \\
 c &= \bar{1}^T \sum^{-1} \bar{1} \\
 d &= ac - b^2
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه فرض کردیم ماتریس کواریانس معین مثبت است پس وارون آن نیز معین مثبت است. یعنی برای هر بردار $(N \times 1)$ غیر صفر x ، $x^T \sum^{-1} x > 0$ ، بنابراین $a, c > 0$. از طرفی:

$$(b\mu - a\bar{1})^T \sum^{-1} (b\mu - a\bar{1}) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0,$$

بنابراین $d > 0$ چون $a > 0$. با توجه به رابطه (۴.۲) فرمول واریانس به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
 \text{var}(R_p) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \mu_p & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{d} (c\mu_p - bC_0 - b\mu_p) \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - b\mu_p C_0 - b\mu_p C_0 + aC_0^2) \\
 &= \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + aC_0^2)
 \end{aligned}$$

این فرمول به ما میانگینی برای مرزهای کارآمد در یک چارچوب ریسک خنثی را می دهد. به عبارتی فرمول مرز کارآمد به شکل زیر است:

$$(۵.۲) \quad \sigma_p^2 = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + aC_0^2)$$

با جذر گرفتن از رابطه (۵.۲) انحراف استاندارد بدست می آید. با

بکارگیری محاسبات لازم روی رابطه (۵.۲) می توان به فرمول نرخ بازدهی پرتفوی مورد انتظار دست یافت:

$$\mu_p = \frac{b}{c} C_0 \pm \sqrt{\frac{d}{c}} \sigma_p$$

مرجع‌ها

۱. راعی، رضا و فلاح پور، سعید(۱۳۹۰)، طراحی مدلی برای مدیریت فعال پرتفوی با استفاده از ارزش در معرض ریسک والگوریتم ژنتیک.
۲. کشتکاری، مریم فروردین(۱۳۸۷)، راهبرهای مدیریت پرتفوی وروش های انتخاب اوراق بهادار و تشکیل پرتفوی بهینه.
3. Marnix Engels, Portfolio Optimization Beyond Markowitz, Thesis, 2004.
4. Huyên Sham, Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications, springer, 2009.

دنباله‌ی فیبوناچی در تحلیل تکنیکال و

تعیین سطح‌های مقاومت و حمایت

مهدیه شهبازی^{۱*}، وحید کاروان^۲

^۱ انتشارات علمی پارسیان

mahshahbazi@gmail.com

^۲ شرکت پردازش داده البرز

vahid.karavan@gmail.com

چکیده: رویکرد این نوشتار آشنایی با نقش سری فیبوناچی در بازار سرمایه و تعیین سطوح مناسب قیمت برای تصمیم‌گیری در خرید و یا فروش سهام است. سری فیبوناچی و نسبت طلایی در دانش ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارد. اثر انگشت انسان، لاک حلزون و دانه‌های آفتابگردان نمونه‌هایی از کاربردهای شگفت‌انگیز نسبت طلایی در طبیعت هستند. در بازار بورس، تحلیل قیمت و تعیین زمان خرید یا فروش برای معامله‌گران اهمیت بسیاری دارد. در ادبیات بورس، تحلیل تکنیکال بر مبنای نمودار قیمت سهام استوار است. با به‌کارگیری نمودار قیمت هر سهم، اطلاعات خرید و فروش سهامداران در زمان‌های گوناگون را در اختیار خواهیم داشت که خود به تنهایی می‌تواند بیانگر رفتارهای انسانی در معاملات باشد و به نوعی تمام اطلاعات در این نمودار نهفته است. برخی تحلیل‌گران بر این عقیده‌اند که از آن‌جا که بسیاری پدیده‌ها در دنیای پیرامون ما از الگوی فیبوناچی پیروی می‌کنند، می‌توان از آن در تحلیل تکنیکال و تعیین سطح‌های حمایت و مقاومت در یک سهم بهره جست.

کلمات کلیدی: دنباله‌ی فیبوناچی، نسبت طلایی، بورس، حمایت، مقاومت.

طبقه‌بندی موضوعی: JEL.

۱ مقدمه

فعالان و معامله‌گران در بازارهای سرمایه همواره در پی روش‌هایی برای شناسایی زمان مناسب برای ورود به یک بازار یا خروج از آن هستند. در این میان برخی با بررسی صورت‌های مالی شرکت‌ها و برخی دیگر با بررسی روند قیمت‌ها به دنبال تصمیم‌گیری برای پیشبرد سرمایه‌گذاری خود هستند. بسیاری بر این عقیده‌اند که قیمت به تنهایی می‌تواند دربرگیرنده‌ی اطلاعات مهمی از یک بازار باشد و حتی می‌تواند عملکرد یک شرکت را هم از طریق سود یا زیان و تأثیر آن بر قیمت پوشش دهد.

* سخنران

در این نوشتار با بررسی نمودار قیمت و با به کارگیری دنباله‌ی اعداد فیبوناچی در پی روش‌هایی هستیم که زمان مناسب برای ورود به یک بازار یا ترک آن را به ما نشان دهد.

امروزه به کارگیری سری فیبوناچی در بازارهای سرمایه برای تحلیل قیمت سهام جایگاه ویژه‌ای دارد [۲]. گرچه این روش تنها یکی از روش‌های تحلیل قیمت است که برای اعتبار بیش‌تر باید آن را در کنار روش‌های دیگر به کار برد. در سال‌های اخیر به دلیل کارایی شگفت‌انگیز آن بسیاری از کشورها به دنبال بررسی این روش بر بازارهای خود هستند [۳، ۵ و ۷].

۱-۱ مفاهیم اساسی

برای پیشبرد کار در این بخش مفاهیمی چون دنباله‌ی فیبوناچی، نسبت طلایی در ریاضیات و تحلیل تکنیکال، تحلیل بنیادی، مقاومت و حمایت در بازار سرمایه و بورس را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱-۱ دنباله‌ی فیبوناچی

دنباله‌ی فیبوناچی رشته‌ای از اعداد است که در آن اعداد غیر از دو عدد اول با محاسبه‌ی مجموع دو عدد قبلی ایجاد می‌شوند [۴]. جملات نخستین این دنباله به صورت زیر است:

$$۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴، ۲۳۳، ...$$

به درصدهای زیر که از ارتباط جمله‌های این دنباله به دست آمده است، توجه کنید.

$$۱، ۸٪ = \text{تقسیم هر جمله‌ی تصاعد بر جمله بعد (پس از جمله سیزدهم)}.$$

$$۱۶۱، ۸٪ = \text{تقسیم هر جمله تصاعد با جمله پیش از آن که به آن «نسبت طلایی» گفته می‌شود}.$$

$$۳۸، ۲٪ = \text{تقسیم هر جمله بر دومین جمله پس از آن}$$

$$۲۳، ۶٪ = \text{تقسیم هر جمله بر سومین جمله پس از آن}$$

این نسبت‌ها و نسبت‌های ۰٪، ۵۰٪، ۱۰۰٪ و ۲۰۰٪ که از حاصل اعداد فیبوناچی نیستند، توسط برخی معامله‌گران در تحلیل قیمت سهام استفاده می‌شوند [۶].

۱-۲ تحلیل بنیادی

در تحلیل بنیادی معامله‌گران ارزش ذاتی اوراق بهادار را با عوامل مختلف اقتصادی و مالی ارزیابی می‌کنند. در این روش هر عاملی را که بر ارزش سهم تأثیر می‌گذارد در نظر گرفته می‌شود. این عامل‌ها گستره‌ای از عوامل اقتصاد کلان مانند شرایط اقتصادی و وضعیت سایر بازارها تا عوامل اقتصاد خرد مانند بهره‌وری مدیریت شرکت هستند.

هدف از تحلیل بنیادی این است که سرمایه‌گذار بتواند با توجه به قیمت فعلی سهم به این نتیجه برسد که سهم بیش از ارزش خود قیمت‌گذاری شده است یا ارزشی کمتر از قیمت بازار دارد [۱].

۳-۱-۱ تحلیل تکنیکال

تحلیل تکنیکال در پی مطالعه‌ی رفتارهای بازار بر مبنای نمودار قیمت است. قیمت می‌تواند به تنهایی نشانگر عملکرد رفتار تک تک معامله‌گران باشد. تکنیکالیست‌ها معتقدند: نمودار قیمت همه چیز را در خودش لحاظ می‌کند. این موارد افزون بر عوامل اقتصادی، رفتارهای انسانی را نیز شامل می‌شود [۲].

۴-۱-۱ مقاومت

آخرین حرکت صعودی قیمت را سطح مقاومت گویند. این سطح مانعی برای رشد قیمت محسوب می‌شود. این سطوحی برای فروشندگان جذابیت خاصی دارد. با رسیدن قیمت به این سطح معامله‌گران اقدام به عرضه‌ی شدید می‌کنند. در واقع در این سطوح میزان عرضه بر تقاضا افزایش یافته و همین امر موجب کاهش قیمت و ادامه‌ی روند نزولی می‌شود.

۵-۱-۱ حمایت

انتهای آخرین موج نزولی قیمت را سطح حمایت گویند. این سطوح برای خریداران از جذابیت خاصی برخوردار است چرا که با رسیدن قیمت به این سطح با افزایش تقاضا روبه‌رو هستیم. این افزایش تقاضا موجب افزایش قیمت‌ها می‌شود. در واقع در این سطوح میزان تقاضا بر میزان عرضه فزونی یافته و بر آن غلبه می‌کند که نتیجه‌ی این پیروزی به‌صورت افزایش قیمت‌ها و ادامه روند صعودی قابل مشاهده است.

در ادامه می‌خواهیم با به‌کارگیری سطح‌های به دست آمده از دنباله‌ی فیبوناچی، سطح‌های قیمتی حمایت و مقاومت را در نمودار قیمت سهام بررسی کنیم. همان‌گونه که اشاره شد نمودار قیمت که اساس تحلیل تکنیکال است، رفتار معامله‌گران را نیز در خود دارد. همچنین فیبوناچی در ضمیر ناخودآگاه انسان نیز وجود داشته و بر رفتار او بطور ناخودآگاه تأثیر می‌گذارد. یعنی انسان بدون آن که بداند نسبت به اعداد فیبوناچی تمایل دارد و دنباله‌ی فیبوناچی را

زیبا می‌داند. این امر باعث می‌شود که نسبت‌های فیبوناچی در معاملات افراد نیز تاثیر بگذارد. هدف از این مبحث به‌کارگیری تاثیر نسبت های فیبوناچی بر معاملات بازار سهام است. وقتی بتوانیم پیش بینی کنیم که در چه نسبت های قیمتی معامله گران واکنش خواهند داشت می توانیم از این اطلاعات برای تعیین نقاط ورود و خروج به بازار و شناسایی سطوح حمایت و مقاومت استفاده کنیم.

۲ فیبوناچی ابزاری برای تصمیم

در این بخش با مثالی از یک سهم سطوح فیبوناچی و رفتار بازار در این سطوح را بررسی خواهیم کرد. برای این منظور فرض کنید با بررسی‌هایی که از پیش بر سهم «شجم» که مربوط به صنایع پتروشیمی تخت جمشید است، داشتیم و با توجه به روند نزولی بازار در روزهای اخیر به دنبال زمان مناسب برای ورود به این سهم هستیم.

با توجه به موج‌های شناسایی شده از تاریخ ۹۸/۱۰/۲۹ تا به امروز که به نسبت بازار روند نزولی داشته سطوح فیبوناچی را رسم می‌کنیم. برای این کار از یک سقف تا کف (و یا از یک کف تا سقف) خط را رسم می‌کنیم تا نرم افزار تحلیل تکنیکال سطوح مقاومت و حمایت را برای ما به نمایش درآورد. شایان ذکر است ما در این‌جا از نرم افزار ایزی تریدر استفاده کرده‌ایم که توسط کارگزاری مفید عرضه شده است.



شکل ۱: نمودار قیمت سهام شجم

نمودار نشان می‌دهد که روند قیمتی در بازگشت و تصحیح در محدوده‌های فیبوناچی واکنش نشان داده است. برای نمونه قیمت در ابتدا تا نزدیکی سطح ۵۰ درصد ریزش داشته و یک سطح حمایتی در این محدوده به شمار می‌آید. سپس در ناحیه‌ی ۷۸,۶ درصد یک سطح مقاومتی داشته و دوباره تا نزدیکی محدوده‌ی ۲۳,۶ درصد نزول و حمایت سهم بوده است. در ادامه موج بعدی را در ۶۱,۸ درصد تکمیل کرده است.

برای پیش‌بینی ادامه‌ی روند پس از نقطه‌ی B قیمت روند افزایشی یافته و از ناحیه‌ی ۵۰ درصد هم عبور کرده است. با ادامه‌ی این روند انتظار داریم قیمت در روزهای آتی تا ناحیه‌ی بعدی یعنی ۶۱٫۸ درصد یعنی ۹۱۴۰ ریال افزایش داشته باشد و اگر این ناحیه را نیز رد کند در ناحیه‌های دیگر نیز منتظر واکنش‌هایی از بازار هستیم.

شایان ذکر است روش بررسی شده در این نوشتار که به فیبوناچی اصلاحی یا بازگشتی Fibonacci Retracement شناخته می‌شود، تنها دریچه‌ای به روش‌های فیبوناچی در بازار سرمایه است. روش‌های دیگر نیز وجود دارد که عبارت هستند از

فیبوناچی خارجی Fibonacci Extension

فیبوناچی انبساطی یا گسترشی Fibonacci Expansion

فیبوناچی پروژکشن یا بازتابی Fibonacci Projection

هم‌چنین چرخه‌های زمانی فیبوناچی در بازه‌های زمانی نیز تاثیر دارند و یک معامله‌گر موفق می‌تواند با تلفیق فیبوی قیمتی و زمانی تحلیل‌های بسیار دقیقی به‌دست آورد [۴].

همان‌گونه که اشاره شد ابزار شگفت‌انگیز فیبوناچی در کنار دیگر دانسته‌ها می‌تواند ابزاری سودمند و قوی برای تصمیم در زمان مناسب خرید یا فروش در بازارهای سرمایه و بورس باشد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از استاد بزرگوار جناب آقای پروفسور محمد جلوداری ممقانی کمال تشکر و قدردانی را دارند. رهنمون‌های ایشان همواره چون پدري دلسوز روشنگر راه بسیاری از جویندگان دانش خواهد بود.

مرجع‌ها

۱. س. شهدایی، تحلیل بنیادی در بازار سرمایه، نشر چالش، ۱۳۹۴.
۲. ک. فرهانی فرد و ر. قاسمیان لنگرودی، تحلیل تکنیکال در بازار سرمایه، نشر چالش، ۱۳۹۸.
3. M. Alalaya and M. A. Almahameed, Fibonacci Retracement and Elliot Waves to Predict Stock Market Prices: Evidence from Amman Stock Exchange Market, International Journal of Applied Science and Technology 8.3 (2018), 69-86.
4. C. Baroden, Fibonacci tradings. The McGrawHill Companies: New York. 2008.
5. Y. Chen, C. Ho, L. Deng, Y. Qiu and C. Huang, Constructing Trading Strategies According to Fibonacci Sequence in Shanghai Stock Market, Advances in Social Science, Education and Humanities Research (ASSEHR), 184, (2018), 1235-1237.

6. P. Pattasoonthorn, Technical Analysis for prediction of stocks prices Index. The thesis of Master level of Business Administration, Kasem Bundit University. Phased Tilings. The Fibonacci Quarterly, 38.3 (1998), pp. 282-288.
7. R. Zafarullah Shaker, M. Asad and N. Zulfiqar, Do Predictive Power of Fibonacci Retracements Help the Investor to Predict Future? A Study of Pakistan Stock Exchange, International Journal of Economics and Financial Research, 4.6(2018), 159-164.

روش تقلیل پایه برای قیمت گذاری اختیار تحت مدل مرتون

مینا گنجعلی^{۱*}، علی صفدری^۲

^۱دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، تهران، ایران.

چکیده: در این مقاله با روش تقلیل پایه به محاسبه جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل-انتگرالی حاصل از مدلسازی قیمت گذاری اختیار تحت مدل پرش انتشار مرتون و مدل هستون می پردازیم. در این روش از توابع پایه ی ساخته شده از دنباله جوابهای معادله بلک شولز با ضریب تلاطم های متفاوت استفاده می شود. نحوه ایجاد توابع پایه را بیان و متناظر با مدل های هستون و پرش انتشار مرتون محاسبه می کنیم. نتایج عددی مبتنی بر مدل هستون و پرش انتشار مرتون بیانگر آن است که این روش کارایی عددی بهتری نسبت به روش های تفاضلات متناهی و عناصر متناهی دارد.

کلمات کلیدی: قیمت گذاری اختیار، مدل هستون، مدل پرش-انتشار مرتون، تقلیل پایه، معادلات دیفرانسیل-انتگرالی

۱ مقدمه

روشهای بسیاری برای قیمت گذاری اختیارهای معامله وجود دارد و مسئله های قیمت گذاری می توانند بر اساس یک معادله دیفرانسیل-انتگرالی با مشتقات جزئی بیان گردد [2-4]. در این مقاله به معرفی روش تقلیل پایه برای قیمت گذاری اختیارهای معامله اروپایی می پردازیم. منظور از تقلیل پایه، تقلیل یک معادله دیفرانسیل-انتگرالی به یک معادله دیفرانسیلی می باشد. ایده ی روش ارائه شده ایجاد دنباله ای از توابع پایه است که به جواب معادله دیفرانسیل-انتگرالی همگراست. به عبارتی جواب مسئله از روش های عددی متداول تفاضلات متناهی محاسبه نشده است بلکه دنباله ای از توابع پایه حاصل از جواب های معادله بلک شولز به ازای ضریب های تلاطم متفاوت استفاده می کنیم [1]. مطالعه توابع پایه حاصل از مدل هستون و مدل پرش انتشار مرتون هدف اصلی این مقاله را تشکیل می دهد. از ویژگی های این روش می توان به نرخ همگرایی بالاتر و دقت بهتر نسبت به روش های تفاضلات متناهی و عناصر متناهی و کاهش قابل توجه حجم محاسبات اشاره کرد.

۱-۱ مدل ساختاری

مدل‌های متداول مبتنی بر فرایندهای قیمت‌دارایی پرش-انتشار برای قیمت‌گذاری اختیار به صورت معادله دیفرانسیل-انتگرالی همراه با تابع عایدی Φ بصورت زیر قابل بیان است

$$\partial_t w + \ell w = f, \quad w(T) = \Phi \quad (۱)$$

که $\ell = \ell^\sigma + \ell_J$ بیانگر عملگر دیفرانسیل-انتگرالی می‌باشد که جزییات این عملگر از فرمول لوی خنچین بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$L^\sigma w(S, t) = -\frac{1}{2} \sigma^2(S, t) S^2 \partial_{ss} w(S, t) - (r - d) S \partial_s w(S, t) + r w(S, t) \quad (۲)$$

$$L_J w(s, t) = - \int_{\square} \left[w(Se^z, t) - w(S, t) - S(e^z - 1) \partial_s w(S, t) \right] J(z) dz \quad (۳)$$

با معرفی متغیرهای زیر

$$\tau = T - t, \quad y = e^{(r-d)(T-t)} \frac{S}{K}, \quad x = \ln y \quad (۴)$$

معادله فوق را می‌توان بصورت ساده‌تر بیان کرد. با فرض اینکه C جوابی از معادله (۱) به ازای $f = 0$ باشد؛ روابط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$v(y, \tau) = \frac{e^{r\tau}}{K} C\left(yKe^{-(r-d)\tau}, T - \tau\right) \quad (۵)$$

$$u(x, \tau) = v(e^x, \tau) = \frac{e^{r\tau}}{K} C\left(Ke^{x-(r-d)\tau}, T - \tau\right) \quad (۶)$$

در این صورت برای جواب معادله (۱) برحسب $\mathbb{L}$ و $\mathbb{V}$ خواهیم داشت:

$$\partial_\tau v + L^\sigma v + L_J v = 0 \quad (۷)$$

$$\partial_\tau u + L^\sigma u + L_J u = 0 \quad (۸)$$

با استفاده از روابط (۴) و محاسبه‌ی مشتق زنجیره‌ای و جایگذاری آنها در روابط (۲) و (۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
L^\sigma v(y, \tau) &= -\frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \partial_{yy} v \\
L_J v(y, \tau) &= \int v(y e^z) J(z) dz - v(y) \int J(z) dz - y \partial_y v(y) \int (e^z - 1) J(z) dz \\
L^\sigma u(x, \tau) &= \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_x u - \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{xx} u \\
L_J u(x, \tau) &= \int u(x + z) J(z) dz - u(x) \int J(z) dz - \partial_x u(x) \int (e^z - 1) J(z) dz
\end{aligned}$$

۱-۲ جواب تحلیلی معادله بلک شولز برای ساخت توابع پایه

فرم ساده معادله بلک شولز بر اساس متغیرهای معرفی شده در رابطه (۴) با تابع $v(y, \tau)$ به صورت زیر قابل بیان است [4]

$$\partial_\tau v - \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \partial_{yy} v = 0 \quad (9)$$

روش ارایه شده مبتنی بر دنباله ای از توابع پایه حاصل از جوابهای معادله بلک شولز با ضریب های تلاطم متفاوت است. به همین منظور به جزییات جواب تحلیلی معادله (۹) می پردازیم. که در آن به ازای ضریب تلاطم σ_i خواهیم داشت :

$$v = \frac{e^{r\tau}}{K} C(S, K, \sigma_i, t, T) = \frac{e^{r\tau}}{K} [SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)] \quad (10)$$

اکنون با جایگذاری d_1, d_2 در عبارت فوق و استفاده از روابط (۴) و ساده سازی به رابطه ی زیر دست می یابیم:

$$v = yN\left(\frac{\ln y}{\sigma_i \sqrt{\tau}} + \frac{\sigma_i \sqrt{\tau}}{2}\right) - N\left(\frac{\ln y}{\sigma_i \sqrt{\tau}} - \frac{\sigma_i \sqrt{\tau}}{2}\right) \quad (11)$$

در نهایت با استفاده از تعریف تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و متمم تابع خطا عبارت (۱۱) به صورت زیر قابل بیان است

$$v = \frac{1}{2} \left(y \left[1 - \operatorname{erf} \left(-\frac{\ln y}{\sigma_i \sqrt{2\tau}} - \frac{\sigma_i \sqrt{\tau}}{2\sqrt{2}} \right) \right] - 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln y}{\sigma_i \sqrt{2\tau}} - \frac{\sigma_i \sqrt{\tau}}{2\sqrt{2}} \right) \right) \quad (12)$$

حال با اعمال عملگر دیفرانسیلی بر تابع V و با توجه به تابع چگالی احتمال دارایی تحت مدل بلک شولز رابطه (۱۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$L^\sigma v = -\frac{\sigma^2(y, T)y^2}{2}\partial_{yy}v$$

$$L^\sigma v = -\frac{\sigma^2(y, T)}{\sqrt{2\pi}2\sigma_i\sqrt{\tau}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln y^2}{\sigma_i^2\tau}-\ln y+\frac{\sigma_i^2\tau}{4}\right]} = C_0\sigma^2(y, T)\sqrt{y}e^{-\frac{\ln^2 y}{2\sigma_i^2\tau}}$$

$$C_0 = \frac{e^{-\frac{1}{8}\sigma_i^2\tau}}{\sqrt{2\pi}2\sigma_i\sqrt{\tau}}$$

به صورت مشابه u_{σ_i} جواب تحلیلی معادله بلک شولز با جایگذاری ضریب تلاطم σ_i محاسبه می گردد.

۲ قیمت گذاری تحت مدل پرش انتشار و هستون

ضریب تلاطم ثابت Σ را به صورت دلخواه انتخاب کرده و تابع π را که بیانگر خطا تقریب انجام گرفته می باشد به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\pi(x, \tau) = u(x, \tau) - u_\Sigma(x, \tau) \quad (۱۳)$$

در عبارت فوق u_Σ جواب تحلیلی معادله بلک شولز با جایگذاری Σ است. اگر فرم ساده‌ی معادله دیفرانسیل-انتگرالی (۱) را براساس تابع π بازنویسی کنیم آنگاه خواهیم داشت

$$\partial_\tau \pi(x, \tau) + L^\sigma \pi(x, \tau) + L_J \pi(x, \tau) = f(x, \tau)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه ی فوق، $f(x, \tau)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f(x, \tau) = -\partial_\tau u_\Sigma(x, \tau) - L^\sigma u_\Sigma(x, \tau) - L_J u_\Sigma(x, \tau) \quad (۱۴)$$

اکنون $f(x, \tau)$ را تحت مدل مرتون به دست می آوریم. تابع تلاطم در مدل مرتون به صورت ثابت

$$\sigma(x, \tau) = \sigma_M \quad \text{فرض می شود که} \quad \sigma_m = \sqrt{\sigma^2 + \lambda(\mu^2 + \delta^2)}$$

λ ضریب وقوع پرش، δ واریانس اندازه ی پرش ها و μ میانگین وقوع پرش می باشد. پس $f(x, \tau)$ تحت مدل پرش انتشار مرتون به صورت زیر به دست می آید [2]

$$f(x, \tau) = -\partial_\tau u_\Sigma(x, \tau) - L^{\sigma_M} u_\Sigma(x, \tau) - L_{J_M} u_\Sigma(x, \tau)$$

که در عبارت فوق $L^{\sigma_M} u_{\Sigma}(x, \tau)$ عملگر دیفرانسیلی حاصل از مدل مرتون بر تابع جواب تحلیلی حاصل از مدل بلک شولز است که ضریب تلاطم ثابت Σ در آن اعمال شده است. و در نتیجه دنباله‌ای از توابع پایه را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\omega_i(x) = \omega_i^S(x) = L^{\sigma_s} \left[u_{\sigma_i} \right] (x, T)$$

$$\omega_{i+n}(x) = \omega_i^A(x) = L_A^{\sigma} \left[u_{\sigma_i} \right] (x, T)$$

$$\omega_i^S(x) = -\frac{\sigma_s^2(x, T)}{2v_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - v_i}{v_i} \right)^2}$$

$$\omega_i^A(x) = -\frac{\sigma^2(x, T) - \sigma^2\left(\frac{1}{x}, T\right)}{4v_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - v_i}{v_i} \right)^2}$$

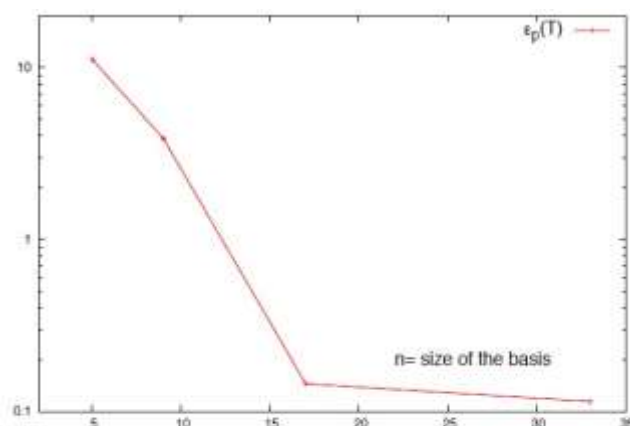
و با این فرایند توابع پایه حاصل از مدل پرش انتشار مرتون به صورت زیر تعیین می‌گردند

$$\omega_i(x) = \omega_i^S(x) := L^{\sigma_M} \left[u_{\sigma_i} \right] (x, T)$$

$$\omega_{i+n}(x) = \omega_i^J(x) := L_J \left[u_{\sigma_i} \right] (x, T)$$

۳ نتیجه گیری

شکل شماره ۱ خطای روش ارایه شده نسبت به دنباله توابع پایه برای تقریب جواب اختیار با مدل مرتون را ارایه می‌کند. مشاهده می‌کنیم که دقت مطلوب با نرخ همگرایی بالا امکان پذیر است.



شکل ۱: نمایش خطای نسبی تحت مدل پرش-انتشار مرتون برای اختیار خرید [1]

در این مقاله روش تقلیل پایه برای تقریب معادلات دیفرانسیل-انتگرالی بصورت اجمالی بیان گردید. مشاهده می‌کنیم که در این روش از روش‌های عددی متداول از جمله تفاضلات متناهی استفاده نشده است. در این روش دنباله‌ای از جوابهای معادله بلک شولز به ازای ضریب‌های تلاطم متفاوت ایجاد گردید که به جواب قیمت اختیار تحت مدل پرش-انتشار مرتون همگرا شود. نتایج عددی بیان می‌کنند که تنها به تعداد متناهی پایه نیاز است تا دقت مطلوب از محاسبه جواب تقریبی قیمت اختیار ایجاد گردد.

مرجع‌ها

- [1] R. Cont., N. Lantos, O. Pironneau, *A reduced basis for option pricing*, SIAM journal on financial Mathematics, 2, 287-316.
- [2] R. Cont, E. Voltchkova, *A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential levy models*, SIAM J. numer. anal, 4, 1596-1626, 2005.
- [3] P. Carr, D.b. Madan, *option valuation using the fast Fourier transform*, J. comput. Finance, 61-73, 1998.
- [4] Y. Achdou, O. Pironneau, *Computational methods for option pricing*, Frontier in applied mathematics, SIAM, 2005.

طراحی یک سیستم پشتیبانی تصمیم‌گیری برای هر مشتری جهت تعیین قیمت اقتصادی در قرارداد فی مابین

فاطمه فرجی f.faraji86@pnu.ac.ir

دانشگاه پیام نور تهران

چکیده: تعیین قیمت در قراردادهای تجاری یکی از قدیمی‌ترین مباحث در حوزه کسب‌وکار است. کسب‌وکارها بدین وسیله سعی می‌نمایند تا علاوه بر پوشش دادن به هزینه‌های ارائه خدمات برای خود نیز سود معقولی در نظر گیرند تا ادامه حیات و بلوغ خود را ممکن سازند. شرکت‌های بیمه‌گر که دارای قدمتی همتای قدمت کسب‌وکارهای جهان است نیز از این موضوع مستثنا نیست، لذا در این تحقیق به بررسی مسئله قیمت‌گذاری ارائه خدمات در حوزه بیمه‌های تأمین اجتماعی می‌پردازد. از طرفی به علت حجم وسیع داده و نیز ابهام‌های موجود در داده‌های موجود (به علت وجود داده‌های نادرست، ایجاد تغییرات مداوم در وضعیت داده‌ها و عدم ثبت لحظه‌ای آن‌ها و ...) از تکنیک‌های همزمان منطق فازی و شبکه‌های عصبی بهره برده شده است. و در نهایت به این نتیجه می‌رسیم که شبکه‌های عصبی (MLP) نتایج بهتری نسبت به رگرسیون خطی و الگوریتم فازی- تطبیقی دارد که در تخمین قیمت برای هر نفر بنابر عامل‌هایی چون سن، سطح تحصیلات و ... مورد توجه قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: قیمت‌گذاری قرارداد بیمه، شبکه عصبی، تخمین فازی، رگرسیون خطی

JEL:K12,K13,K14

۱ مقدمه

تعیین قیمت در قراردادهای تجاری یکی از قدیمی‌ترین مباحث در حوزه کسب‌وکار است. کسب‌وکارها بدین وسیله سعی می‌نمایند تا علاوه بر پوشش دادن به هزینه‌های ارائه خدمات برای خود نیز سود معقولی در نظر گیرند تا ادامه حیات و بلوغ خود را ممکن سازند. شرکت‌های بیمه‌گر که دارای قدمتی همتای قدمت کسب‌وکارهای جهان است نیز از این موضوع مستثنا نیست. گرچه در بسیاری از کشورهای جهان، که تابع قانون کار هستند، ارائه خدمات بیمه‌ای به عموم قشر شاغل از طریق خدمات تأمین اجتماعی* انجام می‌پذیرد اما مهم‌ترین سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا نباید دسته‌بندی خاصی بین مراجعان صورت گیرد تا بر مبنای هزینه‌های ایجاد شده برای آن‌ها، درآمد از قبل ایجاد شده باشد.

فاطمه فرجی*

۲- منطق فازی

در سال ۱۹۲۰، برتراند راسل به صورتی غیر واضح، منطق مبهم را بنیان نهاد و در سال ۱۹۳۷ ماکس بلک آن را به مجموعه‌های مبهم گسترش داد. پروفسور لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵ نظریه فازی را برای حل مسائلی که در آن‌ها معیارهای تعریف شده واضح وجود ندارد و حل آن‌ها مبتنی بر عقلانیت محدود ناشی از عدم قطعیت است، معرفی کرد. در این مقاله از منطق چند مقداری لوکاسیه‌ویچ برای مجموعه‌ها و گروه‌های اشیاء استفاده شده بود. رویکرد فازی ابزار بسیار مناسبی جهت برخورد و کنار آمدن با نایقینی‌ها و عدم اطمینان و مدل‌سازی متغیرهای زبانی می باشد. منطق فازی براین تلاش دارد تا بنیادی را جهت استدلال تقریبی و مدل کردن گزاره‌های نادقیق با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی فراهم آورد (جعفرنژاد، ۱۳۸۷).

۳- جامعه و نمونه تحقیق:

در این روش تحقیق، هر یک از بخش‌ها نیازمند اطلاعات مختلفی است، در فاز اول محوریت با تعدد داده‌های مشتریان و نیز شاخص‌های مهم آن‌ها قلمداد شده داده‌های آنها برای مطالعه گردآوری می شود. از آنجایی که روش تحقیق حاضر بر مبنای علم طراحی استفاده شده است و تمامی نتایج مبتنی بر خروجی‌هایی است که داده محور آن هاست لذا بدون پیش‌دآوری در مورد پذیره‌های یا قواعدی، تنها با ایجاد یک سیستم اطلاعاتی مناسب (شبکه عصبی فازی) درصد تست داده‌ها و ایجاد دانش عصبها در سطح در پایگاه‌های داده سازمان تأمین اجتماعی، شعب استان های تهران والبرزو شرکت‌های کارفرما هستیم.

۳-۱- متغیرهای مستقل و وابسته تحقیق:

از آنجایی که هدف این تحقیق را می‌توان در تعیین قیمت اقتصادی (هزینه ها و درآمدها)، متغیروابسته می توان دانست که می‌بایست قابلیت انعطاف لازم را داشته باشد و در این مورد متغیرهای تحقیق بدین صورت ارائه می شود.

۳-۱-۱- متغیرهای مستقل تحقیق:

➤ ویژگی‌های فردی بیمه شده: مطالعات مختلفی (از جمله دریگ و استاوزسکی، ۱۹۹۵) اشاره می‌دارند که یکی از مهم‌ترین جنبه‌های موجود در قراردادهای بیمه‌گذاری ضرورت مطالعه و در نظر گرفتن ویژگی‌های فردی است.

➤ سن: یکی از بارزترین ویژگی‌هایی است که در انواع مختلف بیمه‌نامه در حوزه‌های مختلف مورد سنجش قرار می‌گیرد. در سوابق بیمه‌پردازی می‌توان از سن ۱۸ سالگی تا ۶۵ سالگی را به عنوان سن بیمه‌پردازی در نظر گرفت. هم‌چنین در سنین ۴۵ تا ۹۰ سالگی که نیز زمان بازنشستگی و دریافت حق مستمری است.

➤ جنسیت: یکی دیگر از مهم‌ترین ابعاد جنسیت است با این وجود در برخی موارد اشتباهاتی در ثبت و نگهداری این مورد بروز نموده است که حدود ۵ درصد از داده‌ها را با نبود یا اغتشاش مواجه نموده است.

- وضعیت تأهل: یکی دیگر از عامل‌های است که به اذعان برخی مقالات سبب وجود میزان تفاوت‌های چشمگیری در میزان پرداخت، مدت پرداخت و انتظارات بیمه شده دارد.
- تعداد فرزندان و افراد تحت تکفل: مورد مهم دیگری که هم می‌تواند در میزان پرداخت بیمه و نیز در ایجاد هزینه‌ها برای بیمه بسیار مؤثر باشد همانا تعداد فرزندان و افراد تحت تکفل است.
- عداد سنوات بیمه‌پردازی: این امر به صورت میانگین سابقه بیمه‌پردازی برای گروه‌های سنی مختلف انتخاب شده است.
- سوابق بیماری: هر یک از گروه‌های سنی، درآمدی و جنسیتی دارای شرایط مختلفی از جمله میزان ابتلا به بیماری‌ها و امراض مختلفی دارند که بیانگر هزینه‌های ایجاد شده برای سازمان تأمین اجتماعی خواهند داشت.
- استفاده از خدمات کوتاه‌مدت شامل حق ازدواج، حق بیکاری: این عامل گرچه به ظاهر با بقیه عامل‌ها تا حدی متفاوت است و بیمه شده را از منظر استفاده از خدمات سازمان می‌سنجد اما به عنوان عامل اصلی انگیزه فردی در کوتاه مدت سنجیده می‌شود.
- میانگین تعداد دفترچه تعویضی در سال: این امر نمایشگر تعداد بیماری‌های کم‌هزینه‌تری است که به صورت سرپایی درمان شده‌اند.
- ویژگی‌های شغلی: از دیگر ویژگی‌هایی که می‌توان بدان اشاره نمود ویژگی‌های مختلف کاری فرد بیمه شده است.
- ویژگی‌های سکونت: این نوع ویژگی‌ها شاید کمترین اثر را بر روی رفتار بیمه‌شده داشته باشند با این وجود در مواردی که این اطلاعات نیز وجود داشته است، از آن‌ها استفاده شده است.

۳-۲- ضریب همبستگی:

ضریب همبستگی شاخصی است ریاضی که جهت و مقدار رابطه‌ی بین دو متغیر را توصیف می‌کند. در واقع ضریب همبستگی در مورد توزیع‌های دویا چند متغیره به کار می‌رود. اگر مقادیر دو متغیر شبیه هم تغییر کند یعنی با کم یا زیاد شدن یکی دیگری هم کم یا زیاد شود به گونه‌ای که بتوان رابطه آن‌ها را به صورت یک معادله بیان کرد، برای بررسی مناسب بودن یا نبودن سایر ورودی‌ها (متغیرهای مستقل) مقدار ضریب همبستگی آن‌ها را با متغیر خروجی درآمد محاسبه می‌کنیم:

جدول ۴-۱: مقدار ضریب همبستگی پیرسون بین متغیرهای مستقل موجود با متغیر وابسته درآمد

جنسیت	۰,۱۹
-------	------

۰,۴۸	تحصیلات
۰	تعداد روز کاری
۰,۲۲	حقوق ماهیانه
۰,۳۴	مزایا

۴- تحلیل نتایج:

۴-۱- مدلسازی خروجی درآمد با استفاده از شبکه عصبی (MLP)

در ابتدا با شبکه عصبی پرسپترون چندلایه* (MLP) اقدام به مدل سازی می کنیم. توابع تحریک مورد استفاده در این شبکه عصبی از نوع تانژانت سیگموئید بوده و ما از یک لایه پنهان برای مدل سازی استفاده می کنیم. روش آموزش وزن ها و بایاس ها نیاز از نوع پس انتشار خطای (Levenberg-Marquardt) می باشد. جهت تعیین تعداد نرون بهینه و انتخاب ساختار مناسب برای شبکه عصبی (MLP)، بدین صورت عمل می شود که تعداد نرون های لایه ی پنهان را از ۲ تا ۱۰ یکی یکی افزایش می دهیم و هر بار مدل سازی را انجام داده و مقدار خطای حاصله برای داده های آموزش و تست را حساب می نماییم. سپس با بررسی مقادیر خطای حاصله اقدام به انتخاب ساختار شبکه مورد نیاز و مناسب می کنیم.

جدول ۵-۱: مقادیر خطای حاصله برای داده های آموزش و تست به ازای تعداد نرون های مختلف در (MLP)

تعداد نرون ها	درصد خطای مربوط به داده های آموزش	درصد خطای مربوط به داده های تست
۲	۱۵,۳۸۵۸	۳,۲۸۴۱
۳	۱۹,۳۰۳۰	۱۱,۶۵۱۹
۴	۱۵,۸۹۹۷	۲,۹۶۸۰
۵	۱۵,۹۱۱۵	۶,۸۶۴۹
۶	۱۴,۳۶۲۸	۱۰,۵۵۶۳
۷	۱۵,۸۷۱۴	۳,۰۴۱۷
۸	۱۹,۹۳۴۷	۱۹,۲۳۲۰
۹	۱۱,۳۱۵۰	۱۵,۶۲۶۲
۱۰	۱۴,۷۷۴۸	۷,۹۵۱۷

۴-۲- مدلسازی خروجی درآمد با استفاده از رگرسیون خطی:

با توجه به داشتن دو متغیر مستقل، در این روش رگرسیون به دنبال یافتن ضرایب مجهول معادله هستیم در این روش درصد خطای (NMSE) حاصل شده برای داده های آموزش و تست به ترتیب ۱۶,۴۵۱۹٪ و ۱۶,۸۶۸۴٪ می باشد که نسبت که شبکه عصبی (MLP) بیشتر می باشند.

۴-۳- مدلسازی خروجی درآمد با استفاده از شبکه نروفازی انفیس:

روش مورد استفاده برای آماده‌سازی اولیه شبکه انفیس خوشه‌بندی کاهشی می‌باشد که با تست روشهای قبلی، این روش دارای جواب بهتری می‌باشد. لذا در این بخش با تغییر اثر شعاع مدل از ۰,۲ تا ۰,۸ و انجام آموزش شبکه انفیس، به دنبال بهترین شبکه ممکن خواهیم بود.

شکل ۵-۱: درصد خطای مدل‌های مختلف (ANFIS) با تغییر شعاع تأثیر مراکز خوشه‌ها

شعاع	درصد خطای مربوط به داده های آموزش	درصد خطای مربوط به داده های
۰,۲	۳۵,۱۷۴۲	۸۰,۹۸۶۴
۰,۳	۴۰,۶۹۷۲	۲۷,۱۷۸
۰,۴	۱۵,۲۹۳۷	۱۳,۴۴۸۸
۰,۵	۲۰,۴۱۰۱	۱۴,۵۷۰۹
۰,۶	۱۸,۰۰۹۶	۹,۱۹۲۹
۰,۷	۱۶,۴۹۴۸	۶,۸۸۸۳
۰,۸	۱۶,۸۲۹۶	۷,۱۹۸۴

همان‌طور که از جدول فوق معلوم است بهترین شبکه به ازای شعاع اثر ۰,۷ به‌دست آمده است. چرا که درصد خطای شبکه حاصل شده کمترین مقدار می‌باشد.

۴-۴- مدل‌سازی خروجی هزینه با استفاده از شبکه عصبی (MLP)

از طرف دیگر جهت پیدا کردن متغیرهای مستقل مناسب برای خروجی هزینه، ارتباطات ۲۲ متغیر ورودی مستقل با بردار هزینه مورد بررسی قرار گرفت. از بین این تعداد، فقط دو متغیر با نام‌های «درآمد سال گذشته» و «تعداد همسر» دارای بیشترین میزان ارتباط به خروجی (هزینه) بودند. ساختار شبکه عصبی مورد استفاده دوباره به‌صورت یک لایه‌ی پنهان انتخاب شده است و برای تعیین تعداد نرون بهینه اقدام به آموزش شبکه با تعداد نرون‌ها متفاوت می‌کنیم و هر بار درصد خطای مدل‌سازی را با روش (NMSE) به‌دست می‌آوریم و در زیر نمودارهای خروجی واقعی و خروجی شبکه عصبی برای داده‌های آموزش و تست نشان داده شده‌اند.

شکل ۵-۱: درصد خطای حاصل از (MLP) به ازای تعداد نرون‌های مختلف

تعداد نرون‌ها	درصد خطای مربوط به داده های	درصد خطای مربوط به داده های تست
۲	۵,۶۹۱۵	۴,۵۳۶۱
۳	۵,۳۷۶۴	۵,۰۹۶۵
۴	۱۰,۵۱۶۶	۱۱,۳۵۸۳
۵	۵,۵۲۹۷	۴,۴۹۲۸
۶	۴,۷۶۵۹	۸,۲۵۰۹
۷	۶,۵۷۲۰	۱۴,۸۸۴۴
۸	۴,۹۳۷۴	۵,۷۷۳۰

۶,۹۴۶۵	۵,۴۳۶۶	۹
۹,۱۵۹۹	۴,۷۲۹۶	۱۰

۴-۶- مدلسازی خروجی هزینه با استفاده از شبکه نروفازی انفیس:

در انتها مدل سازی متغیر وابسته ی هزینه را شبکه نروفازی انفیس انجام می دهیم. باز هم مثل حالت انجام شده برای متغیر درآمد از روش خوشه بندی کاهشی برای تولید مدل اولیه شبکه انفیس استفاده می کنیم. شعاع اثر مناسب برای این متغیر عدد ۰,۹۵ به دست می آید:

شکل ۴-۲۴: درصد خطای شبکه نروفازی (ANFIS) به ازای شعاع تأثیر متفاوت مراکز خوشه بندی

شعاع	درصد خطای مربوط به داده های	درصد خطای مربوط به داده های تست
۰,۸	۹,۸۳۴۷	۸,۱۴۲۰
۰,۹	۱۳,۴۷۱۹	۱۳,۲۴۱۰
۰,۹۵	۷,۷۸۳۲	۶,۶۷۴۹

۵- نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات:

نتایج حاکی از این است که می توان از این روش جهت ارائه تخمین هایی مناسب برای آینده و نیز ارزیابی وضعیت فعلی بهره برد. روش کار انجام شده در این تحقیق، بدین صورت است که ابتدا از بین تمام داده های جمع آوری شده برای پیش بینی هزینه و درآمد، اقدام به یافتن آن دسته از متغیرهای مستقلی می کنیم که دارای بیشترین میزان همبستگی با هر کدام از خروجی ها می باشند. با بررسی سه ساختار مختلف جدولهای ذیل به این نتیجه می رسیم که شبکه های عصبی (MLP) نتایج بهتری نسبت به رگرسیون خطی و الگوریتم فازی- تطبیقی دارد. لذا می توان سیستم حاصل را به عنوان ابزار مناسبی جهت پشتیبانی از تصمیم گیری در سطح اطمینان حدود ۹۰ درصدی عنوان نمود که در تعیین قیمت اقتصادی قرارداد بیمه اجتماعی به کمک پیش بینی هزینه و درآمد فرد می تواند موثر عمل نماید. به دیگر سخن می توان این ابزار را نه فقط برای بیمه شدگان حاضر بلکه برای بیمه شدگان جدیدی که هیچ سابقه بیمه ای نزد تامین اجتماعی ندارند را موثر دانست.

مرجع ها :

۱. رضوانی، مهران، جعفرنژاد، احمد، اسماعیلیان، مجید؛ "مکان یابی مراکز توزیع با استفاده از مدل برنامه ریزی غیر خطی عدد

صحیح"، مجله مدرس، پاییز ۸۸

1. Anna Rita Bacinello, Enrico Biffis, Pietro Millosovich. Pricing life insurance contracts with early.

- exercise features. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2009) 27_35
- Bellman, R., Zadeh, L.A., 1970. Decision-making in a fuzzy environment. *Manage. Sci.* 17, 2 .141–164.
- 3.Derrig, R.A., Ostaszewski, K.M., 1994. Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification. In: *Proceedings of the 4th AFIR International Colloquium*, 1, pp. 141–171.
- 4.Derrig, R.A., Ostaszewski, K.M., 1995a. Fuzzy techniques of pattern recognition in risk and claim classification. *J. Risk Insur.* 62, 447–482.
- 5.Derrig, R.A., Ostaszewski, K.M., 1995b. The fuzzy problem of hedging the tax liability of a property-liability insurance company. In: *Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium*, vol. 1, pp. 17–42.
- 6.Derrig, R.A., Ostaszewski, K.M., 1997. Managing the tax liability of a property-liability insurance company. *J. Risk Insur.* 64 (4), 695–711.
- 7.Derrig, R.A., Ostaszewski, K.M., 1999. Fuzzy sets methodologies in actuarial science. In: Zimmerman, H.J. (Ed.), *Practical Applications of Fuzzy Technologies*. Kluwer Academic Publishers, Boston (Chapter 16).
8. Joseph, E.C., 1982. Future expert computer systems for actuarial professionals. *ARCH* 1, 1–9.
- 9.Shapiro, A.F., 2002. The merging of neural networks, fuzzy logic, and genetic algorithms. *Insur. Math. Econ.* 31, 115–131.
- 10.Shapiro, A.F., 2003. Capital market applications of neural networks, fuzzy logic and genetic algorithms. In: *Proceedings of the 13th International AFIR Colloquium*, vol. 1, pp. 493–514.
- 11.Young, V.R., 1993. The application of fuzzy sets to group health underwriting. *Trans. Soc. Actuaries* 45, 551–590.
- 12.Young, V.R., 1996. Insurance rate changing: a fuzzy logic approach. *J. Risk Insur.* 63, 461–483.
- 13.Young, V.R., 1997. Adjusting indicated insurance rates: fuzzy rules that consider both experience and auxiliary data. *Proc. Casualty Actuarial Soc.* 84, 734–765.
- 14.Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets. *Inform. Control* 8, 338–353.
- 15.Zadeh, L.A., 1975/1976. The Concept of Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning (Parts 1–3). *Information Sciences*, vol. 8, pp. 199–249, 301–357, and vol. 9, 43–80.

بهره در بازار اسلامی

کامران آیتی^۱

^۱ دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی .

Ka.ayati@gmail.com

چکیده: در این مقاله تلاش شده است تا با تعریف پایه بهره اسلامی و عدد اجتماع راهی برای توزیع درآمدهای جامعه به عنوان اعتبار مالی هر فرد شهروند جامعه اقتصاد اسلامی ارائه شود.

کلمات کلیدی: بهره اسلامی عدد اجتماع متریک های زندگی

طبقه بندی موضوعی: 91B32-91B38-91B76 -O23-O42

۱ مقدمه

در بازار اسلامی با وجود تئوری های مختلف اسلامی و محض در خصوص مدل سازی بازار و در این مقاله رویکرد بهره در بازار اسلامی کلان نگر بودن و عام شامل همه افراد جامعه اسلامی از جهت بهره مندی و به تعبیر امروزی رانت گریزی از موارد مهم در طراحی مدل کاربردی عملی ریاضی آن می باشد. بر این اساس مشاهده مواردی از قبیل توزیع ناعادلانه دارایی ها و ثروت و انفال و مالکیت ها در بین مردم ساکن جامعه اسلامی اعم از مسلمان یا غیر مسلمان (شهروند جامعه اسلامی) می تواند عدم دانش یا مهارت کافی در اجرای مدل ها و یا شجاعت پذیرش ناکارآمدی مدل های قبلی و بهبود مدل ها را نمایان سازد.

پیشینه مدل سازی بهره در بازار اسلامی و تعبیر فلسفی جامعه شناختی و زبان شناختی آن و حتی کپی برداری از مدل های اجرا شده در جوامع اسلامی دیگر با توجه به وجود دینامیک رفتاری افراد متفاوت در جامعه هدف از ابتدا ناکارآمدی آن مدل ها را حداقل در تئوری نمایان می سازد. همانگونه که کپی برداری صرف از کاپیتالیسم و سوسیالیسم و اسلامیسیم و مکاتب دیگر بدون نگرش پساساختارگرایانه وابسته به بوم واقلیم اجرا که از لوازم هزاره سوم میلادی می باشد باعث عدم موفقیت تضمینی مدل خواهد بود.

هدف و انگیزه نویسنده در این مقاله استفاده از تعریف عام بهره در دو حالت محض و کاربردی برای بهبود اجرای مدل بهره در بازار اسلامی می باشد. بهره در دیدگاه محض اسلامی با توجه به ایجاد ارزش افزوده حاصل از تلاش ذهنی یا فیزیکی ارائه دهنده خدمت یا کالا به بازار اسلامی عبارتست از ارزش پولی زمان سپری شده عمده

ذهنی (کارگر فکری) یا عمله جسمی (کارگر فیزیکی). پس وجود مفهومی به نام ارزش مرکب حاصل از دستمزد ذهن یا بازوی کارگر ذهن یا کارگر جسمی در صورت نکول پرداخت وجود نخواهد داشت و صرف دین پرداخت خسارت زده باید انجام شود. این در صورتیست که بازار کامل اسلامی میباشد و در بحث تبادل بین بازار اسلامی و غیر اسلامی محاسبه تفاوت دینامیک نرخ بهره پارادایم محاسباتی در مقالات دیگر نویسنده ارائه خواهد شد. اما در تعریف کاربردی بهره که بیشتر در روی زمین و به صورت عینی قابل ملاحظه می باشد تقسیم زمین اقتصاد بازار اسلامی به مثابه زمین بازی در تئوری بازی ها همواری باید مشاهده شود و یا حداقل ناهمواری با اندازه بیکران مشاهده نشود تا همه سنین و افراد و توانمندی های مختلف جامعه بازار اسلامی بتوانند در آن به رشد خود ادامه دهند. در ادامه مقاله که بدنه اصلی مقاله می باشد به این رویکرد خواهیم پرداخت .

بهره به معنای سود و فایده مادی حاصل از فروش حاصل از ارائه کالا و خدمات به جامعه در جهت توسعه اصالت فایده است و معنی بهره به معنای انبار کردن کالا و خدمات (احتکار کالا و خدمات) در بازار اسلامی به معنای حرص ورزیدن دارنده کالا یا خدمت برای ایجاد نیاز مصنوعی و موقت و تغییر رفتار نیاز طبیعی عرضه و تقاضای کالا و خدمت به علت مذموم بودن امر حرص و صفت مهجور کردن سایر مسلمانان و بالطبع آحاد بشر امری غیر اخلاقی و ضد اقتصاد اسلامی است. حال اگر در دنیای مدرن با وجود ابزار های مدرن و وجود سیستم های برنامه ریزی خطی در تولید کالا و خدمات و روش های بهینه سازی مناسب جهت یافتن ناحیه محدب اقتصادی جهت تعیین قیمت کالا و خدمات با توجه به برنامه ریزی منابع داخلی هر اقلیم و بوم به علت استفاده نادرست مدیریتی کارشناسی یا جهل و کمبود دانش و مهارت علمی در محاسبه امر محاسبه پذیر عرضه و تقاضای سرانه بازار هر مصرف کننده خاص (مدل های هوشمند) و عام (مدل های آماری و نمونه گیری) بر اساس علوم (پزشکی زیستی روانشناسی کشاورزی و جغرافیا) این عدم تعادل در بازار اسلامی رخ نماید که عرضه یا تقاضای مصنوعی حاصل از موارد گفته شده بر تولید کننده یا مصرف کننده به صورت روانی یا عام تر مصنوعی به مدت کوتاه یا به صورت مزمن غلبه پیدا کند و مازاد کالا یا خدمات یا کمبود کالا و یا خدمات باعث ایجاد نیاز خارج از نمودار توزیع طبیعی گردد خارج از پیدا کردن مقصر بحث از نظر حقوقی که خارج از حیطه این مقاله می باشد و به علوم اجتماعی جامعه شناسی رفتارشناسی و حقوق مربوط می گردد در عمل بازار اسلامی با مقداری افزایش (مازاد) کاهش (کمبود) کالا یا خدمت به صورت مصنوعی موقت یا مزمن مواجه خواهد شد که راهبری بازار در پیاده سازی و مدل سازی عملی برخورد با آن حائز اهمیت است. برای خروج از آن راهکارهای الزام آوری در اینجا ارائه میشود و سپس به مفهوم نرخ بهره خارج از حالت نرمال به منظور میل دادن آن به حالت طبیعی و نرخ بهره در حالت طبیعی برای قیمت کالا یا خدمت با توجه به معنی ابتدای مقاله خواهیم پرداخت .

۱- استفاده از علم برنامه ریزی خطی در حل مشکل و کنترل پروژه جهت مدیریت زمان بندی اجرا.

۲- استفاده از مواد اولیه دانش و مهارت داخلی هر اقلیم و بوم جهت حل مشکل به صورت محلی با استفاده از اولویت درخت تصمیم .

۳- استفاده و تشکیل بانک مدیریت دانش و منابع انسانی هر اقلیم و بوم و سیستم های توزیع منابع انسانی داخلی.

۴- اطلاع رسانی لحظه ای و برخط به صورت عدد تقاضا و عدد عرضه در هر اقلیم برای جمعیت هر اقلیم در حالت طبیعی و غیر طبیعی

و اما به علت گفته شده در سطور فوق بازار به صورت مصنوعی دارای انباشت یا کاهش کالا و خدمات در عرضه و تقاضا در بازارهای مختلف پولی مالی و.... شده است و زنجیروار بدنه اقتصاد بازار را دچار به عبارت علمی ضریب چولگی مختلف خواهد نمود.

به این منظور در صادرات یا واردات ارجحیت های قیمتی در بیرون از بازار اسلامی میتواند موج یا دینامیک خاصی را به بازار اسلامی وارد یا از آن خارج نماید صرف ورود و یا خروج مهم نمیباشد اما وقتی صادرات با قیمت بالاتر (به مفهوم خروج مواد اولیه یا دارای ارزش شده حاصل از تکنولوژی و پردازش مواد یا خدمات باعث ایجاد نقصان در بازار داخل شده یا به مفهوم ورود کالا یا خدمت با قیمت بالاتر ایجاد کننده چولگی در بازار تولیدی داخل ارزانتر (غیر عقلایی) و یا قیمت پایین تر (به مفهوم حفظ منابع داخلی در آن کالا و صادرات کالای دیگر به خارج با ارزش بالاتر از ارزش وارد شده (تراز تجاری +)) باعث ایجاد نقصان در بازار داخلی اقلیم یا بوم شود یعنی متریک ها اندازه ها و پارامترهای زندگی مادی و معنوی آن اقلیم دچار نوسان خارج از انحراف معیار عدد اجتماع آن جامعه شود این دینامیک باید توسط مدیریت توسط ۴ اصل ذکر شده به بهینگی منجر شود.

تعریف عدد اجتماع : عددی که حاصل از درآمد ملی و تولید ناخالص بدست می آید :

$$\dot{P} = \frac{GNP}{\text{جمعیت آن سال}} \quad P = \frac{GDP}{\text{جمعیت آن سال}}$$

در اقتصاد اسلامی محاسبه نرخ های فوق بر اساس روش بدون بازده و تنها با استفاده از روش عادی وجود کالا یا خدمت در هر اقلیم خواهد بود تا بعد از توسعه متوازن افراد بازار در اثر پیشرفت زمان کیفیت و بازده کالا و خدمات خود را در محصول های بعدی نشان خواهد داد و باعث تقسیم منابع و قیمت ها بین مردم به صورت ارزش مالی خواهد گردید.

حال با بدست آمدن دوعدد فوق انحراف معیار عدد اجتماع از محاسبه میانگین در ناحیه محدب اقتصاد و انحراف آن به اندازه $\sigma = \frac{P+\dot{P}}{2}$

در سال و در هر کسر دوره عملیاتی ماهانه در ناحیه نوار بولینجر نمایان خواهد شد.

حداقل سیگما صفر در جامعه آرمانی خردورز اقتصادی و حداکثر خود عدد سیگما محاسبه شده خواهد بود که در فرمول بالا ذکر شده است.

مازاد عرضه و تقاضا یا کمبود کالا و خدمات در حسابداری ملی (هر اقلیم و بوم محلی) برای بدهکار یا بستانکار در سقف یک ماه با قیمت ابتدای ماه خواهد بود و در صورت قوه قاهره و سو مدیریت و عدم آموزش جمعیت (علل ابتدای مقاله) و انتقال این عدد به ماه های بعدی توسط توزیع عام کالا و خدمات به صورت قیمت پایه ماهانه توسط سیگمای محاسبه شده و در اختیار مصرف کننده و تولید کننده به صورت

کالا (با ارایه در بورس کالا) یا تسویه ارزش نقدی روز با توجه به سیگمای محاسبه شده روزانه $\sigma_i = \frac{\sigma}{365}$ خواهد بود که خود روش اول به افزایش رونق در تولید کالا و خدمات از طریق تامین مواد اولیه و خود روش دوم به افزایش سرانه درآمد ملی توزیع شده نادرست بین افراد جامعه در شرایط چولگی (مدیریتی آموزشی دانشی و...) کمک می نماید. در روش اول استفاده از کالا یا خدمت توسط قیمت بورس کالا با محاسبه سیگمای ذکر شده کمک می کند تا نوسان کش قیمت تمام شده در ابتدای زنجیره خدمت یا کالا بر اساس اندازه وابسته به GDP و GNP مدیریت شود و در صورتی که کالا یا خدمت گران شود (مردم مصرف کننده تسویه ارزش روز کرده باشند یا تولید کننده کالا و خدمات با یک دید برون نگر از سال قبل به عنوان متر قیمت مواد اولیه خود را در نظر بگیرد). اما گاهی نرخ تاریخی و وابستگی به پیش بینی آتی حاصل از مواد اولیه در بیرون از بازار اسلامی میتواند ایراد گرفته شده به این مدل باشد که در بازار اسلامی دید بلند تاریخی به گذشته و آینده حداقل در اقتصاد وجود ندارد و این پارادایم به بازار اسلامی کمک می کند تا با حافظه کوتاه مدت یکسال گذشته خود مفهوم اقتصاد روز خود را بازسازی و از انباشت دو نرخ G گفته شده به توسعه آتی بپردازد. زیرا فردا چیزی جز امروز درست و خوب و با بهره مناسب نمی باشد.

دلایل مربوط به عدم دید پیشرو بلند مدت و پسرو بلند مدت خارج از این مقاله می باشد که در مقاله های دیگر قابل ارایه می باشد

تشکر و قدردانی

امیدوارم این مقاله توسعه دهنده مفهوم بهره اسلامی در بین مردم جامعه اسلامی و بازار اسلامی باشد. بالطبع عدم اجرای عملیاتی این نرخ بهره نشان دهنده اسلامی نبودن اقتصاد و تشدید فاصله بین فقیر و غنی می باشد.

مرجع ها

- ۱- مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک - جان هال - ترجمه سیاح صالح آبادی - کارگزاری مفید
- ۲- بدایه الحکمه و نهایت الحکمه - علامه طباطبائی - ترجمه شیروانی - دارافکر

1-CURRENT ISSUES IN ISLAMIC BANKING AND FINANCE- HERITAGE TRUST GROUP, SINGAPORE

2- Islamic Capital Markets- Obiyathulla Ismath Bacha

3-Methodological Dimension of Islamic Economy- Masudul Alam Choudhury (Trisakti University, Indonesia)

حل معادله انتگرال - دیفرانسیل مربوط به مدل ریسک عملیاتی با استفاده از روش تجزیه آد미ان

محمد علی فریبرزى عراقى^۱، طیبه دمرچلی^۲، منصوره رسولی^{۳*}

^۱دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

^۲دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یادگار امام(ره)، دانشکده فنی و مهندسی، گروه ریاضی

چکیده: ریسک عملیاتی یکی از ریسک‌های شناسایی شده در سازمان‌ها بالاخص در بانک‌ها است که دامنه گسترده‌ای داشته و ناشی از خطاهای موجود در عملکرد فردی و یا نقص سیستم یا مشکلات فرآیندی می‌باشد. در این مقاله مدل ریاضی ریسک عملیاتی برای محاسبه احتمال بقای سازمان ارائه شده که به شکل یک معادله انتگرال- دیفرانسیل جزئی ولترا می‌باشد با به کار گیری روش تجزیه آدومیان حل می‌شود. همه سازمان‌ها و بالاخص بانک‌ها به اتکای سرمایه خود در مقابل زیان‌های ناشی از ریسک‌های عملیاتی ایستادگی می‌کنند. با وجود اینکه در بهترین حالت نیز ممکن است بانکی با موقعیت سرمایه ای مناسب در اثر حوادث ناگوار از پای درآید، لیکن بررسی‌ها نشان داده ابعاد فاجعه آمیز بحران‌های بانکی ناشی از ریسک عملیاتی در مورد بانک‌هایی که وضعیت سرمایه‌ای مناسب‌تری دارند، محدودتر است. زیرا یک بانک با سرمایه کافی زمان بیشتری را برای بررسی مشکلات و مواجهه صحیح با آن‌ها در اختیار دارد.

کلمات کلیدی: ریسک عملیاتی، معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا، احتمال بقا، روش تجزیه آدومیان

طبقه بندی موضوعی: ۴۵K۰۵, ۴۵D۰۵, ۶۵R۲۰

۱ مقدمه

سازمان‌ها ملزم به ذخیره‌گیری در برابر زیان‌های احتمالی ناشی از ریسک‌های گوناگون از جمله ریسک عملیاتی هستند. ریسک عملیاتی یکی از مهمترین ریسک‌هایی است که بانک‌ها با آن مواجهند و تقریباً ۱۵ تا ۲۵ درصد از کل سرمایه در بسیاری از بانک‌های بزرگ از جمله HSBC به آن تخصیص یافته است. به طور معمول، ریسک عملیاتی پس از ریسک اعتباری بزرگترین ریسک از نظر شدت و زیان برای بانک‌ها است. مدیریت ریسک عملیاتی به دلایل مختلف در کسب و کار در حال افزایش است و باید به طور دائم شناسایی، پایش، کنترل، اندازه گیری و مدیریت شود [1][3].

۲- بیان مساله

* منصوره رسولی

بانک‌ها به اتکای سرمایه خود در مقابل زیان‌های ناشی از ریسک‌های عملیاتی ایستادگی می‌کنند. با این وجود که در بهترین حالت نیز ممکن است بانکی با موقعیت سرمایه‌ای مناسب در اثر حوادث ناگوار از پای درآید، لیکن پژوهشگران زیادی از بررسی‌هایی نام می‌برند که نشان داده ابعاد فاجعه آمیز بحران‌های بانکی ناشی از ریسک عملیاتی در مورد بانک‌هایی که وضعیت سرمایه‌ای مناسب‌تری دارند، محدودتر بوده است. زیرا یک بانک با سرمایه کافی زمان بیشتری را برای بررسی مشکلات و مواجهه صحیح با آن‌ها در اختیار دارد [2].

۱-۲- معرفی مدل ریسک عملیاتی:

برخی از مدل‌های حاصل از مسائل فیزیکی، فنی و اقتصادی منجر به یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی می‌گردد. مدلی که برای مدیریت ریسک یک کسب و کار حاصل شد بر اساس رابطه زیر مطرح گردید:

ذخیره ریسک = ذخیره اولیه + مجموع درآمدهای بانک - مجموع زیان‌ها

لادوپولوس [4] با استفاده از یک روش ریاضی مدرن، وقتی که ذخیره اولیه ریسک موجود باشد، احتمال یک مدل ریسک عملیاتی را تخمین زد. در مدل ارائه شده توسط وی ذخیره ریسک $Z(s)$ در زمان S به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R(z, t) = P[Z(s) > 0, 0 \leq s \leq t, Z(0) = z]$$

اندازه زیان در زمان t که با X_t نمایش داده می‌شود فرض شده که دارای تابع توزیع $D(x) = P[X_t \leq x]$ بر حسب تابع چگالی $d(x)$ بوده و فرض می‌شود که بر حسب فرآیند پواسن N_t با پارامتر μ محاسبه شده است. بنابراین:

$$P_n(t) = P[N_t = n] = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

مجموع زیان‌ها در رابطه لادوپولوس [4] از جمع زیر به دست می‌آید:

$$U_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_{t_i}$$

که X_i شدت ریسک عملیاتی در زمان t و N فراوانی است.

در این مدل فرض شده است که حق بیمه اضافی با نرخ پیوسته $a(r)$ ذخیره شده است که به ذخیره اخیر $Z(t) = r$ وابسته می‌باشد. همچنین، در زمانی که زیانی وجود ندارد، فرض شده است که ذخایر در معادله قطعی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = a(Z(t))$$

در روش وی، مسئله (۱) به حل یک معادله انتگرال-دیفرانسیل جزئی ولترا تبدیل شده و آنرا با استفاده از روش چندجمله‌ای لاگرانژ به صورت عددی حل کرده است.

لادوپولوس با ترکیب نحوه محاسبه زیان‌ها به مدل زیر رسیده است:

$$\frac{\partial R(z, t)}{\partial t} = -\mu R(z, t) + a(z) \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} + \mu \int_0^z R(z-y, t) dD(y)$$

با شرایط اولیه:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z, t) = 1, \quad R(z, 0) = 1, \quad z \geq 0 \\ R(z, t) = 0, \quad z < 0$$

که در آن:

$R(z, t)$ تابع احتمال بقا با ذخیره ریسک z در زمان t ,

$Z(t)$ ذخیره ریسک در زمان t ,

z ذخیره ریسک اولیه،

D تابع توزیع x .

۳- احتمال ریسک عملیاتی: با کاهش احتمال وقوع رویدادهای ریسک می‌توان زیان‌های ناشی از ریسک‌های عملیاتی را کاهش داد و از این طریق، آسیب پذیری بانک را نسبت به حوادث مذکور به حداقل ممکن رساند. از آنجا که ارزش زیان مورد انتظار نتیجه حاصل ضرب دو عامل احتمال وقوع ریسک عملیاتی و خسارت ناشی از وقوع یا تاثیر ریسک است تقلیل هر یک از این دو عامل می‌تواند به کاهش ارزش زیان مورد انتظار بیانجامد. از این رو در ارزیابی ریسک‌های عملیاتی، احتمال وقوع رویدادهای ریسک و خسارات ناشی از آن‌ها توسط واحدهای کاری محاسبه می‌شود. معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا (۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial R(z, t)}{\partial t} = -\mu R(z, t) + a(z) \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} + \mu \int_0^z b(z-y) R(y, t) d(y) \quad (۳)$$

$$R(\infty, t) = 1, \quad t \geq 0, \quad R(z, 0) = 1, \quad z \geq 0$$

که در آن $a(Z(t)) = a_0 + \gamma Z(t)$ و $b(z) = \alpha e^{-\alpha z}$

جواب دقیق این معادله یعنی احتمال بقا براساس ذخیره ریسک z در زمان t عبارت است از [7]:

$$R(z, t) = 1 - \frac{\gamma}{\gamma + \alpha \beta_0} e^{-\alpha z} (1 - e^{-(\gamma + \alpha \beta_0)t})$$

۴- روش تجزیه آدومیان

در سال‌های اخیر روش تجزیه آدومیان بالاخص در ریاضیات کاربردی و به ویژه در زمینه جواب‌های سری مورد توجه قرار گرفته است. این روش توسط جرج آدومیان به منظور حل انواع مسائل خطی و غیرخطی ارائه شد و توسط وزواز توسعه یافت [6]. در این روش جواب معادله (۳) به صورت سری زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$R(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z, t) \quad (۵)$$

تعریف می‌کنیم: $\frac{\partial R(z, t)}{\partial t} = R_t(z, t)$ و $\frac{\partial R(z, t)}{\partial z} = R_z(z, t)$ لذا از رابطه (۳) داریم:

$$R_t(z, t) = -\mu R(z, t) + a(z) R_z(z, t) + \mu \int_0^z b(z-y) R(y, t) d(y) \quad (۶)$$

با تعریف عملگر $L_t R = \frac{\partial}{\partial t} R$ و $L_z R = \frac{\partial}{\partial z} R$ که در آن $R = R(z, t)$ و با در نظر گرفتن شرایط اولیه رابطه زیر از (۶) حاصل می‌شود:

$$R(z, t) = 1 + L_t^{-1}(-\mu R(z, t) + a(z)R_z(z, t) + \mu \int_0^z b(z-y)R(y, t)d(y))$$

با استفاده از (۵) و جایگذاری آن در (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z, t) &= 1 + L_t^{-1}(-\mu \sum_{n=0}^{\infty} R_n(z, t) + a(z)L_z\left(\sum_{n=0}^{\infty} R_n(z, t)\right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \mu \int_0^z b(z-y)R_n(y, t)d(y)) \end{aligned}$$

$$R_0 + R_1 + R_2 + \dots =$$

$$1 + L_t^{-1}(-\mu(R_0 + R_1 + R_2 + \dots) + a(z)L_z(R_0 + R_1 + R_2 + \dots) + \mu \int_0^z b(z-y)(R_0 + R_1 + R_2 + \dots)d(y))$$

با مساوی قرار دادن طرفین معادله (۹) خواهیم داشت:

$$R_0(z, t) = 1$$

$$R_1(z, t) = L_t^{-1}(-\mu(R_0(z, t)) + a(z)L_z(R_0(z, t)) + \mu \int_0^z b(z-y)(R_0(y, t))d(y))$$

$$R_2(z, t) = L_t^{-1}(-\mu(R_1(z, t)) + a(z)L_z(R_1(z, t)) + \mu \int_0^z b(z-y)(R_1(y, t))d(y))$$

•
•
•

$$R_{m+1}(z, t) = L_t^{-1}\left(-\mu(R_m(z, t)) + a(z)L_z(R_m(z, t)) + \mu \int_0^z b(z-y)(R_m(y, t))d(y)\right)$$

لذا با توجه به همگرایی روش آدومیان [5] برای محاسبه جواب نهایی با جمع تعداد متناهی از جملات سری (۵) خواهیم داشت:

$$R_m(z, t) = \sum_{n=0}^m R_n(z, t)$$

نتیجه حاصل برای $R_m(z, t)$ برای هر مقدار z و t عددی بین صفر و یک است.

۵- نتایج عددی

الگوریتم زیر مراحل اجرای روش تجزیه آدومیان برای یافتن جواب مدل ریسک عملیاتی (۳) را بیان می کند. نتایج مذکور در جداول با استفاده از نرم افزار متمتیکا به دست آمده است.

گام ۱: مقادیر اولیه و پارامترها را معرفی کنید.
 گام ۲: مقدار دقیق احتمال را از رابطه (۴) محاسبه کنید.
 گام ۳: عملگر مشتق و معکوس آن را مطابق رابطه (۷) تعریف کنید.
 گام ۴: تابع مجهول احتمال را بر اساس عملگر معکوس مشتق مطابق (۷) تعریف کنید.
 گام ۵: در یک حلقه مقادیر تابع احتمال $R_1(z, t)$ تا $R_m(z, t)$ را مطابق (۱۰) به دست آورید.
 گام ۶: مجموع جملات را در قالب یک سری مطابق (۱۱) به عنوان تابع احتمال در نظر بگیرید.
 شرط توقف برای m در گام ۵، با در نظر گرفتن میزان دقت ε ، برقراری رابطه زیر در محاسبات روابط (۴) و (۱۱) به ازای یک z و t مفروض است:

$$|R(z, t) - R_m(z, t)| \leq \varepsilon$$

نتایج حاصل از روش تجزیه آدومیان به ازای t های مختلف و مقادیر معلوم پارامترها در جداول زیر آمده است:

$$\gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1, z = 1$$

t	جواب دقیق	جواب روش آدومیان	m	خطا
۱	۰,۸۸۳۴۷۸۷۳	۰,۸۸۳۴۷۸۷۳	۳۰	0.
۲	۰,۸۷۷۶۷۷۴۸	۰,۸۷۷۶۷۷۴۸	۳۰	0.
۳	۰,۸۷۷۳۸۸۶۵	۰,۸۷۷۳۹۳۰۹	۳۰	۰,۰۰۰۰۰۴۴۴
۴	۰,۸۷۷۳۷۴۲۷	۰,۸۷۷۱۹۸۱۳	۳۵	۰,۰۰۰۱۷۶۱۴

$$\gamma = 1, \mu = 1, \alpha = 1, z = 2$$

t	جواب دقیق	جواب روش آدومیان	m	خطا
۱	۰,۹۵۷۱۳۴۲۲	۰,۹۵۷۱۳۴۲۲	۳۰	0.
۲	۰,۹۵۵۰۰۰۰۶	۰,۹۵۵۰۰۰۰۶	۳۰	0.
۳	۰,۹۵۴۸۹۳۸۱	۰,۹۵۴۸۹۵۴۴	۳۰	۰,۰۰۰۰۰۱۶۳
۴	۰,۹۵۴۸۸۸۵۲	۰,۹۵۴۸۲۳۷۲	۳۵	۰,۰۰۰۰۶۴۸

با توجه به مندرجات جدول و جواب‌های به دست آمده نتایج زیر قابل استنباط است:

- با افزایش ذخیره ریسک از ۱ به ۲ احتمال بقای سازمان افزایش می‌یابد و این یعنی احتمال بقای سازمان در زمان یکسان با ذخیره ریسک ارتباط معناداری دارد.
- با گذشت زمان وقتی ذخیره ریسک ثابت بماند احتمال بقای سازمان کاهش می‌یابد.
- میزان خطا وابسته به تعداد جملات محاسبه شده در مجموع متناهی حاصل است.

مرجع‌ها

۱. اصول مدیریت ریسک، بخش نخست ترجمه سند بال ۲، ترجمه صدقی و همکاران، <https://www.cbi.ir/>

1. Basel Committee on Banking Supervision, Working paper on the Regulatory Treatment of operational Risk, Bank for International Settlements.2001b, 39, pp.1-39
2. H. Buhlmann,, Shevchenko, P.V, Wuthrich, M.V, A “toy” model for operational risk quantification using credibility theory. The Journal of Operational Risk2(1),2007, pp.3-19
3. E.G. Ladopoulos, Non-linear Integro-differential Equations for Risk Management Analysis: Further Developments Spaces’, Universal Journal of Integral Equations 4, 2016, pp.13-20
4. I.L. El-Kalla, Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations, Applied Mathematics Letters 21,2008, pp.372–376
5. A.-M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
6. C. Knessl and C.S. Peters. Exact and asymptotic solutions for the time dependent problem of collective ruin. I. SISM J. Appl.Math.,54, 1994, pp.1745-1767.

انتخاب سبد بهینه با در نظر گرفتن افق زمانی و هزینه معاملات با استفاده از بیشینه افت و واریانس به عنوان معیار ریسک

مینا روستاپور دیلمانی (minarpd@aut.ac.ir)

*دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی مالی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده: در این مقاله مسئله تعدیل سبد موجود با در نظر گرفتن هزینه تغییرات مورد مطالعه قرار میگیرد. این هزینه ها میتواند به صورت ثابت باشند (که صرف نظر از مقدار معامله شده، در صورتی که معامله انجام شود، پرداخت میشود). و یا این هزینه ها میتواند متغیر (با توجه به مقدار معامله شده از هر دارایی که مقدار آن به ازای دارایی های مختلف متفاوت میباشد) باشد. همچنین اهمیت تعیین افق سرمایه گذاری را شرح می دهیم. در مدل مارکوویتز از واریانس به عنوان معیار اندازه گیری ریسک استفاده میشود، که با کاهش یا کنترل آن ضمن افزایش بازده، سبدی کارا بدست خواهد آمد. در این مقاله علاوه بر واریانس، از امید بیشینه افت در حرکت براونی به عنوان معیار دیگری از ریسک استفاده میکنیم. که سبب جلوگیری از ریزش ارزش سبد در طول افق سرمایه گذاری مان میشود. در انتها مدل ارائه شده را بر روی مجموعه شرکت های سهام عدالت در بازار بورس ایران پیاده سازی میکنیم.

کلمات کلیدی: مدل مارکوویتز، سبد کارا، بیشینه افت، حرکت براونی

۱. مقدمه

به منظور تشکیل یک سبد از دارایی های مالی رویکرد اولیه ای که اتخاذ کرده ایم، نتیجه گرفته شده از مدل مارکوویتز می باشد. در مدل مارکوویتز هدف، افزایش میانگین بازده سبد ضمن کنترل یا کاهش ریسک است که واریانس به عنوان ریسک تعریف میشود. مدل مارکوویتز تک مرحله ای و بدون افق سرمایه گذاری میباشد و هزینه معاملات در آن لحاظ نمیشود. در این مقاله هزینه معاملات به دو صورت ثابت و متغیر در نظر گرفته میشود و از این رو افق سرمایه گذاری برای ما حائز اهمیت است. همچنین علاوه بر واریانس از بیشینه افت به عنوان معیار دیگری از ریسک در مدل استفاده میشود.

۱-۱ شرح و انگیزه مقاله

اگر بخواهیم با سرمایه $100\$$ از بین دو سبد سرمایه گذاری a و b که هرکدام دارای بازده 3% و 5% در هر دوره هستند یکی را انتخاب کنیم. تحت این شرط که هزینه سرمایه گذاری در هر کدام به ترتیب $25\$$ و $50\$$ باشد، تعداد دوره های سرمایه گذاری بر تصمیم ما اثر میگذارد. به وضوح سبد b دارای بازده بیشتری است اما به علت وجود هزینه معامله، تحت مقادیر مختلف H ، تصمیم گیری ما فرق خواهد کرد.

$$H = 21.08 \quad \text{بنابراین} \quad 50(1.05)^H = 75(1.03)^H$$

پس بدیهی است که اگر H (تعداد دوره ها) بیشتر از ۲۱ باشد بازده ما در پایان دوره ها در سرمایه گذاری روی سبد b بیشتر است. و اگر H کمتر از ۲۲ باشد. بازده سبد a در پایان دوره ها بیشتر خواهد بود. در حالت کلی تر به ازای $H=9.73$ ، $75(1.03)^H = 100$ در نتیجه اگر تعداد دوره های سرمایه گذاری ما کمتر از ۹ دوره باشد بهتر است سرمایه گذاری در هیچ یک از دو سبد فوق انجام نشود از این رو انتخاب افق زمانی مناسب در مدل، برای ما حائز اهمیت می باشد.

هزینه معاملات به دو صورت ثابت و متغیر است. هزینه ثابت مستقل از حجم معامله می باشد و در صورت انجام هر معامله ای باید مبلغ ثابتی پرداخت شود. هزینه متغیر متناسب با ارزش معامله در نظر گرفته می شود که به دو صورت توابع $concave$ و $V\text{-shape}$ محاسبه می شود. در توابع $V\text{-shape}$ هزینه معامله به صورت ضریبی از ارزش آن است. و در توابع $concave$ هزینه معامله تابعی مقعر از ارزش آن می باشد. در این مقاله هزینه معاملات هم به صورت ثابت و هم به صورت متغیر از نوع $V\text{-shape}$ در نظر گرفته شده است. [1]

در تشکیل یک سبد از دارایی های مالی، علاوه بر در نظر گرفتن افزایش بازده و کاهش واریانس سبد، کم کردن بیشینه افت نیز به عنوان یک معیار ریسک حائز اهمیت است، چرا که در مسئله نقد کنندگی سبد پیش از اتمام افق زمانی، در صورت وجود افت قابل ملاحظه ارزش سبد، مجبور به خروج با بازده منفی خواهیم شد. که خصوصاً برای شرکت های سبد گردانی و صندوق ها این امر موجب زیان زیادی خواهد شد. بنابراین ما باید افت را در طول افق سرمایه گذاری مان همواره کنترل کنیم. به علاوه افت های زیاد تحمل روانی سرمایه گذاران را نیز به چالش میکشد و ممکن است سبب خروج نقدینگی از بازار شود. [2]

۲. پارامتر و متغیر و قیود مدل

N	تعداد دارایی ها
P_i	قیمت کنونی دارایی i ام
X_i	تعداد دارایی i ام در سبد اولیه
μ_i	امید بازده دارایی i ام
S_i	انحراف معیار بازده دارایی i ام
ρ_{ij}	همبستگی بین بازده دارایی i و j
σ_{ij}	کوواریانس بازده بین دارایی i و j ($\sigma_{ij} = S_i S_j \rho_{ij}$)
f_i^b, f_i^s	کارمزد ثابت در صورت انجام معامله دارایی i ام (خرید: b فروش: s)

c_i^b, c_i^s	هزینه معامله به ازای هر واحد از دارایی i ام (خرید: b فروش: s)
L_i^b, L_i^s	حداقل تعدادی که میتوان از دارایی i ام خرید / فروخت
U_i^b, U_i^s	حداکثر تعدادی که میتوان از دارایی i ام خرید / فروخت
K	کران بالا بر روی مجموع هزینه هایی که به عنوان کارمزد میپردازیم (باید مجموع $K >$)
V	مقدار وجه نقد
H	تعداد دوره های افق سرمایه گذاری
$\overline{D}$	بیشینه افت (maximum drawdown)
x_i	تعداد موجود از دارایی i ام در سبد تعدیل شده نهایی ($0 \leq x_i$)
α_i^b, α_i^s	متغیر باینری در صورت انجام معامله = 1 یا عدم انجام معامله = 0 در حالت خرید/فروش
y_i^b, y_i^s	تعداد دارایی خریداری شده / فروخته شده از دارایی i ام ($0 \leq$)
w_i	وزن تخصیص داده شده از کل ارزش سبد اولیه و وجه نقد به دارایی i ام در سبد نهایی) ($0 \leq w_i \leq 1$)
w_0	وزن تخصیص داده شده از کل ارزش سبد اولیه و وجه نقد به پرداخت کارمزدها) ($0 \leq w_0 \leq 1$)

$$i = 1, \dots, N \quad (1)$$

$$L_i^b \alpha_i^b \leq y_i^b \leq U_i^b \alpha_i^b$$

$$i = 1, \dots, N \quad (2)$$

$$L_i^s \alpha_i^s \leq y_i^s \leq U_i^s \alpha_i^s$$

$$i = 1, \dots, N \quad (3)$$

$$\alpha_i^b + \alpha_i^s \leq 1$$

$$i = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$x_i = X_i + y_i^b - y_i^s$$

$$\sum_{i=1}^N (c_i^b y_i^b + c_i^s y_i^s + f_i^b \alpha_i^b + f_i^s \alpha_i^s) \leq D \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N P_i X_i = \sum_{i=1}^N P_i X_i + V - \sum_{i=1}^N (c_i^b y_i^b + c_i^s y_i^s + f_i^b \alpha_i^b + f_i^s \alpha_i^s) \quad (6)$$

$$w_i = P_i X_i / (\sum_{k=1}^N P_k X_k + V) \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

$$w_0 = \sum_{i=1}^N (c_i^b y_i^b + c_i^s y_i^s + f_i^b \alpha_i^b + f_i^s \alpha_i^s) / (\sum_{k=1}^N P_k X_k + V) \quad (8)$$

قید (۱) و (۲) تضمین کننده این است که در صورت خرید/فروش از سهم i تعداد آن کمتر از U_i و بیشتر از Li باشد.

قید (۳) بیانگر این امر است که خرید و فروش از یک سهم به طور همزمان ممکن نیست.

قید (۴) نشان دهنده میزان دارایی از هر سهم پس از تعدیل میباشد. که برابر موجودی اولیه از هر سهم به اضافه میزان خریداری شده از آن منهای میزان فروخته شده از آن است.

قید (۵) جمع کلیه هزینه هایست که بابت کارمزد (چه ثابت چه متغیر) پرداخته شده است. که باید کمتر از مبلغ D باشد.

قید (۶) بیانگر ارزش فعلی داراییمان است که برابر است با ارزش اولیه سبد به همراه وجه نقد در اختیارمان منهای مبلغی که به عنوان کارمزد پرداخت کرده ایم.

قید (۷) وزن ارزش هر سهم در سبد را به ما نشان می دهد.

قید (۸) کل مبلغ پرداخت شده برای هزینه معامله را نسبت به ارزش اولیه سبدمان به همراه وجه نقدی که داریم، نشان میدهد.

لازم به ذکر است که قیود ۶ و ۸ نتیجه میدهند که $\sum_{i=0}^N w_i = 1$ است. پس از نوشتن جداگانه این قید پرهیز شده است.

در این مقاله، کارمزد به عنوان یک دارایی در نظر گرفته شده است. یعنی فرض شده است که با پرداخت مبلغی که همان هزینه کارمزد است یک سهم خریداری شده است که ارزش آن سهم صفر است. یعنی بازدهی آن -1 می باشد.

حال این پارادوکس مطرح میشود که هر چه پول بیشتری بابت کارمزد بدهید ریسک سبدتان کم تر میشود! عبارت فوق منطقی است، چرا که هر چه w_0 بیشتر شود، وزن بقیه w_i ها کمتر میشود. به طوری که اگر کل دارایی مان صرف پراخت کارمزد کنیم و هیچ سهمی خریداری نشود آنگاه ریسک سبد ما صفر میشود! به همین منظور با قرار دادن یک کران بالا برای مجموع کل هزینه معاملات از این امر جلوگیری میکنیم (قید ۵)

۳. بیشینه افت

بیشینه افت یک فرایند تصادفی تا زمان T را میتوان به مقدار سقوط از بلند ترین نقطه در بازه $[0, T]$ تا پایین ترین نقطه آن تعبیر کرد. بیشینه افت در مباحث مالی به عنوانی معیاری از ریسک استفاده میشود. در این مقاله بیشینه افت حرکت براونی را مورد بررسی قرار میدهیم. فرض کنید W_t به ازای $0 \leq t \leq T$ یک فرایند وینر استاندارد باشد. و فرض کنید X_t حرکت براونی با رانش $\mu \in \mathbb{R}$ و پخش $0 \leq \sigma$ باشد پس $X(t) = \sigma W(t) + \mu t$ در دامنه R کمترین و بیشترین مقدار $X(t)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$H = \sup_{t \in [0, T]} X(t) \quad L = \inf_{t \in [0, T]} X(t)$$

حال بیشینه افت را به صورت روبه رو تعریف میکنیم [3]:

$$\bar{D} = \bar{D}(T; \mu, \sigma) = \sup_{t \in [0, T]} \left[\sup_{s \in [0, t]} X(s) - X(t) \right]$$

همانطور که در بخش ۱،۱ توضیح دادیم، هدفمان کم کردن بیشینه افت در طول افق زمانی سرمایه گذاری میباشد. که بدین منظور $E(\bar{D})$ را به عنوان یکی از توابع مسئله چند هدفه مان قرار میدهیم. با توجه کارهای آقای برگر و ویت [3] امید بیشینه افت به صورت روبه رو محاسبه میشود.

$$E(\bar{D}) = \frac{2\sigma^2}{\mu} Q_{\bar{D}}(\mu^2 T / 2\sigma^2)$$

مقدار $Q_{\bar{D}}$ به ازای $\mu \geq 0$ برابر با انتگرال زیر میباشد. که به ازای $\mu = 0$ برابر با $2\gamma\sigma\sqrt{T}$ که $\gamma = \sqrt{\pi/8} \approx 0.6267$ میشود.

$$Q_{\bar{D}}(x) = \int_0^\infty du [e^{-u} \sum_{n=0}^\infty \frac{\sin^3 \theta_n}{\theta_n - \cos \theta_n \sin \theta_n} (1 - \exp\left\{\frac{-x}{\cos^2 \theta_n}\right\}) + \exp\left\{\frac{-u}{\tanh u}\right\} \sinh u (1 - \exp\left\{\frac{-x}{\cosh^2 u}\right\})]$$

4. بازده و ریسک سبد

پس از تعدیل سبد ارزش دارایی ما از هر سهم i برابر با $P_i X_i$ است. فرض کنید r_i متغیر تصادفی باشد که نشان دهنده بازده سهم i در هر دوره است. بنابراین در پایان H دوره، ارزش سبد برابر است با $w = \sum_{i=1}^N p_i X_i (1 + r_i)^H$

هدف ما افزایش بازده سبد و کاهش ریسک سبد است در نتیجه باید به انتخاب بهینه متغیرهای تصمیم مقادیر $E(w)$ و

$\text{Var}(w)$ را به ترتیب افزایش و کاهش دهیم. برای محاسبه $\text{Var}(w)$ ، وجود توان H در ارزش سبد موجب میشود که کوواریانس توان H ام متغیرهای تصادفی r_i و r_j را حساب کنیم. که محاسبات مان را پیچیده میکند. در نتیجه از تقریب زیر استفاده میکنیم $(1 + Hr_i)^H \approx (1 + r_i)^H$ پس خواهیم داشت:

$$E(W) = E\left[\sum_{i=1}^N P_i x_i (1 + Hr_i)\right] = \sum_{i=1}^N P_i x_i (1 + HE(r_i)) = \sum_{i=1}^N P_i x_i (1 + H\mu_i)$$

$$Var(W) = Var\left[\sum_{i=1}^N P_i x_i (1 + Hr_i)\right] = H^2 Var\left[\sum_{i=1}^N P_i x_i r_i\right] = H^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_i x_i P_j x_j \sigma_{ij}$$

فرض کنید R یک متغیر تصادفی مصنوعی باشد که نشان دهنده بازده کل سبد در هر دوره است. بنابراین ارزش سبد در پایان H دوره برابر میشود با $w^* = \sum_{i=1}^N (P_i X_i + V)(1 + R)^H$ که بنا بر تقریب گفته شده در بالا

W^* را مساوی با $\sum_{i=1}^N (P_i X_i + V)(1 + HR)$ میگیریم. پس داریم:

$$E(W^*) = \left(\sum_{i=1}^N P_i X_i (1 + Hr_i)\right)(1 + HE(R))$$

همچنین میدانیم که $w_i = \frac{P_i x_i}{\sum_{k=1}^N P_k X_k + V}$ ، حال اگر امید ارزش سبد را در دو حالت قبل، یعنی $E(w)$ و

$E(w^*)$ را مساوی هم قرار دهیم خواهیم دید:

$$1 + HE(R) = \sum_{i=1}^N w_i (1 + H\mu_i) \Rightarrow E(R) = \frac{1}{H} \left(\sum_{i=1}^N w_i\right) - 1 + \left(\sum_{i=1}^N w_i \mu_i\right)$$

و چون داریم $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ نتیجه میگیریم که: $E(R) = \frac{-w_0}{H} + \sum_{i=1}^N w_i \mu_i$

به طریق مشابه برای واریانس نیز بدست خواهیم آورد که: $Var(R) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$

همانطور که معلوم است پارامتر H تنها در بازده سبد ظاهر شده است. که این امر موجب سادگی در تعیین H میشود. بدیهی است که هرچه H بزرگ تر باشد، بازده سبد نیز افزایش میابد.

از دو تابع $E(R)$ و $Var(R)$ به عنوان دو تابع هدف دیگر در مسئله چندهدفه مان استفاده میکنیم.

۵. تابع هدف مسئله و نتیجه گیری

با توجه به مطالب گفته شده، مسئله چند هدفه تحت قیود گفته شده در بخش ۲ به صورت زیر میباشد.

$$\max \left(-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}, -\frac{2\sigma^2}{\mu} Q_D(\mu^2 H / 2\sigma^2), \left(\frac{-w_0}{H} + \sum_{i=1}^N w_i \mu_i\right) \right)$$

پس از حل مسئله فوق، مقدار وزن تخصیصی بهینه به هر دارایی مشخص خواهد شد. مدل گفته شده بر روی شرکت های سهام عدالت در بازار بورس ایران طی سال های ۹۶ تا ۹۹. که با استفاده از نرم افزار Gamside پیاده سازی شده است.

نتیجه محاسبات نشان دهنده بهینه بودن سبد در استفاده از استراتژی بلند مدت و عدم فروش سهم های موجود در سبد اولیه و نگهداری آن است. و خرید از شرکت های گروه لیزینگ، شرکت های گروه سرمایه گذاری در صنعت بیمه و بانک ها و موسسات وابسته آن به ترتیب بیشترین نسبت را به خود اختصاص داده اند.

مرجع ها:

1. Woodside-Oriakhi, M., C. Lucas, and John E. Beasley. "Portfolio rebalancing with an investment horizon and transaction costs." *Omega* 41.2 (2013): 406-420.
2. Nystrup, Peter, et al. "Multi-period portfolio selection with drawdown control." *Annals of Operations Research* 282.1 (2019): 245-271.
3. Magdon-Ismail, Malik, et al. "The maximum drawdown of the Brownian motion." 2003 IEEE International Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, 2003.

حالت‌های خاصی از اندازه ریسک اعوجاج (انحراف)

علیرضا خدّامی^۱، فرشته مهرپور^{۲*}

^۱ استادیار دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

^۲ کارشناسی ارشد ریاضی مالی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

چکیده: همه‌ی سرمایه‌گذاران در هنگام سرمایه‌گذاری با مقوله‌ای به نام عدم‌اطمینان روبه‌رو هستند. نتیجه‌ی این عدم‌اطمینان ناشی از وقوع پیشامدی است که در آینده رخ می‌دهد و سرمایه‌گذاران به اصطلاح به آن ریسک می‌گویند. ریسک به معنایی انحراف در پیشامدهای ممکن آینده می‌باشد.

در این مقاله به بررسی مختصری از اندازه ریسک اعوجاج و مؤلفه‌های اصلی آن که در تعریف این معیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، پرداخته شده است. معیارهای VaR و AVaR را که به عنوان حالت‌های خاصی از اندازه‌های ریسک اعوجاج معرفی شده‌اند مورد بحث واقع می‌شوند. این معیارها هرچند دو معیار پر کاربرد برای سرمایه‌گذاران می‌باشند ولی دارای معایبی هستند. برای رفع این معایب در سال ۲۰۱۴ معیار ریسک GlueVaR توسط بلزسامپرا و همکارانش معرفی شده که ترکیب خطی از دو معیار VaR و AVaR می‌باشد. برای توضیح بیشتر ویژگی‌های و کاربردهای معیارهای بیان شده در مدیریت و اندازه‌گیری ریسک در قالب نتیجه‌گیری کلی بیان می‌شود.

کلمات کلیدی: اندازه ریسک اعوجاج، اندازه ریسک منسجم، انتگرال شوکت، معیار ریسک GlueVarR.

طبقه‌بندی موضوعی: G32, D81.

۱ مقدمه

در دنیایی امروزی نه تنها شرکت‌ها و نهادهای مالی با مقوله ریسک سرکار دارند بلکه تمامی افراد نیز در کارهای روزمره خود با آن مواجه هستند. در نتیجه باید ریسک‌ها را شناسایی و اگر با آن‌ها مواجه می‌شوند، مورد تحلیل و بررسی قرار دهند. به همین دلیل از دیرباز تا کنون اشخاص به دنبال راهی بوده‌اند که بتوانند این ریسک‌ها را تحلیل و به کمترین حد امکان برسانند. یکی از راه‌حل‌های کم کردن ریسک طراحی ابزارهای می‌باشد که بتوان به کمک آن‌ها ریسک را مدیریت کرد. اندازه‌های ریسک اعوجاج، نمونه‌ای از این ابزارها می‌باشند که به کمک آن‌ها می‌توان

* سخنران

مقادیر قابل قبولی از ریسک را اندازه گرفت. با استفاده از این سنجها می توان ریسک یا پیشامدهای ممکن آینده را مدیریت کرد. مدیریت ریسک مجموعه ای را قادر می سازد که به نحو بهتری ریسکهای متداول در فعالیت های روزمره را مدیریت و با خیالی آسوده از خسارات تصادفی، به طور جامع تر و مؤثرتر فعالیت های روزمره خود را ادامه دهد.

۱-۱ اندازه های ریسک اعوجاج

با فرض اینکه $\mathcal{F}$ مجموعه تمام متغیرهای تصادفی زیان یا ریسکهای روی فضای احتمال (Ω, F, P) در نظر گرفته شود. در این صورت یک اندازه ریسک هر تابع، مانند $\rho: \mathcal{F} \rightarrow R$ در نظر گرفته می شود. می توان بیان کرد که در آن برای $p \in (0, \infty)$ ، $L^p = L^p(\Omega, F, P)$ به عنوان مجموعه همه متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال (Ω, F, P) با $\mathcal{F}$ -امین گشتاور متناهی تعریف می شود. به طور خاص $L^0(L^\infty)$ نشان دهنده مجموعه همه متغیرهای تصادفی (کراندار) تعریف شده روی فضای احتمال (Ω, F, P) است. برای هر متغیر تصادفی زیان $X \in L^0$ ، ارزش در معرض ریسک X در سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1)$ به صورت

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x \in R \mid P(X \leq x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) \quad (1)$$

و $F_X(x)$ معکوس پیوسته چپ توزیع $F_X^{-1}(x)$ تعریف می شود. که در آن

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - S_X(x) \quad (2)$$

است. یک اندازه ریسک زیرجمع پذیر وابسته به VaR ، متوسط ارزش در معرض ریسک $AVaR$ است. برای هر متغیر تصادفی زیان $X \in L^1$ ، $AVaR(X)$ در سطح اطمینان $\alpha \in (0, 1)$ به صورت

$$AVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_q(X) dq \quad (3)$$

تعریف می شود. اندازه ریسک $AVaR$ زیرجمع پذیر است و برای هر $X \in L^1$ در نامساوی $AVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X)$ صدق می کند. دو معیار VaR و $AVaR$ حالات خاصی از اندازه ریسک اعوجاج (انحراف) هستند. دو مؤلفه اصلی اندازه های ریسک اعوجاج، توابع اعوجاج و انتگرال شوکت می باشند.

تعریف ۱-۱: اگر $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک تابع صعودی باشد و همچنین $g(1) = g(1-) = 1$ ، $g(0) = g(0+) = 0$ آنگاه g را تابع اعوجاج می نامیم.

تعریف ۲-۱: فرض کنید $\mu: S \rightarrow R_+ = [0, +\infty]$ یک تابع مجموعه‌ای یکنوا با شرط $\mu(\Omega) < \infty$ باشد و $X: \Omega \rightarrow R$ یک تابع اندازه‌پذیر روی فضای اندازه‌پذیر (Ω, S) باشد. انتگرال شوکت تابع X نسبت به μ که با نمادهای $\int_{\Omega} X d\mu$ یا $\int X d\mu$ مشخص می‌شوند به صورت

$$\int_{\Omega} X d\mu = \int_{-\infty}^0 [S_{\mu, X}(x) - \mu(\Omega)] dx + \int_0^{+\infty} S_{\mu, X}(x) dx, \quad (4)$$

تعریف می‌شود، که در آن $S_{\mu, X}(x) = \mu(\{X > x\})$ تابع بقاء X را نسبت به μ نشان می‌دهد. علاوه بر این، برای $A \in S$ انتگرال شوکت تابع روی مجموعه A نسبت به μ که با نماد $\int_A X d\mu$ مشخص می‌شود به صورت

$$\int_A X d\mu = \int_{-\infty}^0 [\mu(A \cap \{X > x\}) - \mu(A)] dx + \int_0^{+\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) dx, \quad (5)$$

تعریف می‌شود. توجه داشته باشید، اگر برای $B \in S$ تابع مجموعه‌ای $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$ را در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان رابطه (5) را به صورت

$$\int_A X d\mu = \int_{\Omega} X d\mu_A \quad (6)$$

باز نویسی کرد.

گزاره ۱-۱. فرض کنید (Ω, S) یک فضای اندازه‌پذیر و $\mu: S \rightarrow R_+$ تابع مجموعه‌ای یکنوا در نظر گرفته شود. هرگاه $A \in S$ و $X: \Omega \rightarrow R$ یک متغیر تصادفی باشد، در این صورت

$$\int_A X d\mu = \int_{-\infty}^0 [\mu(A \cap \{X > x\}) - \mu(A)] dx + \int_0^{+\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) dx.$$

برهان. فرض کنید $x \in R$ در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{X\chi_A > x\} = \begin{cases} A \cap \{X > x\} & x \geq 0 \\ (A \cap \{X > x\}) \cup A^c & x < 0. \end{cases}$$

حال،

$$S_{\mu, X\chi_A}(x) = \mu(\{X\chi_A > x\})$$

$$\{X\chi_A > x\} = \begin{cases} \mu(A \cap \{X > x\}) & x \geq 0 \\ \mu((A \cap \{X > x\}) \cup A^c) & x < 0 \end{cases}$$

$$\{X\chi_A > x\} = \begin{cases} \mu(A \cap \{X > x\}) & x \geq 0 \\ \mu((A \cap \{X > x\}) + A^c) & x < 0. \end{cases}$$

با توجه به این که $\int_A X d\mu = \int_{\Omega} X\chi_A d\mu$ بنابراین می‌توان نوشت

$$\int_A X d\mu = \int_{-\infty}^0 [S_{\mu, X\chi_A}(x) - \mu(\Omega)] dx + \int_0^{+\infty} S_{\mu, X\chi_A}(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 [\mu(A \cap \{X > x\}) + \mu(A^c) - \mu(\Omega)] dx + \int_0^{+\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 [\mu(A \cap \{X > x\}) - \mu(A)] dx + \int_0^{+\infty} \mu(A \cap \{X > x\}) dx. \end{aligned}$$

□

تعریف ۳-۱: فرض کنید $\rho_g: \mathcal{X}_g \rightarrow R$ و g یک تابع اعوجاج باشد. در این صورت یک اندازه ریسک اعوجاج به صورت زیر تعریف می شود.

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^0 [g(S_X(x)) - 1] dx + \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx \quad (7)$$

که در آن $\mathcal{X}_g$ عبارت است از

$$\mathcal{X}_g = \{X \in L^0 \mid |\rho_g(X)| < \infty\} \quad (8)$$

و $S_X(x) = P(\{X > x\})$ تابع بقاء متغیر تصادفی X است. اگر $X \in \mathcal{X}_g$ آنگاه X را یک ریسک می نامیم. ایده‌ی نهان اندازه ریسک اعوجاج در تعریف تابع بقاء یک ریسک با به کار بردن یک تابع اعوجاج به گونه‌ای انتظار می رود که بتواند انعطاف پذیری بیشتر و اندازه‌های معقول تری برای ریسک فراهم کند. اندازه ریسک اعوجاج ρ_g انتگرال شوکت نسبت به یک تابع مجموعه‌ای است. به این معنا که

$$\rho_g(X) = \int_{\Omega} X d\mu_g = \int X d\mu_g \quad \forall \quad X \in \mathcal{X}_g \quad (9)$$

جایی که μ_g یک تابع مجموعه‌ای یکنوا است و برای هر $A \in F$ به صورت $\mu_g(A) = g(P(A))$ تعریف می شود.

گزاره ۲-۱. هرگاه g یک تابع اعوجاج و به ازای هر $A \in 2^{\Omega}$ ، $\mu_g(A) = g(P(A))$ آنگاه به ازای هر $X \in \mathcal{X}_g$

$$\rho_g(X) = \int_{\Omega} X d\mu_g$$

برهان. می دانیم که

$$S_{\mu_g, X}(x) = \mu_g(\{X > x\}) = g(P(\{X > x\})) = g(S_X(x))$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} X d\mu_g &= \int_{-\infty}^0 [S_{\mu_g, X}(x) - \mu_g(\Omega)] dx + \int_0^{+\infty} S_{\mu_g, X}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 [g(S_X(x)) - 1] dx + \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx \\ &= \rho_g(X). \end{aligned}$$

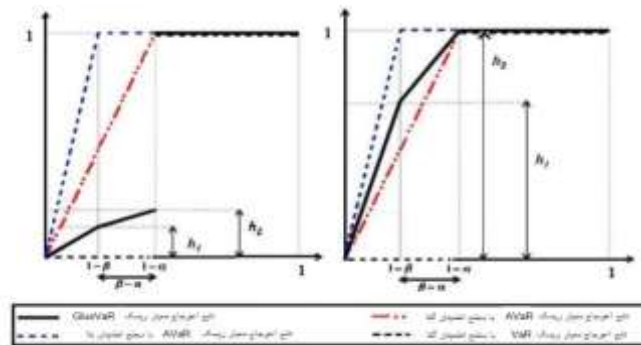
□

به طور کلی اندازه ریسک اعوجاج یک ریسک مانند X "امید ریاضی آن" ریسک است که روی فضای احتمال تحت یک اندازه منحرف شده (معوج) حاصل شده است.

۲ نتیجه گیری

اندازه های ریسک به طور گسترده در بیمه و مالی به عنوان یک ابزار در مدیریت ریسک به کار برده می شوند. یکی از عملکردهای مهم اندازه ریسک برای تعیین سرمایه های قانونی مورد نیاز برای قیمت گذاری بیمه نامه ها و بیمه اتکایی است. در مدیریت ریسک سبدها، ریسک ها در سبد خیلی اوقات وابسته هستند.

ارزش در معرض ریسک VaR رایج ترین معیاری است که سرمایه گذاران هنگام سرمایه گذاری برای محاسبه ریسک از آن استفاده می کنند. این معیار، ریسک را براساس آخرین ترکیب دارایی های موجود در سبدها اندازه و پیش بینی می کند. هرچند معیار VaR رایج ترین و کاربردی ترین ابزار سنجش ریسک در دنیای اقتصاد است، اما این معیار از برخی قواعد انسجام که در سال ۱۹۹۹ توسط آرتزور و همکارانش پیشنهاد شده اند را ندارد. همچنین در شرایط بحرانی بازار این سنجه نمی تواند به درستی ریسک را اندازه بگیرد. معیاری که در شرایط بحرانی بازار جایگزین این سنجه می شود متوسط ارزش در معرض ریسک AVaR یا ارزش در معرض ریسک شرطی CVaR می باشد. علاوه بر این، معیار ریسک AVaR دارای ویژگی های تحدب و زیرجمع پذیری می باشد. دو معیار VaR و AVaR در سطح اطمینان α حالات خاصی از اندازه ریسک اعوجاج می باشند که $k_{\alpha,\alpha}^{1,1}(u)$ و $k_{\alpha,\alpha}^{0,0}(u)$ به ترتیب توابع اعوجاج تعریف شده روی آن ها می باشد. بلزسامپرا و همکارانش در سال ۲۰۱۴ با استفاده از ترکیب خطی این دو معیار، یک زیر کلاس از اندازه های ریسک اعوجاج تحت عنوان اندازه ریسک GlueVaR را معرفی کردند. این معیار علاوه بر اینکه اندازه ریسک منسجم می باشد در شرایط مختلف بازار می توان از آن به عنوان یک معیار مناسب استفاده کرد. تابع اعوجاج اندازه ریسک GlueVaR در سطح اطمینان α با نماد $k_{\beta,\alpha}^{h_1,h_2}(u)$ نشان داده می شود. در اینجا β یک سطح اطمینان اضافی در کنار α است و پارامترهای h_1 و h_2 ارتفاعات اندازه ریسک GlueVaR هستند که با استفاده از آن ها می توان حالت های مختلفی برای این سنجه ریسک در نظر گرفت. در کل با استفاده از این معیار می توان مقدار منطقی را به سرمایه گذار ارائه داد. شکل ۱ نمونه ای از حالت های مختلف گفته شده هست که انعطاف پذیری GlueVaR را نشان می دهد.



شکل ۱: مقایسه توابع اعوجاج معیارهای VaR، AVaR و GlueVaR تحت شرایط مختلف

مرجع ها

12. J. Belles-Sampera, M. Guillen, M. Santolino, GlueVaR risk measures in capital allocation applications, Mathematics and Economics, Mathematics and Economics, 58(2014), 132 - 137.
13. J. Belles-Sampera, M. Guillen, M. Santolino, GlueVaR risk measures in capital allocation applications, Mathematics and Economics, Mathematics and Economics, 68(2016), 101 - 109.
14. Y. Wang, J. Cai, T. Mao, Tail subadditivity of distortion risk measures and multivariate tail distortion risk measures, Mathematics and Economics, 75 (2017), 105–116.

بهینه‌سازی سبد سهام به روش شبیه‌سازی مونت کارلو با رویکرد حداکثر نمودن معیار آلفا

آرزو کریمی*

کارشناسی ارشد ریاضیات مالی، دانشگاه آیت‌اله بروجردی

karimiar355@gmail.com

چکیده: ریسک‌گریزی سرمایه‌گذاران باعث شده است، تصمیماتی را در جهت مدیریت ریسک اتخاذ کنند. انتخاب سبد سرمایه‌گذاری یکی از آن تصمیماتی است که عمده‌ی سرمایه‌گذاران برای برقراری تعادل بین ریسک و بازده اخذ می‌کنند. تئوری انتخاب سبد، نخستین بار توسط مارکوئیتز ارائه‌شد. الگوی میانگین-واریانس طراحی شده توسط وی میانگین بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد و واریانس معیار ریسک، سبد سهام می‌باشد. در دانش مالی از دیر باز تا کنون سعی شده است مدل‌هایی برای انتخاب سبد عرضه شود که با کم کردن ریسک بازده بیشتری را نصیب افراد کنند. هدف از این نوشتار، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به روش شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشد. بهینه‌سازی بر روی داده‌های ۱۰ شرکت پذیرفته شده در بازار بورس اوراق بهادار تهران انجام می‌شود. این روش به صورت کدهای برنامه‌نویسی در محیط برنامه‌نویسی متلب پیاده‌سازی شده است. همچنین نمودار شبیه‌سازی شده وزن هر سهم ترسیم گردیده است. نتایج نشان داد سهم‌هایی که بازده موردانتظار بالایی دارند، وزن بیشتری در سبد بهینه به روش مونت کارلو به خود اختصاص می‌دهند. لذا، بازدهی سبد تحت روش مونت کارلو افزایش پیدا می‌کند. همچنین تنوع اوراق بهادار در روش مونت کارلو بیشتر از روش مارکوئیتز است. لذا، ریسک غیرسیستماتیک در روش مونت کارلو کاهش پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: سبد بهینه، شبیه‌سازی مونت کارلو، مارکوئیتز، بازار بورس اوراق بهادار تهران

طبقه‌بندی JEL: G11, C63

۱- مقدمه

در محاسبات مالی و انتخاب سبد سرمایه‌گذاری همواره سعی شده است دو موضوع مهم ریسک و بازده در انتخاب سبد بهینه مدنظر قرار گیرد. سبد بهینه سرمایه‌گذاری که ترکیب مطلوبی از اوراق بهادار است ریسک غیر سیستماتیک را کاهش می‌دهد و در مقابل ریسک سیستماتیک یا ریسک بازار عملکرد مناسبی ندارد. بتا معیار اندازه‌گیری ریسک سیستماتیک است و تغییرات بازار مقدار بتا را نیز تغییر می‌دهد. از طرفی عملکرد سبد یکی از

* سخنران

موضوعات مهم و مورد علاقه‌ی تمامی سرمایه‌گذاران و مدیران شرکت‌های سرمایه‌گذاری است. معیار آلفا، معیار کاملی از عملکرد سبد است و مزیت این معیار این است که، به صورت همزمان بتای سبد را برآورد می‌کند [۱]. بهینه‌سازی به روش مونت کارلو بر پایه معیار آلفا استوار است [۲]. تاکنون شبیه‌سازی مونت کارلو به عنوان ابزاری برای تخمین ریسک نامطلوب سبد مورد استفاده قرار گرفته است، اما در این پژوهش از این شبیه‌سازی به عنوان روشی برای بهینه‌سازی سبد استفاده خواهد شد.

۲- مدل مارکوویتز

نخستین فردی که ریسک را به صورت کمی اندازه‌گیری کرد مارکوویتز بود. او تئوری مشهور سبد را ارائه کرد و نشان داد چگونه تنوع بخشیدن به یک سبد می‌تواند ریسک سرمایه‌گذاری را کاهش دهد. مدل او بر پایه بازده مورد انتظار و ریسک استوار است. از نظر او ریسک سبد به کوواریانس اجزای تشکیل دهنده آن بستگی دارد و هرچه همبستگی بین اجزا کمتر باشد به ازای آن ریسک نیز کمتر می‌شود به طوریکه اگر همبستگی منفی شود ریسک به طور کامل حذف می‌شود [۱]. مدل مارکوویتز به شرح زیر می‌باشد:

فرض کنید n اوراق بهادار موجودند که کل وجوه سرمایه‌گذاری شده در آنها برابر m_0 است و r_{it} بازدهی مورد انتظار ورقه‌ی i ام باشد که در زمان t خریداری شده است و همچنین d_{it} تنزیل بازدهی به زمان t باشد و نیز x_i میزان وجه سرمایه‌گذاری شده در ورقه‌ی i ام باشد آن گاه تنزیل بازدهی مورد انتظار سبد به زمان t به روش زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n d_{it} r_{it} x_{it} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i R_i \end{aligned}$$

همان طور که ملاحظه می‌شود R جمع موزون R_i ها است بنابراین مقدار مورد انتظار و واریانس آن به ترتیب برابر:

$$\begin{aligned} E(R) &= \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) \\ V(R) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن کمترین میزان واریانس، یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی به شرح زیر حاصل می‌شود [۳]:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ \text{s.t} \quad &\sum_{i=1}^n E(R_i) x_i \geq m_0 \\ &\sum_{i=1}^n x_i = m_0 \\ &x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

۳- شبیه‌سازی مونت کارلو

شبیه‌سازی تقلیدی از یک سیستم یا فرآیند واقعی با گذشت زمان است و همچنین روشی برای تجزیه و تحلیل، مقایسه و بهینه‌سازی سیستم‌های پیچیده‌ای که تکرارپذیر می‌باشند. گاهی اوقات به دلیل روابط ساده بین اجزای یک سیستم امکان استفاده از مدل‌های دقیق ریاضی برای تحلیل روابط وجود دارد، که در این صورت نتایج به دست آمده دقیق است، اما غالب مدل‌های واقعی به اندازه‌ای پیچیده هستند که استفاده از مدل‌های ریاضی برای آنها دشوار یا ناممکن است در این صورت شبیه‌سازی کمک می‌کند تا نتایج موردنظر به سهولت برآورد شوند. یکی از مدل‌های شبیه‌سازی، شبیه‌سازی به روش مونت کارلو می‌باشد ویژگی اصلی این روش در این است که زمان نقش تعیین کننده‌ای در آن ندارد و از اعداد تصادفی برای حل مسائل پیچیده استفاده می‌شود. از این روش می‌توان برای بهینه‌سازی سبد نیز بهره گرفت، اساس بهینه‌سازی سبد به روش مونت کارلو بر روی معیار آلفا جنسن استوار است. آلفا یک معیار بازدهی است و هدف روش مونت کارلو به حداکثر رساندن آن است. این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$\alpha = r_p - (r_f + \beta_p(r_m - r_f))$$

که در آن r_p بازدهی موردانتظار سبد، r_f بازده بدون ریسک، r_m ریسک بازار، β_p بتای سبد می‌باشند.

۴- یافته‌های پژوهش

در این پژوهش داده‌ها به صورت قیمت ماهانه‌ی ۱۰ سهم از شرکت‌های پذیرفته شده در بازار بورس اوراق بهادار تهران در نظر گرفته شده‌اند، همچنین محدوده زمانی مورد مطالعه از تاریخ ۸۷/۹/۲۳ تا ۹۷/۱۲/۲۸ تعیین شده است. بازده مورد انتظار و مقدار بتا هر سهم به کمک نرم افزار متلب محاسبه شده است. همچنین با استفاده از این نرم‌افزار به حل مدل مارکوویتز و شبیه سازی مونت کارلو پرداخته شده است. بازده مورد انتظار و بتا هر سهم به ترتیب از رابطه‌های زیر محاسبه شده‌اند:

$$E(r) = \frac{(r(n) + w r(n-1) + w^2 r(n-2) + \dots + w^{n-1} r(1))}{\frac{1-w^n}{1-w}}$$

w : عامل تنزیل r : بازدهی

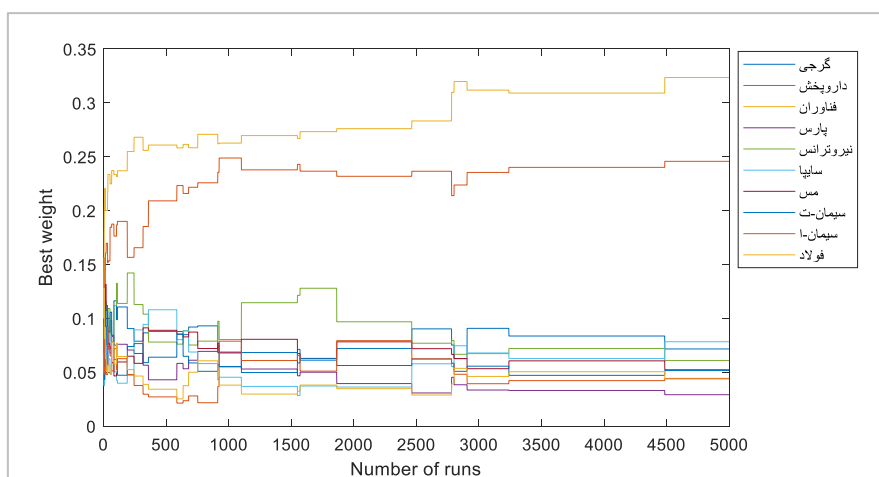
$$\beta_i = COV_{i,M} / VAR(R_M)$$

R_M : بازدهی بازار

نام سهم	گرچی	داروپخش	فناوران	پارس	نیرو ترانس	سایپا	مس	سیمان- ت	سیمان-ا	فولاد
بازده										
مورد	۰/۴۰۰۷	۱/۱۴۴۴	۱/۸۲۱۳	۰/۲۱۹۲	۰/۵۲۹۸	۰/۱۶۰۹	۰/۴۳۰۰	۰/۲۶۴۶	۰/۴۲۵۳	۰/۲۱۶۵
انتظار										

جدول ۱. بازده مورد انتظار هر سهم

در جدول ۱، بیشترین بازدهی مربوط به شرکت فناوران و کمترین بازدهی مربوط به شرکت سایپا می‌باشد.



شکل ۱. وزن شبیه‌سازی شده به روش مونت کارلو

شکل فوق شبیه‌سازی وزن هر سهم را به روش مونت کارلو نشان می‌دهد. بالاترین نمودار مربوط به شرکت فناوران و پایین‌ترین نمودار مربوط به شرکت پارس می‌باشد.

جدول ۲. وزن هر سهم در سبد بهینه شده به روش مارکوئیتز و روش شبیه سازی مونت کارلو

سهم مدل	گرچی	داروپخش	فناوران	پارس	نیرو ترانس	سایپا	مس	سیمان - ت	سیمان - ا	فولاد
مارکوئیتز	۰/۰۰۰۴	۰	۰	۰/۰۲۶۳	۰	۰/۴۹۶۴	۰/۱۳۱۷	۰/۱۶۸۶۷	۰	۰/۱۷۶۵
مونت کارلو	۰/۰۷۱۵	۰/۲۴۵۶	۰/۳۲۳۴	۰/۰۲۹۰	۰/۰۶۰۸	۰/۰۷۸۲	۰/۰۵۲۲	۰/۰۵۱۵	۰/۰۴۴۲	۰/۰۴۳۵

در جدول ۲، دو شرکت فناوران و داروپخش که بیشترین بازدهی را دارند هیچ وزنی در سبد بهینه به روش مارکوئیتز اخذ نکرده‌اند. از طرفی دیگر شرکت سایپا که کمترین میزان بازدهی را دارد بیشترین وزن را در این روش به خود اختصاص داده است. در روش مونت کارلو شرکت فناوران که بیشترین بازدهی مورد انتظار را دارد، بیشترین وزن را کسب نموده است. همچنین تنوع اوراق بهادار در روش مونت کارلو بیشتر از روش مارکوئیتز است. لذا، ریسک غیرسیستماتیک سبد در این روش کاهش پیدا می‌کند.

جدول ۳. بازده و ریسک سبد بهینه شده به روش مارکوئیتز و روش مونت کارلو

مدل	مارکوئیتز	مونت کارلو
بازده	۰/۲۲۵۳	۱/۰۱۴
ریسک	۰/۰۸۱۰	۰/۰۶۱۹

در جدول ۳، بازدهی سبد در روش مونت کارلو افزایش پیدا کرده است، زیرا تنوع اوراق بهادار در این روش بیشتر است و سهم‌هایی که بازدهی مورد انتظار بالایی دارند وزن بالایی اخذ کرده‌اند. همچنین ریسک سبد به روش مونت-کارلو نسبت به روش مارکوئیتز کاهش یافته است.

۵- نتایج اساسی

در این پژوهش شبیه سازی مونت کارلو به عنوان مدلی برای انتخاب سبد بهینه در نظر گرفته شد و در این راستا مقدار بتای هر سهم برآورد شد و در رابطه معیار آلفا قرار گرفت. پس از آن با استفاده از کدهای برنامه نویسی وزن هر سهم و ریسک و بازده سبد به روش مونت کارلو تخمین زده شد. با مقایسه این روش با مدل مارکوئیتز این نتیجه بدست آمد که در روش پیشنهادی میزان ریسک کاهش می‌یابد و بدنبال آن بازدهی افزایش پیدا می‌کند. روش

مونت کارلو بر پایه دو معیار بتا و آلفا استوار است. بنابراین ریسک سیستماتیک در این روش تحت کنترل قرار می-گیرد.

مرجع ها

۱. چ. جونز، مدیریت سرمایه گذاری، ر. تهرانی، ع. نوربخش، تهران، انتشارات نگاه دانش، ۱۳۸۹.
2. D. Kendrick, P. Mercado, H. Amman, Computational Economics, Princeton University Press, New Jersey, 2006, pp119-146.
3. H. Markowitz, Portfolio selection, Journal of Finance, Vol. 7, No. 1 ,1952, pp. 77-91.
4. Private Banking, Jensen's Measure, 2008 , Private Banking.com.

طراحی بیمه درمان بلند مدت قابل به روزرسانی

عاطفه کنعانی دیزجی^{۱*} امیر تیمور پاینده نجف آبادی^۲

^۱ دانشجوی دکتری بیمسنجی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، a_kananidizaji@sbu.ac.ir

^۲ عضو هیات علمی دانشگاه شهید بهشتی، amirtpayandeh@gmail.com

چکیده: در بیمه‌نامه‌های درمان بلندمدت، بیمه‌گذار تمایل دارد نه تنها در برابر ریسک، بلکه در برابر طبقه‌بندی مجدد ریسک نیز بیمه شود و در صورت تغییر وضعیت سلامت، میزان تغییر حق بیمه برای سال‌های آتی در زمان عقد قرارداد مشخص باشد. بیمه‌گر نیز به دنبال تعیین حق بیمه عادلانه‌ی متناسب با ریسک بیمه‌گذار است. در این مقاله، بیمه‌های درمان بلندمدت را در قالب یک قرارداد در نظر گرفته می‌شود که دو طرف برای پیشینه کردن مطلوبیت خود مذاکره می‌کنند. برای برآورد هزینه‌های درمان، از مدل سری‌های زمانی استفاده می‌کنیم و احتمال تغییر ریسک بیمه‌گذار از وضعیتی به وضعیت دیگر را محاسبه می‌کنیم. وضعیت بیمه‌گذار بر اساس هزینه‌های درمان تقسیم‌بندی می‌شود که در آن پارامترهای مدل به وضعیت سلامت وابسته است. قرارداد بهینه شامل حق بیمه و پوشش بیمه‌گر به تفکیک سن و برای هر سال قرارداد، از بین قراردادهای بهینه پارتو، بر اساس مدل مذاکره تعیین می‌شود. با توجه به عدم اطمینان در برآورد پارامترهای مدل، بازه پیش‌بینی بوت‌استرپی برای حق بیمه در طول قرارداد محاسبه می‌شود.

کلمات کلیدی: بیمه درمان بلند مدت، حق بیمه بهینه، قراردادهای پارتو، بازه پیش بینی حق بیمه

طبقه بندی موضوعی: I130-C78-C53

۱ مقدمه

جمعیت بسیاری از کشورها با توجه به کاهش نرخ مرگ و میر و نرخ بیماری و افزایش امید به زندگی رو به سالمندی است. در نتیجه هزینه‌های درمان و به تبع آن تقاضا برای بیمه‌های درمان افزایش می‌یابد. بیمه‌گران معمولاً بیمه‌های درمان را بصورت کوتاه‌مدت عرضه می‌کنند که در آن برآورد هزینه درمان راحت‌تر بوده و در زمان عقد قرارداد حق بیمه برای طول مدت بیمه‌نامه تعیین می‌شود. در این نوع بیمه‌ها در صورت تغییر وضعیت سلامت، بیمه‌گذاران با ریسک طبقه‌بندی مجدد ریسک مواجه می‌شوند. کلاکتون و همکاران (۲۰۱۷) افزایش نرخ جمعیت فاقد بیمه و نوسان حق بیمه را از معایب بیمه‌های درمان کوتاه‌مدت بیان کردند. برای حل این مساله، آنها اعمال نرخ حق بیمه دولتی و بیمه‌های

* سخنران

درمان بلندمدت را مطرح کردند. در بیمه‌های درمان بلندمدت، با توجه به ماهیت بلندمدت بودن آن برآورد هزینه‌های درمان و تعیین پوشش برای بیمه‌گر دشوار است از طرفی وضعیت سلامت بیمه‌گذار در طول این مدت ممکن است تغییر کند. همچنین وجود تعهدات یک‌طرفه که به بیمه‌گذار امکان می‌دهد قراردادهای بهتر را جایگزین قرارداد فعلی کند، موجب می‌شود ریسک بیمه‌گر افزایش یابد و در نتیجه بیمه درمان بلندمدت برای بیمه‌گران جذابیت نداشته باشد. کوچران (۱۹۹۵) دنباله‌ای از بیمه‌نامه‌های کوتاه‌مدت در قالب بیمه‌نامه‌های زمان‌سازگار را در نظر گرفت که با یک حساب ویژه ترکیب می‌شوند و جایگزین بیمه‌نامه‌های بلندمدت می‌شوند. وایزمن (۲۰۱۸)، مدل پویایی برای بیمه‌های درمان بلندمدت طراحی کرده است که در آن حق بیمه پرداختی و پوشش بیمه‌گر بر اساس درآمد بیمه‌گذار تعریف می‌شود که وابسته به وضعیت سلامت بیمه‌شده است و پوشش بهینه با ماکزیم کردن تابع مطلوبیت بیمه‌گذار با توجه به محدودیت بودجه محاسبه می‌شود. با توجه به ماهیت بلندمدت بودن این بیمه‌نامه‌ها یافتن بهترین پوشش بیمه‌گر، با توجه به محدودیت بودجه در بازار رقابتی از اهمیت بسزایی برخوردار است. اما در بسیاری موارد در بیمه‌های درمان فقط مطلوبیت بیمه‌گذار در نظر گرفته می‌شود. چون این نوع بیمه درمان بلندمدت است و حق بیمه و پوشش برای طول مدت بیمه‌نامه در ابتدای قرارداد تعیین می‌شود. بنابراین منطقی است که افزایش مطلوبیت دو طرف قرارداد مورد بررسی قرار بگیرد. برای این منظور می‌توان قرارداد بیمه را به عنوان یک معامله دوفره مدل کرد که در آن دو طرف به منظور بیشینه کردن سود خود با هم معامله می‌کنند. بورچ (۱۹۶۰) قراردادهای بیمه‌اتکایی را در چارچوب مدل مذاکره مورد مطالعه قرار داد. در ابتدا وی مجموعه قراردادهای پارتو بهینه را بدست آورد و سپس یکی از آن‌ها که مربوط به راه حل معامله چانه‌زنی نش (۱۹۵۰) بود را شناسایی کرد. گلوبین (۲۰۰۶) به تحلیل مسئله بیمه‌نامه‌های بهینه پارتو، زمانی که بیمه‌گر و بیمه‌گذار ریسک‌گریز هستند پرداخته است و مسئله را در شرایطی حل کرده است که حق بیمه تابعی از ریسک بیمه‌گر می‌باشد. قوسوب (۲۰۱۷) بیمه‌نامه‌های بهینه پارتو را تحت ناهمگنی توزیع بیمه‌گر و بیمه‌گذار بر اساس قضیه ارو (۱۹۷۱) مشخص کرده است. جیانگ (۲۰۱۹)، فرض می‌کند که دو طرف قرارداد در بیمه اتکائی، هنگام مذاکره در توزیع احتمال خسارت‌ها ممکن است هم‌نظر نباشند. پس از استخراج قراردادهای بهینه پارتو، قرارداد بهینه متناسب با نش (۱۹۵۰) را مشخص می‌کند. گیلی و همکاران (۲۰۱۹) نشان دادند که در بیمه‌های درمان بلندمدت، قرارداد بهینه با تعهد یک‌طرفه، بیمه‌گذار را بطور کامل در مقابل ریسک طبقه‌بندی مجدد پوشش نمی‌دهد زیرا حذف کامل طبقه‌بندی مجدد مستلزم مبلغ زیاد آورده اولیه است. آتل و همکاران (۲۰۲۰) قرارداد بیمه درمان بلندمدتی را طراحی کردند که در آن از هزینه درمان برای طبقه‌بندی ریسک استفاده کردند. مدل آنها اگرچه به لحاظ تئوری بهینه نبود اما در بررسی سطح رفاه کاملاً نزدیک به مدل گیلی (۲۰۱۹) بود. کریستینسن و همکاران (۲۰۱۸) مدلی برای برآزش هزینه‌های درمان ارائه کردند که برگرفته از مدل‌های پیش‌بینی مرگ و میر لی و

کارتر (۱۹۹۲) بدون تبدیل لگاریتمی می‌باشد. زیرا نرخ مرگ و میر و نرخ شیوع بیماری معمولاً از یک الگوی سنی پیروی می‌کنند. در این مقاله ما بیمه‌نامه درمان بلند مدت را به صورت دنباله ای از بیمه نامه های کوتاه مدت در نظر می‌گیریم که در آن حق بیمه و پوشش بیمه‌گر بر اساس هزینه‌های درمانی بیمه‌گذار به تفکیک سن و سال قرارداد و وضعیت اولیه سلامت بیمه‌گذار تعیین می‌شوند. هزینه‌های درمانی با استفاده از مدل‌های سری زمانی برآورد می‌شود و وضعیت سلامت با توجه به میزان هزینه‌های درمانی طبقه‌بندی می‌شود. از آنجایی که وضعیت سلامت در طول زمان تغییر می‌کند بیمه‌گذار تمایل دارد نه تنها در طول دوره بیمه‌نامه با توجه به وضعیت سلامتی‌اش بیمه شود بلکه در برابر تغییر وضعیت سلامت و تقسیم‌بندی مجدد ریسک هم بیمه شود. بیمه‌گر نیز به دنبال حق بیمه عادلانه و متناسب با ریسک بیمه‌گذار است. بنابراین قرارداد بهینه، قراردادی خواهد بود که مطلوبیت دو طرف را با توجه به پارامتر مذاکره بیشینه کند. پارامتر مذاکره از میان پارامترهای مربوط به قراردادهایی پارتو بهینه انتخاب می‌شود به طوری که معادله نش (۱۹۵۰) را بیشینه می‌کند. با توجه به عدم قطعیت در برآورد هزینه‌های درمان، برای حق بیمه‌های سال‌های آتی بازه پیش‌بینی بوت‌استرپی محاسبه می‌شود.

مدل: فرض می‌کنیم بیمه‌گذار و بیمه‌گر هر دوریسک گریز باشند. بیمه درمان T دوره‌ای در نظر می‌گیریم که در آن هزینه‌های درمانی فردی که در X سالگی قرارداد بیمه، منعقد می‌کند و در سال t ام قرارداد با y^{x+t} نشان می‌دهیم. مطابق کریستینسن (۲۰۱۸)، y^{x+t} دارای توزیع نرمال با پارامترهای $(\alpha_{x+t} + \beta_{x+t}k_t, \sigma^2)$ می‌باشد. که در آن α_{x+t} شاخص سن و $\beta_{x+t}k_t$ اثر متقابل سن و زمان و k_t یک سری زمانی است. برحسب میزان هزینه‌های درمانی، n کلاس کراندار تحت عنوان وضعیت سلامت در نظر می‌گیریم. اگر $a_s \leq y^{x+t} \leq b_s$ آنگاه y^{x+t} متعلق به کلاس s خواهد بود که دارای توزیع نرمال با پارامترهای $(\alpha_{x+t}^s + \beta_{x+t}^s k_t^s, \sigma^2)$ می‌باشد. پوشش بیمه‌گر و حق بیمه و متوسط هزینه درمانی برای فردی که در زمان صدور بیمه نامه x ساله بوده و در وضعیت اولیه سلامت s قرارداد داشته و هزینه درمانی‌اش در سال t ام قرارداد y^{x+t} است به ترتیب برابر $Cy^{x+t,s}$ ، $\pi y^{x+t,s}$ و $\bar{y}^{x+t,s}$ می‌باشد. اگر وضعیت سلامت اولیه بیمه‌گذار مشخص نباشد، متوسط هزینه‌های درمانی در سال t ام برای فرد x ساله با $\bar{y}^{x+t}$ نشان داده می‌شود.

$$\bar{y}^{x+t,s} = \sum_{i=1}^n E_i(y^{x+t})P(s_t = i | s_1 = s)$$

$$\bar{y}^{x+t} = E_s(\bar{y}^{x+t,s}) = \sum_{i=1}^n \bar{y}^{x+t,i} p(s_1 = i)$$

می‌خواهیم مقدار بهینه $Cy^{x+t,s}$ و $\pi y^{x+t,s}$ را پیدا کنیم به طوری که مقدار تابع سود مطلوبیت دو طرف را مطابق معادله نش (۱۹۵۰) بیشینه کند. تابع مطلوبیت بیمه‌گذار را U و تابع مطلوبیت بیمه‌گر را V و نرخ تنزیل v و وضعیت سلامت اولیه را s در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض ریسک‌گریز

بودن بیمه‌گذار و بیمه‌گر شرایط منطقی زیر را خواهیم داشت که در آن، وجود بیمه باید منجر به بهبود مطلوبیت برای بیمه‌گذار و بیمه‌گر شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} C(0) = 0, \quad 0 \leq Cy^{x+t,s} \leq y^{x+t} \\ \sum_{t=1}^T v^{t-1} E [U(Cy^{x+t,s} - y^{x+t} - \pi y^{x+t,s})] \geq \sum_{t=1}^T v^{t-1} E [U(y^{x+t})] \\ \sum_{t=1}^T v^{t-1} E [V(\pi y^{x+t,s} - Cy^{x+t,s})] \geq 0 \end{array} \right.$$

ما به دنبال یافتن قراردادهای هستیم که در آنها حق بیمه و پوشش بیمه‌گر به تفکیک سن و سال قرارداد، بهینه باشد. پارامتر $\rho \in [0,1]$ پارامتر مذاکره است که نشان دهنده قدرت مذاکره بیمه‌گذار است. ابتدا ما مجموعه‌ای از قراردادهای بهینه پارتو را به ازای ρ های مختلف بدست می‌آوریم که در مجموعه شرایط منطقی فوق صدق می‌کنند و از بین آن‌ها قراردادی را که سود دو طرف را مطابق معادله نش (۱۹۵۰) بیشینه می‌کند را انتخاب می‌کنیم. برای یک قرارداد بهینه بیمه درمان T دوره ای با در نظر گرفتن پارامتر مذاکره ρ مطابق بورچ (۱۹۶۰)، گربر و پافومی (۱۹۹۸) و گلوبین (۲۰۰۶) و جیانگ (۲۰۱۸) با فرض معلوم بودن وضعیت سلامت اولیه بیمه‌گذار، مسئله را به صورت زیر مطرح می‌کنیم

$$\begin{aligned} \max_{Cy^{x+t,s} \in O, \pi y^{x+t,s} \in [0, M^{x+t,s}]} H(C, \pi) = \\ \rho \sum_{t=1}^T v^{t-1} E[U(Cy^{x+t,s} - y^{x+t} - \pi y^{x+t,s})] + (1 \\ - \rho) \sum_{t=1}^T v^{t-1} E[V(\pi y^{x+t,s} - Cy^{x+t,s})] \end{aligned}$$

که در آن $M^{x+t,s} = (1 + \theta)E(y^{x+t,s})$ حداکثر حقه بیمه قابل پرداخت توسط بیمه‌گذار است. برای حل مسئله اصلی دو زیر مسئله در نظر می‌گیریم.

مسئله الف- برای مقدار ثابت $\pi y^{x+t,s}$ و $\rho \in [0,1]$ مسئله فوق به صورت زیر تعدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \rho v^{t-1} E[U(Cy^{x+t,s} - y^{x+t} - \pi y^{x+t,s})] + (1 - \rho) \sum_{t=1}^T v^{t-1} E[V(\pi y^{x+t,s} - \\ Cy^{x+t,s})] \\ \text{s.t.} \quad \sum_{t=1}^T v^{t-1} E(Cy^{x+t,s}) \leq \sum_{t=1}^T v^{t-1} \bar{y}^{x+t,s} \end{aligned}$$

مسئله فوق با به کارگیری روش ماکزیمم کردن نقطه‌ای حل می‌شود. پس از یافتن پوشش بهینه با در نظر گرفتن $\pi^{x+t,s}$ ثابت و λ دلخواه، مسئله ب را بصورت زیر حل می‌کنیم.

مسئله ب- $\max_{\pi \in [0, M]} H(C_{y^{x+t,s}}^*, \pi)$

با جایگذاری پوشش بهینه، $C_{y^{x+t,s}}^*$ در مسئله اصلی، حق بیمه بهینه را که با π^* نشان می‌دهیم به دست می‌آوریم که تابعی از $E(y^{x+t,s})$ و ρ می‌باشد. با جایگذاری π^* در رابطه $C_{y^{x+t,s}}^*$ پوشش بهینه به صورت تابعی از $y^{x+t,s}$ ، $E(y^{x+t,s})$ ، $\bar{y}^{x+t,s}$ ، ρ تعیین می‌شود. تمامی قراردادهای بهینه پاراتو به عنوان مجموعه جواب مسئله فوق انتخاب می‌شوند. نش (۱۹۵۰) با بیشینه کردن حاصلضرب مطلوبیت سود دو طرف، جواب یکتایی برای مسئله مذاکره دو طرفه بدست آورده است. به عبارت دیگر از مجموعه جواب‌های به دست آمده، جوابی که معادله نش را بیشینه کند جواب یکتای مسئله فوق است.

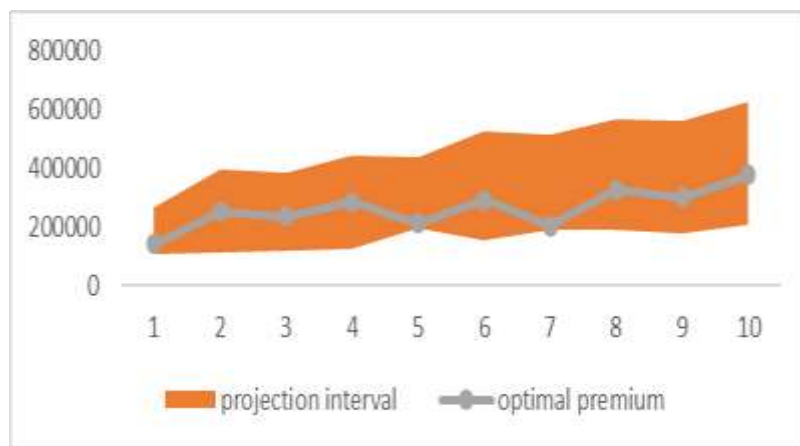
۲ نتایج اساسی

برای مثال عددی از داده‌های هزینه‌های درمانی بیمه سلامت ایران استفاده می‌کنیم که به صورت متوسط هزینه‌های درمانی برای افراد در بازه سنی ۱ تا ۶۹ سال مربوط به سال‌های ۱۳۹۴ تا ۱۳۹۸ ثبت شده است. طبقه‌بندی وضعیت‌ها بر اساس هزینه‌های درمان در سه کلاس صورت می‌گیرد. برای هر کلاس داده‌های مربوط به هزینه‌های درمان را بطور جداگانه مدل می‌کنیم. فرض می‌کنیم فرد سی ساله در سال ۱۳۹۸ بیمه نامه ده ساله خریداری کرده است. در حالت معلوم بودن وضعیت اولیه سلامت، حق بیمه و پوشش بهینه و بازه پیش‌بینی حق بیمه برای سال‌های آتی را محاسبه می‌کنیم. پارامتر مذاکره، $\rho = 0.96$ با استفاده از معادله نش بدست می‌آید.

جدول ۱: حق بیمه بهینه و پوشش بهینه بیمه‌گر برای هزینه‌های برآورد شده

	کلا س	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵	۱۴۰۶	۱۴۰۷	۱۴۰۸
برآورد هزینه	۱	۱۰۱۱۹۲	۲۹۹۸۱۸	۳۸۹۵۴۸	۳۴۴۶۶۶	۳۴۹۹۸۲	۳۵۹۳۲۵	۴۲۸۷۵۰	۳۳۵۴۸۸	۴۲۸۱۱۰	۳۳۸۷۷۰
حق بیمه	۱	۱۰۴۴۴۶	۲۵۳۹۰۲	۲۳۷۴۳۸	۲۸۶۳۸۴	۲۱۳۹۹۱	۲۹۴۱۳۰	۲۰۵۴۸۴	۳۲۸۸۰۷	۲۰۱۱۲۹	۲۷۷۳۳۱
پوش ش	۱	10119 2	29981 8	38954 8	۲۹۷۰۲ ۰	349982	۲۰۴۷۸ ۱	۳۰۰۱۱ ۶	33548 8	۳۴۳۶۷ ۲	33877 0
برآورد هزینه	۲	۶۶۸۰۷۲	۱۱۲۳۶۸ ۰	۱۲۳۴۲۲ ۱	۱۲۴۴۸۶ ۱	۱۸۴۴۷۰۲	۱۸۶۳۹۳ ۸	۱۳۲۱۰۷ ۷	۱۹۲۰۹۳ ۵	۲۰۴۴۸۶ ۱	۳۱۳۴۲۲ ۱
حق بیمه	۲	۱۴۶۹۹۶	۲۶۸۴۴۰	۲۴۰۸۲۰	۳۱۰۶۵۲	۲۱۴۳۹۸	۳۲۱۰۵۷	۱۹۹۲۰۵	۳۸۰۶۶۵	۱۹۴۱۲۰	۲۹۷۹۰۵
پوش ش	۲	۲۶۳۵۵۴	۶۴۳۲۹۱	۷۱۲۴۱۴	۸۰۵۷۶۵	۱۳۶۳۳۰۹	۹۹۱۱۶۵	۹۴۰۸۲۳	۱۶۰۹۳۸ ۵	۱۳۳۳۲۹ ۷	۱۴۸۶۹۰ ۰
برآورد هزینه	۳	۷۲۵۲۱۹ ۵	۷۳۷۲۰۱ ۷	۷۸۵۸۴۳ ۸	۸۰۳۵۴۸ ۳	۸۱۲۶۲۰۸	۸۳۳۳۴۲ ۳	۸۷۲۰۳۳ ۱	۹۰۰۲۸۲ ۵	۹۰۵۷۸۸	۹۲۴۴۱۲ ۵
حق بیمه	۳	۵۹۹۵۴۲	۶۱۴۴۳۲	۶۶۹۲۸۳	۷۷۷۲۶۸	۶۹۶۶۱۱	۷۱۵۷۷۱	۶۵۴۷۶۱	۷۲۰۲۰۳	۷۲۷۴۶۶	۷۲۵۸۰۸
پوش ش	۳	۴۲۳۳۳۲ ۳	۴۹۴۵۶۸ ۷	۴۹۵۵۳۵ ۹	۵۰۳۵۴۸ ۳	۶۵۱۲۶۲۰ ۸	۶۷۰۳۵۸ ۷	۶۸۰۷۵۳ ۵	۶۸۷۵۴۲ ۱	۷۲۵۳۱۴ ۷	۸۵۲۳۱۴ ۷

جدول ۱ میزان حق بیمه و پوشش بهینه بیمه‌گر برای هزینه‌های برآورد شده در طول مدت قرارداد را نشان می‌دهد. شکل ۱ بازه پیش‌بینی حق بیمه برای مثال فوق را با در نظر گرفتن وضعیت اولیه ۱ نشان می‌دهد.



شکل ۱: بازه پیش‌بینی حق بیمه با وضعیت سلامت اولیه ۱

مرجع‌ها

- 1- Arrow, K. (1971). *Essays in the theory of risk-bearing*. Chicago: Markham Pub. Co
- 2- Atal, J. P., Fang, H., Karlsson, M., & Ziebarth, N. R. Long-Term Health Insurance: Theory Meets.
- 3- Borch, K., (1960), *Reciprocal Reinsurance Treaties*, ASTIN Bulletin, 1: 171-191.
- 4- Claxton, G., L. Levitt, and K. Pollitz (2017). Pre-ACA Market Practices Provide Lessons for ACA Replacement Approaches. Kaiser Family Foundation.
- 5- Christiansen, M., Denuit, M., Lucas, N., & Schmidt, J. P. (2018). *Projection models for health expenses*. Annals of Actuarial Science, 12(1), 185-203.
- 6- Cochrane, J., (1995). *Time-Consistent health insurance*. J. Polit, Econ, 103,445-473.
- 7- Ghili, S., B. Handel, I. Hendel, and M. D. Whinston (2019). The welfare effects of long-term health insurance contracts. Working Paper 2218, Cowles Foundation Discussion Paper.
- 8- Ghossoub, M. (2017), *Arrow's Theorem of the Deductible with Heterogeneous Beliefs*, North American Actuarial Journal, 21:1, 15-35
- 9- Golubin, A.Y. (2006), *PARETO-OPTIMAL INSURANCE POLICIES IN THE MODELS WITH A PREMIUM BASED ON THE ACTUARIAL VALUE*. Journal of Risk and Insurance, 73: 469-487.
- 10- Nash, J., 1950, *The Bargaining Problem*, Econometrica, 18: 155-162.
- 11- Wiseman, T. (2018). *Competitive long-term health insurance*. J Health Econ, 58, 144-150

مطالعه رمز ارزها با استفاده از نظریه بازی‌ها

علی دلاور خلفی^۱، سید سجاد حسینی^{۲*} و فاطمه چوپانیان^۳

^۱ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، delavarkh@yazd.ac.ir

^۲ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، seyedsajadhoseiny@gmail.com

^۳ دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، yalda_mathtnt@yahoo.com

چکیده: یکی از فناوری‌هایی که در دهه‌های اخیر در محیط‌های دانشگاهی و صنعتی بسیار مورد توجه قرار گرفته است، فناوری بلاک‌چین است. محبوبیت شبکه‌های بلاک‌چین از یک ارز رمزنگاری شده، نشأت گرفته است تا به‌عنوان یک دفترکل عمومی که شامل تراکنش‌های غیرمتمرکز و ضد انحصاری است، فعالیت کند. شبکه‌های بلاک‌چین تاریخچه‌ی همه‌ی تراکنش‌های پردازش شده را داراست و همه‌ی کاربرها می‌توانند به این دفترکل غیرمتمرکز و توزیع شده اعتماد کنند. امروزه بلاک‌چین به‌عنوان چارچوب اصلی در دفترکل داده‌های عمومی غیرمتمرکز، کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرده است و از ارزهای رمزنگاری شده فراتر رفته است که به‌عنوان مثال می‌توان به بهداشت و درمان، بیمه و ... اشاره نمود. در این مقاله نظریه‌ی بازی‌ها به‌عنوان یک ابزار تحلیلی در مطالعه‌ی شبکه‌های بلاک‌چین بیان شده است. مدل‌های بازی به موضوعات مشترک اصلی موجود در شبکه بلاک‌چین پرداخته‌اند که به‌عنوان مثال مسائل امنیتی شامل مسائل مرتبط با مدیریت استخراج، تخصیص پاداش و انتخاب استخر، موضوعات مرتبط با تجارت اقتصاد و انرژی بلاک‌چین را می‌توان برشمرد.

کلمات کلیدی: بلاک‌چین، نظریه‌ی بازی‌ها، توزیع شده، استخراج، رمزنگاری.

طبقه بندی موضوعی: 91A80.

۱. مقدمه

در یک دهه گذشته، محبوبیت ارزهای رمزنگاری شده‌ی دیجیتال، به‌عنوان مثال بیت‌کوین [۱] و فناوری بلاک‌چین توجه‌ی زیادی را از سوی دانشگاه‌ها و صنایع به خود جلب کرده است. بلاک‌چین اولین بار [۱] برای خدمت، به‌عنوان یک دفترکل تراکنش ارزهای رمزنگاری پیشنهاد شد. این فناوری امکان حذف واسطه‌ها را در تبادلهای مختلف امکان‌پذیر کرده است. در حال حاضر برای تعداد زیادی از ارزهای رمزنگاری شده، مانند اتریوم، ریپل و ... به‌طور گسترده پذیرفته شده است. این فناوری یک دفترکل ضد تحریف، با تراکنش‌های شفاف و معاملات بی‌اعتماد

* سخنران

اما مطمئن در یک شبکه‌ی نیمه متمرکز را تضمین می‌کند. شبکه بلاک‌چین اخیراً در طیف گسترده و بسیار فراتر از ارزش‌های رمزنگاری شده مانند بهداشت و درمان، بیمه و ... استفاده شده است. با توجه به این‌که بازار ارز رمزنگاری یک بازار دارایی جدید است و اخیراً سرمایه‌گذاران زیادی را به خود جلب کرده ولی هنوز بازاری برای مطالبات مشروط ایجاد نشده است. مطمئناً دلیل آن عدم وجود بازار قیمت‌گذاری مبتنی بر ابزارهای اقتصادسنجی مالی است. در این راستا اولین قدم در جهت معرفی مدل قیمت‌گذاری مشتقات این دسته از دارایی‌های جدید در [۲] ارائه شده است.

به‌طور کلی، بلاک‌چین یک دفترکل توزیع شده از داده‌های عمومی است که با دستیابی به اجماع بین تعدادی از گره‌ها در شبکه‌ی هم‌تا به هم‌تا نگهداری می‌شود. به‌طور خاص داده‌های مورد تایید تراکنش شده در زنجیره‌ای از بلاک‌ها، یعنی در یک ساختار اصلی، داده‌ها ذخیره می‌شود و زنجیره فقط با اضافه کردن بلاک‌های تایید شده جدید، رشد می‌کند. این فرآیند شامل چندین عملیات از جمله تایید تراکنش‌ها، انتشار بلاک‌ها و اتصال بلاک‌ها به بلاک‌چین است. بنابراین، بلاک‌چین برای مشارکت کردن در شبکه به تعدادی گره اجماع نیاز دارد. اقدامات یا استراتژی‌های گره‌های منطقی انجام می‌دهند با هدف به حداکثر رساندن محبوبیت خودشان است. علاوه بر این، گره‌های مخرب ممکن است حملاتی انجام دهند که به شبکه‌های بلاک‌چین آسیب برساند. برای پرداختن به این چالش‌های امنیت می‌توان پروتکل اجماعی مانند پروتکل تحمل‌پذیری در برابر خطای بیزانس را تصویب کرد. با این حال، پروتکل‌های اجماع به یک کنترل‌کننده در یک شبکه‌ی متمرکز احتیاج دارند و فقط در بین گروه بسیار کوچکی از گره‌ها به اجماع می‌رسند. بنابراین، چنین پروتکل اجماعی برای شبکه‌ی بلاک‌چین که یک سیستم غیرمتمرکز و بزرگ مقیاس است، قابل اجرا نیست. راه‌حل‌ها و رویکردهای بهینه‌سازی مختلفی به‌منظور تجزیه و تحلیل و بهینه‌سازی استراتژی‌های گره‌های بلاک‌چین برای جلوگیری از سوء رفتارهای آن‌ها استفاده می‌شود که به‌عنوان مثال می‌توان به فرآیند تصمیم‌گیری مارکوف [3] اشاره نمود. با این وجود، رویکردهای بهینه‌سازی تأثیرات متقابل در تعامل بین گره‌ها را در نظر نمی‌گیرند. اخیراً نظریه بازی‌ها [۴]، به‌عنوان راه‌حل جایگزین در شبکه‌ی بلاک‌چین استفاده شده است.

در نظریه‌ی بازی‌ها استفاده از مدل‌های ریاضی به تحلیل روش‌های همکاری یا رقابت موجودات منطقی و هوشمند پرداخته شده است. نظریه‌ی بازی مطالعه‌ی مدل‌های ریاضی تعامل استراتژیک بین تصمیم‌گیرندگان عقلانی است [۵]. بنابراین از این نظریه برای تحلیل تعامل بین گره‌ها و استراتژی گره‌های اجماع استفاده شده است. از طریق تحلیل‌های نظریه‌ی بازی‌ها، گره‌ها می‌توانند از یکدیگر رفتارهای استخراج را یاد گرفته و پیش‌بینی کنند و سپس استراتژی‌های بهینه، مبتنی بر آنالیز تعادل داشته باشند. به عنوان مثال [۶] مروری بر انگیزه‌های فرآیند استخراج

در پروتکل بیت کوین به عنوان یک بازی سرعت بین افراد یا شرکت‌ها، ماینرها با توان محاسباتی مختلف جهت دستیابی به اجماع در میان گره‌ها شبکه‌های بیت کوین، صورت گرفته است. علاوه بر این، نظریه‌ی بازی می‌تواند برای توسعه‌ی مکانیسم‌های تشویقی که گره‌ها را از سوء رفتارها یا حملات منصرف می‌کند، مورد استفاده قرار گیرد. به همین ترتیب، کاربرد نظریه‌ی بازی‌ها در تصمیم‌گیری همه‌ی گره‌های اجماع در شبکه‌های بلاک‌چین طبیعی است. تحقیقاتی در رابطه با بلاک‌چین انجام شده است ولی تعداد کمی از این مقالات به‌طور خاص به کاربرد نظریه‌ی بازی‌ها در بلاک‌چین، به‌عنوان یک ابزار تجزیه و تحلیل کارآمد اشاره کرده‌اند. در ادامه برخی از مفاهیم کلی بلاک‌چین به اختصار بیان شده است.

۲. مروری بر مفاهیم بلاک‌چین

بلاک‌چین ابتدا به عنوان یک دفترکل ضد تحریف غیرمتمرکز با مجموعه‌ای از تراکنش‌های ثبت شده، پیشنهاد شد. این تراکنش‌ها از طریق یک فرآیند اجماع غیرمتمرکز از میان عوامل غیر قابل اعتماد قبل از اتصال به زنجیره تأیید شده‌اند. در ذیل برخی از ویژگی‌ها و مفاهیم مهم در بلاک‌چین [۷] به اختصار بیان شده است.

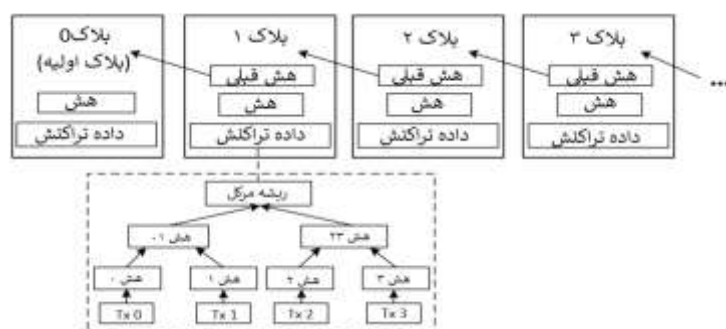
- **شبکه غیرمتمرکز:** از آن جا که شبکه‌ی توزیع شده به هر واحد محاسباتی امکان استفاده از توان محاسباتی خود را جهت شرکت در بلاک‌چین می‌دهد و به‌علاوه هر تراکنش در بلاک‌چین باید از طریق پروتکل اجماع به توافق همه‌ی گره‌ها برسد، می‌توان انحصار موجود در شبکه‌ی متمرکز در بلاک‌چین را حذف کرد.
- **دفتر کل ضد تحریف:** تکنیک‌های رمز نگاری مورد استفاده در بلاک‌چین این اطمینان را می‌دهند که همه‌ی تغییرات روی داده‌های تراکنش شده در بلاک‌چین توسط همه‌ی گره‌ها در شبکه قابل مشاهده است. این بدین معناست که تراکنش ثبت شده در بلاک‌چین قابل تغییر و دستکاری نیست، مگر اینکه اکثریت گره‌ها به خطر بیفتند.
- **تراکنش شفاف:** همه‌ی تراکنش‌های انجام شده در بلاک‌چین ذخیره می‌شوند. برای انجام تأیید می‌توان همه‌ی تراکنش‌های موجود در بلاک‌چین را پیگیری کرد و این تراکنش‌ها برای همه‌ی گره‌ها در شبکه بلاک‌چین شفاف هستند.
- **معامله‌ی بی اعتماد اما مطمئن:** با استفاده از امضای کلید نامتقارن دیجیتال، شبکه‌ی بلاک‌چین تضمین می‌کند که تنها فرستنده و گیرنده‌ای که دارای جفت کلید نامتقارن هستند، می‌توانند معامله را بدون دخالت شخص ثالث مورد اعتماد انجام دهند.

۳. سازمان داده و جریان کاری بلاک چین

سازمان داده رمزنگاری شده، نقش بسیار مهمی در ساختار بلاک چین ایفا می کند. برخی از مولفه های اصلی پشتیبانی از سازمان داده در شبکه بلاک چین عبارتند از:

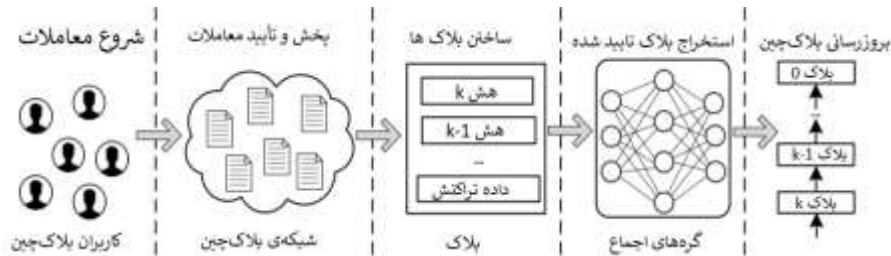
- **تراکنش:** تراکنش اساسی ترین مولفه ی بلاک چین است. یک تراکنش توسط کاربر بلاک چین پیشنهاد می شود و از داده های تراکنش که مقدار مورد نظر را مشخص می کند، تشکیل شده است. مثلاً سکه های اعتباری دیجیتالی در ارزهای رمزنگاری، آدرس فرستنده و گیرنده و همچنین هزینه تراکنش متناظر را مشخص می کنند.
- **بلاک:** یک بلاک از یک هدر بلاک و مقدار معینی از تراکنش ها تشکیل شده است. هدر بلاک اشاره گر هش و ساختار داده درختی مرکب را مشخص می کند.
- **اشاره گر هش:** اشاره گر هش بلاک فعلی، شامل مقدار هش مرتبط با بلاک قبلی است که حاوی نشانگر هش به بلاک قبل از آن نیز است. بدین ترتیب، نشانگرهای هش می توانند برای ساختن پیوندی از سوابق، یعنی بلاک چین به کار گرفته شوند.

همان طور که در شکل ۱ مشاهده می شود یک بلاک چین معمولی، یک لیست از بلاک های افزایشی رو به رشد است که به طور پیوسته با استفاده از نشانگرهای هش که یک لیست پیوندی خطی است، مرتبط می شوند. به طور خاص هدر بلاک شامل یک نشانگر هش است که با بلاک قبلی در ارتباط می باشد و داده های تراکنش به عنوان درختان مرکب نشان داده می شوند.



شکل ۱: نمونه ای از ساختار داده بلاک چین که تراکنش ها در بلاک گنجانده شده اند و بلاک توسط یک ریشه مرکب مشخص شده است را نشان می دهد [۷]

حفظ شبکه ی بلاک چین به گره های بلاک چین برای انتشار تراکنش، ذخیره داده در بلاک ها، تأیید تراکنش و نهایتاً رسیدن به اجماع نیاز دارد. مکانیسم کار بلاک چین به شرح زیر بیان شده است (شکل ۲):



شکل ۲: مروری بر گردش کاری کار بلاک چین [۷].

یک تراکنش آغاز شده از طریق یک گره به شبکه‌ی توزیع شده پخش می‌شود. گره‌های موجود در بلاک‌چین، تراکنش و همچنین گره‌ای که تراکنش را پخش می‌کند را تأیید می‌کنند. بیش از یک گره ممکن است که دسته‌ای از زیرمجموعه‌های متفاوت از تراکنش‌های جدید تأیید شده را در بلاک‌های کاندید خود قرار دهد و آن‌ها را به کل شبکه پخش کند. همه یا بخشی از گره‌های موجود در شبکه‌ی بلاک‌چین با اجرای برخی از توابع معین تعریف شده توسط پروتکل اجماع، در اعتبارسنجی این بلاک مشارکت دارند. هر بلاک که در اجماع تأیید شده است، به زنجیره‌ی بلاک‌ها اضافه می‌شود و بعد از به روز رسانی، بلاک‌چین جدید ایجاد می‌شود.

۴. نتیجه:

در این مقاله مروری بر مفاهیم شبکه بلاک چین، ساختمان داده و گردش کاری بلاک‌چین ارائه و سپس رویکرد نظریه بازی اشاره شده است. در بحث تولید رمز ارزها همانند بسیاری از مسائل دنیای واقعی بحث بهینه سازی مطرح است که در این راستا با وجود گره‌های متعدد، تأثیرات متقابل در گره‌ها و حداکثر رساندن دستیابی به اجماع در بین آن‌ها با رویکرد نظریه‌ی بازی‌ها امکان پذیر است.

مرجع‌ها

1. S. Nakamoto, "Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system.(2008)," 2008.
2. C. Y. H. Chen, W. Härdle, A. J. Hou and W. Wang, *Pricing cryptocurrency options: The case of crix and bitcoin*, Available at SSRN 3159130 (2018).
3. E. Altman, *Constrained markov decision processes*, vol. 7, CRC Press, 1999.
4. R. B. Myerson, *Game theory*, Harvard university press, 2013.
5. F. Tschorsch and B. Scheuermann, *Bitcoin and beyond: A technical survey on decentralized digital currencies*, IEEE Communications Surveys & Tutorials **18** (2016), no. 3, 2084-2123.
6. N. Houy, *The bitcoin mining game*, Available at SSRN 2407834 (2014).
7. Z. Liu, N. C. Luong, W. Wang, D. Niyato, P. Wang, Y.-C. Liang and D. I. Kim, *A survey on applications of game theory in blockchain*, arXiv preprint arXiv:1902.10865 (2019).

بهینه سازی سبد سهام با رویکرد سری زمانی

آذر غیائی

دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی

azarghyasi@atu.ac.ir

چکیده: در بازارهای مالی همه افراد به نوعی در جستجوی حداکثرسازی بازده‌های احتمالی خود همراه با سطوح ریسک مختلف در زمانهای متفاوت هستند. چون با نظر گرفتن تنها یک دارایی و سرمایه‌گذاری بر یک نوع ابزار مالی ریسک بیشتری نمایان می‌شود لذا تکنیک تئوری مدرن پرتفوی که در آن از ترکیب چند دارایی و سرمایه‌گذاری در بازارهای مختلف استفاده می‌شود میتواند به متعادل شدن سرمایه‌گذاری و کاهش ریسک کمک می‌کند اما این تکنیک مانند هر روش دیگری در محاسبه ریسک و بازده سهام نیاز به بازنگری و بررسی بیشتری دارد و افراد باید عوامل مختلف دیگر را در هنگام استفاده از این روش در نظر بگیرند.

در این تحقیق با هدف ارائه یک الگوریتم مطلوب قادر به یافتن یک سبد مناسب برای مقدار معینی از دارایی، با توجه به ریسک شرطی، بازده و تنوع آنها صورت گرفته شده است که بترتیب برای تنوع در منابع سود و ریسک شاخص‌های آنتروپی در نظر گرفته شده است و همچنین از طراحی مخلوط برای مدل کردن پورتفولیوی بهینه با سری‌های زمانی بازده و ریسک مدلسازی شده توسط مدل‌های **ARMA - GARCH** برای شرکت های پذیرفته شده سازمان بورس تهران استفاده شده است.

کلمات کلیدی: پورتفولیوی - ریسک و بازده - آنتروپی - **ARMA - GARCH**

۱ مقدمه

مساله بهینه سازی پرتفوی یکی از مهم ترین موضوعات تحقیقاتی در حوزه امور مالی ریاضیات بوده، و به خوبی می‌دانیم که ریسک سرمایه گذاری را میتوان با ایجاد تنوع در دارایی ها مطابق با دانش حاصل از راه حل های بهینه ارائه شده استفاده کرد که تا حد ممکن مشکلات پیشرو کاهش یابد [2]. پس در زمینه این موضوع توسط Markowitz در ۱۹۵۲ گزارش هایی دریافت شده که می تواند یکی از حوزه های فعال تحقیقاتی بشمار آید.

سرمایه‌گذاری به عنوان یک تصمیم مالی همواره دارای دو مؤلفه مهم بنام ریسک و بازدهی بوده بطوریکه این دو را نمیتوان از هم جدا فرض کرد پس مبادله این دو، ترکیب های گوناگون را در زمینه سرمایه گذاری عرضه می نماید.

از یک طرف، سرمایه گذاران به دنبال بیشینه کردن عایدی خود می باشد و از طرف دیگر، با شرایط عدم اطمینان حاکم بر بازارهای مالی او را با عدم اطمینان مواجه می سازد. پس رابطه میان ریسک و بازده مهمترین اصل تصمیم گیری بوده است. بنابراین در محاسبات مالی و انتخاب سهام و سبد سرمایه گذاری باید به گونه ای عمل شود که تصمیمات سرمایه گذار از لحاظ درجه ریسک و بازده، به ترتیب اولویت بندی شود، تا بتواند با در نظر گرفتن امکانات مالی و میزان ریسک پذیر سبد سهام مطلوب خویش را تشکیل دهند. پس انتخاب سبد سهام یکی از اصول مهم در سرمایه گذاری می باشد و مقدار ریسک این انتخاب از اهمیت بسزایی برخوردار است. سرمایه گذاران علاقمندند که با پذیرش سطح مشخصی از ریسک به بازده مورد انتظار خود دست یابند. از اینرو، مقدار ریسک به نیاز سرمایه گذار بستگی دارد و سنجه های ریسک برای سرمایه گذاران مختلف متفاوت است [۱]. از مشکلاتی که بسیاری از سرمایه گذاران در بازار سرمایه با آن مواجه هستند دسترسی نداشتن به اطلاعات کافی و همچنین نداشتن دانش لازم برای تحلیل بازار سرمایه و به تبع آن، سهام مورد نظر خود، برای سرمایه گذاری است. در این شرایط، نیاز به ابزار و مدل های کارآمد جهت تحلیل داده های به منظور کاهش ریسک ناشی از تشکیل سبد سهام برای سرمایه گذاران و تصمیم گیری مطمئن تر احساس می شود. از آنجا که رویدادهای آتی به طور کامل قابل پیش بینی نبوده، و عامل ریسک وجود دارد. لذا توجه به رویکرد اندازه گیری ریسک احساس میشود. در این میان پژوهشگران تحقیقاتی را در این زمینه انجام دادند.

محمودی و سو [3] برای مدل سازی و پیش بینی میانگین و نوسانات شرطی، از ویژگی های مناسب - $MA(1)$ GARCH استفاده کردند. هو و سواردی [4] از مدل غیرپارامتری GARCH برای به دست آوردن نوسانات بازده برای بازار نفت خام استفاده کردند. چانگ و همکاران [5] در مورد استفاده از $GARCH(1,1)$ ، برای برآورد واریانس (نوسانات) پیش بینی یک روزه برای سبدها متشکل از روغن خام، ذرت و سویا بحث کرد.

2 مدل های پژوهش روش تحقیق

2-1 بهینه سازی سبدها

- مدل میانگین واریانس مارکویتز

بهینه سازی سبد سهام یکی از مسائل مهم در حوزه علوم مالی و سرمایه گذاری است، و کاربردهای فراوانی را، در برنامه ریزی ها و تصمیم گیری های مالی دارد. مبانی تئوری این مساله، در اوایل دهه ۱۹۵۰ میلادی، و توسط هری مارکویتز پایه ریزی شده است و بسیاری از دستاوردهای امروزی این شاخه از علوم مالی، مرهون تلاش ها و مطالعات وی است [6].

او به طور کلی نشان داد که چگونه تنوع بخشی در سبد سرمایه، ریسک آن را برای سرمایه گذار کاهش می دهد. سرمایه گذاران می توانند سبد سهام کارا را به ازای یک بازده معین و از طریق کمینه کردن ریسک سبد سهام به دست آورد و در ادامه فرآیند فوق می تواند منجر به تشکیل سبدهای کارا شود که اصطلاحاً مرز کارایی میانی - واریانس نامیده می شود.

$$\begin{aligned} \min \rho(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \\ \max \mu(x) &= \sum_{i=1}^n x_i \\ s.t. : \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n \delta_i &\leq k \\ l_i \delta_i &\leq x_i \leq u_i \delta_i \quad i = 1, \dots, n \\ \delta_i &\in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.2)$$

2-2 مدل سازی سری های زمانی

افزایش دقت برآورد ریسک پرتقاضا بوده و به چالشی همیشگی در مقابل پژوهشگران تبدیل شده است پس موضوع مدل سازی واریانس شرطی می تواند به عنوان معیاری در مدیریت ریسک انتخاب پورتفوی بهینه از اهمیت زیاد برخوردار باشد. با توجه به این موضوع مدل های GARCH از تکنیک های سنتی مانند میانگین متحرک، هموارسازی نمایی و رگرسیون خطی در مدل سازی و پیش بینی کار سری های زمانی شرطی می توانند بهتر عمل کنند.

از این رو مطابق با فام و یانگ [۷] مدل $GARCH(p, q) - ARMA(r, m)$ می تواند برای یک فرآیند تک متغیره تخمین بدین صورت تخمین زده شود:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega_i + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \\ y_t &= c + \sum_{i=1}^r \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_i \theta_{t-j} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_i &= \delta_t Z_t, Z_t \sim N(0,1)\end{aligned}\quad 2.2$$

همچنین برای لحظه ای معین t ، بازده دارایی های i که به عنوان $ARMA(1,1)$ ، و واریانس های شرطی مربوط به آنها به عنوان $GARCH(1, 1)$ می تواند به شرح زیر باشد:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega_i + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ y_t &= c + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_1 \theta_{t-1} + \varepsilon_{i,t}\end{aligned}\quad (2.3)$$

از آنجاییکه که بی ثباتی های مالی بین داراییهای مختلف و همچنین بین بازارهای مختلف در طول زمان با یکدیگر حرکت میکنند و همچنین مشاهده شده که اغلب تغییرات بزرگ به دنبال تغییرات بزرگ و تغییرات کوچک به دنبال تغییرات کوچک رخ میدهند. پس نتیجه میشود نمونه های سریهای زمانی دارای ویژگیهای خاص خود می باشند.

2-3 مدل های همبستگی شرطی

مدل های همبستگی شرطی در واقع، به عنوان ترکیبات غیرخطی از مدل های $GARCH$ تک متغیره هستند. این مدلها اجازه میدهند که در یک سو، واریانس شرطی و در سوی دیگر، ماتریس همبستگی شرطی به صورت جداگانه تصریح شوند.

بولر سلف (۱۹۹۰)، یک گونه از مدل های $MGARCH$ را معرفی میکند که همبستگیهای شرطی ثابت بوده و کوواریانس شرطی نسبتی از حاصلضرب انحراف معیارهای شرطی متناظر می باشد

$$H_t = D_t^R D_t = \left(\rho_{ij} \sqrt{h_{iit} h_{jjt}} \right)$$

بطوریکه:

$$h_{iit} = \omega_i + \alpha_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_1 h_{i,t-1} \quad (2.4)$$

۳-نتایج

انتخاب سبد سهام در مباحث سرمایه گذاری کار دشوار و سختی است. سرمایه گذار در این حالت، خود را در مقابل انتخابهای گوناگونی می بیند که باید یکی از آنها را به عنوان بهترین روش انتخاب کند. پس با هدف ارائه یک الگوریتم مطلوب قادر به یافتن یک سبد مناسب برای مقدار معینی از دارایی، با توجه به ریسک شرطی، بازده و تنوع آنها که باعث دستیابی به بیشترین بازده، دارای کمترین ریسک و از سوی دیگر کمترین سطح ضریب همبستگی بین داراییهای باشد. با توجه به اینکه در این الگوریتم طراحی شده انتخاب مجموعه دارایی هایی است که علاوه بر تصمیم گیری درباره اینکه کدام سهم در مقایسه با سایر سهام در وضعیت بهتری قرار دارد و شایستگی انتخاب شدن و قرار گرفتن در سبد سرمایه گذاری فرد را از طریق ترکیب سبدها مورد استفاده قرار می گیرد از شرکت های پذیرفته شده در سازمان بورس تهران برای پیش بینی مدل استفاده شده است.

. لازم به ذکر است که اگر مدل های همبستگی شرطی به عنوان ترکیبات غیرخطی از مدل های GARCH تک متغیره باشند که تلاطم خوشه ای و دم پهن از ویژگی های آنها بشمار میاید آنگاه از مدل های پر کاربرد تلاطم مشروط M GARCH استفاده میشود. همچنین در ادامه از دو مدل اصلی CCC و DCC استفاده مینماییم. با توجه به اینکه دارایی های اصلی مورد بررسی میتواند شامل شاخص های از بورس اوراق بهادار تهران باشد، ماتریس واریانس-کوواریانس دارای ابعاد مربعی به تعداد شاخص میباشد تفاوت آنها با نتایج مدل های CCC و DCC میباشد که علت این تفاوتها را میتوان در ساختار متفاوت ماتریس واریانس-کوواریانس شرطی تولید شده توسط هر یک از این مدلها جستجو کرد که به تفاوت در اوزان بهینه هریک از داراییها در مدل های مختلف منتج میشود. به طور کلی میتوان بیان کرد که اندازه واریانس داراییها در میزان سهم آنها از سبد سرمایه گذاری نقش اساسی دارد و دارایی های که واریانس بیشتری دارند (به عبارتی نوسان بیشتری دارند) سهم کمتری از پرتفوی را به خود اختصاص میدهند.

مرجع ها

1. M. Abzari, A Single Period Multi Objective Mathematical Model for Portfolio Investment Under an Integrated Risk Measure, Volume 2, 1393
2. T.Shinzato, Maximizing and minimizing investment concentration with constraints of budget and investment risk, Physica Statistical Mechanics and its Applications, Volume 490, 15 January 2018, Pages 986-993758.
3. H.Mohammadi, Su L. International evidence on crude oil price dynamics:
4. Applications of ARIMA-GARCH models. Energy Econ 2010; 32:1001-8..
5. Hou A, Suardi S. A nonparametric GARCH model of crude oil price return
6. Volatility. Energy Econ 2012; 34:618-26.
7. Chang T-H, Su HM, Chiu CL. Value-at risk estimation with the optimal dynamic
8. Biofuel portfolio. Energy Econ 2011;33:264-72.

9. Markowitz H. Portfolio selection. J Finan 1952;7:77–91.
10. Pham HT, Yang BS. Estimation and forecasting of machine health condition
11. using ARMA/GARCH model. Mech Syst Sig Process 2010;24:546–58.
12. 8. Bollerslev T. Modelling the coherence in short-run nominal
exchange rates: a
13. multivariate generalized ARCH model. Rev Econ Stat 1990;72:498–505

بهینه سازی سبد سهام تحت دینامیک های تصادفی

زینب غلام پور نقندر^{۱*}، شکوفه بنی هاشمی^۲، نویده مدرسی^۲

^۱ دانشجوی دکتری، گروه ریاضی مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

^۲ z_gholampour@atu.ac.ir

^۲ استادیار، گروه ریاضی مالی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

^۲ shbanihashemi@atu.ac.ir ^۲ n.modarresi@atu.ac.ir

چکیده: در بازارهای مالی افراد به دنبال ماکسیم کردن بازده های خود در کنار مینیم کردن ریسک موجود در بازار هستند. برای کارآمدتر شدن سبد بهینه سازی شده از مدل های تصادفی استفاده شده است، همچنین برای اینکه هرچه بیشتر به شرایط بازارهای مالی نزدیک تر شویم از $n + 1$ دارایی در مدل های معادلات دیفرانسیل تصادفی بهره گرفته ایم. در این مقاله به دینامیک حرکت براونی تحت عنوان مدل ژو و لی اشاره شده است و سپس مدل تعمیم یافته آن با در نظر گرفتن جهش ها با استفاده از فرآیند پواسون مرکب بیان شده است. در چارچوب نظریه سبد تصادفی از نمایش لگاریتمی برای دینامیک سهام استفاده می شود، در این مدل لگاریتمی نرخ رشد جایگزین نرخ بازده می شود. نشان داده می شود که نرخ رشد سبدها نه تنها به نرخ رشد سهام بستگی دارد، بلکه به نرخ رشد مازاد هم بستگی دارد که با واریانس سهام و کواریانس سهام تعیین می شود.

کلمات کلیدی: بهینه سازی تصادفی، فرآیند پواسون مرکب، معادلات دیفرانسیل تصادفی، نرخ رشد

۱. مقدمه: مسئله بهینه سازی سبد سهام همواره یکی از موضوعات مهم و کاربردی در بازار های مالی بوده است. ژو و لی، سبدهای بهینه با دینامیک قیمت دارایی که از معادله دیفرانسیل تصادفی پیروی می کنند را مطالعه کردند و مرز کارا را برای مسئله بهینه سازی سبدها ارائه دادند. فرنهولز^[1] نظریه سبد تصادفی را معرفی کرد تا ابزاری برای استفاده کاربردی در بازار های سهام و تجزیه و تحلیل اوراق بهادار با رفتار کنترل شده فراهم کند. نظریه سبد تصادفی، مطالعاتی در مورد سبدهای تولید شده ارائه می کند. ارزش سبد تولیدی نسبت به کل سرمایه صرفاً تابعی از وزن بازار می باشد. این فرمول شامل انتگرال تصادفی یا رانش نمی باشد؛ همین موضوع سبب تجزیه و تحلیل بسیار آسان برای برآورد و تخمین بازار شده است. در نظریه سبد تصادفی از نمایش لگاریتمی برای دینامیک سهام استفاده می شود، در این مدل لگاریتمی نرخ رشد جایگزین نرخ بازده شده است. هدف اصلی از نظریه سبد تصادفی کشف فرصت های آربیتراژ با فرضیات حداقل و واقع بینانه در مورد رفتار بازارهای سهام است [4]. در حالت کلی این باور وجود دارد که قیمت سهام از حرکت براونی هندسی تبعیت می کند، تحقیقات ژو و لی^[5] بر پایه قیمت دارایی می باشد که نسبت به زمان پیوسته است؛ در حالی که در مطالعات مالی، فرایند قیمت دارایی لزوماً پیوسته

¹ Ferencz

² X. Y. Zhou, D. Li

نیست. به طور مثال توجه کنید به مثال های خاص مانند (وقایع مهم ناگهانی، تغییر سیاست ها و ...) در این صورت جهشی رو به بالا یا پایین برای قیمت سهام رخ خواهد داد. زمان و تاثیرات آن وقایع رخ داده، تصادفی است. بنابراین می توان این تغییرات را به کمک فرآیند پواسون توصیف نمود. در این مقاله هم مشابه ژو و لی به مسائل میانگین-واریانس پرداخته شده است و سپس به قیمت سهام که از معادله دیفرانسیل تصادفی پرش انتشار پیروی می کند نیز اشاره شده است [3]. در بخش های مختلف این مقاله به قسمت های زیر اشاره شده است. ابتدا مدل بازار بیان شده است؛ در این قسمت به مدل بازار که از دینامیک حرکت براونی پیروی می کند، پرداخته شده است و سپس تعمیم آن که مدل بازار طبق معادله دیفرانسیل تصادفی پرش انتشار است؛ بیان شده است. در قسمت بعدی جزئیات و تعاریف نرخ رشد گفته شده است و مسئله بهینه سازی و متنوع سازی سبد سهام را بیان کرده است. در واقع در این مقاله مروری بر مدل های بازار شده است و مسائل بهینه سازی مربوط به هریک از مدل های بازار بیان شده است.

۲. مدل های بهینه سازی تصادفی

مدل بازار M با یک دارایی غیر ریسکی و n دارایی ریسکی تحت عنوان مدل ژو ولی به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$dX_i(t) = X_i(t)(b_i(t)dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv}dW(t)), dB(t) = B(t)r(t)dt, B(0) = 1$$

فرض کنید $X(t)$ بیانگر ثروت سرمایه گذار در لحظه $t \geq 0$ باشد و $\pi_i(t)$ وزن سهام i ام ($i = 0, 1, \dots, n$) در لحظه t باشد: $X(t) = \sum_{i=0}^n \pi_i(t)X_i(t)$. همچنین اگر معامله های سهام به صورت پیوسته انجام گیرد و هزینه معامله در نظر گرفته نشود؛ آنگاه:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \sum_{i=0}^n \pi_i(t) dX_i(t) \\ &= \left\{ r(t)\pi_0(t)B(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t)\pi_i(t)X_i(t) \right\} dt + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)X_i(t) \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j(t) \\ &= \{ r(t)X(t) + \sum_{i=1}^n [b_i(t) - r(t)]u_i(t) \} dt + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t)u_i(t)dW_j(t) \end{aligned}$$

به طوری که $u_i(t) = \pi_i(t)X_i(t)$ میزان سرمایه را در i امین سهام نشان می دهد.

$u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ سبدی برای سرمایه گذار تعریف می شود. هدف سرمایه گذار ماکسیمم کردن میانگین ثروت، و همین طور مینیمم کردن واریانس ثروت می باشد. سبد u قابل قبول نامیده می شود هرگاه $u \in L_F^2(0, T, R^n)$ باشد. همچنین سبد قابل قبول $\bar{u}$ سبد کارا نامیده می شود اگر هیچ سبد قابل قبولی وجود نداشته باشد به طوری که

$J_1(u) := -EX(T)$, $J_2(u) := VarX(T)$, $J_1(u) \leq J_1(\bar{u})$, $J_2(u) \leq J_2(\bar{u})$ و حداقل یکی از نابرابری ها به طور صریح برقرار باشد. در این شرایط، $(J_1(\bar{u}), J_2(\bar{u})) \in R^2$ را نقطه کارا می نامند. به مجموعه ای از همه ی

نقاط کارا مرز کارا گفته می شود. به عبارت دیگر سبد کارا، سبدي است که هیچ سبد بهتری با توجه به معیارهای میانگین-واریانس وجود نداشته باشد.

- همچنین مدل بازار با جهش های ناگهانی از معادله دیفرانسیل تصادفی پرش انتشا [زیر تبعیت می کند [3].

$$dX_i(t) = X_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j(t) + \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(t) dN_k(t) \right] \quad t \in [0,1] \quad , \quad X_i(t) = X_i$$

به طوری که $\varphi_i(t) = (\varphi_{i1}(t), \dots, \varphi_{in}(t)) : [0, T] \rightarrow R^n$ دامنه پرش می باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} dX(t) &= \sum_{i=1}^n \pi_i(t) dX_i(t) \\ &= \{r(t)x(t) + \sum_{i=1}^n [b_i(t) - r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t)u_i(t)dW_j(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ik}(t)u_i(t)dN_k(t) \end{aligned}$$

به طوری که $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T, i = 0, 1, \dots, n, u_i(t) = \pi_i(t)X_i(t)$ یک سبد می باشد. سبد u قابل قبول نامیده می شود هرگاه $u \in L_F^2(0, T, R^n)$ باشد.

- در این قسمت به نظریه سبد تصادفی که دینامیک بازار را به صورت لگاریتمی در نظر گرفته است و از نرخ رشد به جای نرخ بازده استفاده کرده است، پرداخته می شود. مدل بازار M با یک دارایی غیر ریسکی و n دارایی ریسکی به صورت زیر در نظر گرفته می شود [2].

$$dX_i(t) = X_i(t)(b_i(t)dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv} dW(t)) \quad dB(t) = B(t)r(t)dt \quad B(0) = 1$$

فرآیند کواریانس ماتریس معین مثبت سهام های بازار با نماد زیر تعریف می شود:

$$a_{ij}(t) := \sum_{v=1}^d \sigma_{iv}(t)\sigma_{jv}(t) = (\sigma(t)\sigma(t)') = \frac{d}{dt} \langle \log X_i, \log X_j \rangle(t)$$

در مدل بازار $M, b(\cdot) = (b_1(\cdot), \dots, b_n(\cdot))^T$ نرخ بازده است؛ در نظریه سبد تصادفی به جای استفاده از نرخ بازده از نرخ رشد استفاده می شود. در این صورت بنا به لم ایتو:

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= X_i(t)(b_i(t)dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv} dW(t)) \Rightarrow \\ d\log X_i &= \left(b_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{v=1}^d \sigma_{iv}^2 \right) dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv} dW(t) \Rightarrow \\ d\log X_i &= \left(b_i(t) - \frac{1}{2} a_{ii}(t) \right) dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv} dW(t) \Rightarrow \gamma_i(t) := b_i(t) - \frac{1}{2} a_{ii}(t) \end{aligned}$$

بنابراین دینامیک بازار به صورت لگاریتمی بیان می شود: $d\log X_i = \gamma_i(t)dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{iv}(t)dW_v(t)$ سبد $\pi(\cdot) = (\pi_1(\cdot), \dots, \pi_n(\cdot))^T$ فرآیند F -اندازه پذیر، به صورت یکنواخت کراندار با مقادیر تعریف شده در مجموعه $\cup_{k \in N} \{(\pi_1(\cdot), \dots, \pi_n(\cdot)) \in R^n | \pi_1^2 + \dots + \pi_n^2 \leq k^2, \pi_1 + \dots + \pi_n = 1\}$ می باشد.

توجه شود که سبد شرایط فروش استقراسی را ندارد. یعنی سبد به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Delta^n := \{(\pi_1(\cdot), \dots, \pi_n(\cdot)) \in R^n | \pi_1 \geq 0, \dots, \pi_n \geq 0, \pi_1 + \dots + \pi_n = 1\}$$

همچنین ترتیب زیر برای سبد تعریف شده است.

$$\max \pi_i(t) := \pi_{(1)}(t) \geq \pi_{(2)}(t) \geq \dots \geq \pi_{(n-1)}(t) \geq \pi_{(n)}(t) := \min \pi_i(t)$$

فرآیند ثروت $V^{w,\pi}(\cdot)$ نسبت به سبد π و مقدار اولیه $w > 0$ معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را تعریف می کند.

$$\frac{dV^{w,\pi}(t)}{V^{w,\pi}(t)} = \sum_{i=1}^n \pi_i \frac{dX_i(t)}{X_i(t)} = \dot{\pi}(t)(b(t) + \sigma(t))dW(t) = b_{\pi}(t)dt + \sum_{v=1}^d \sigma_{\pi v}(t)dW_v(t)$$

طبق لم ایتو:

$$d\log V(t) = \{\sum_{i=1}^n \pi_i b_i(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma_{iv}^2 \pi_j(t)\}dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{iv} \pi_i dW(t)$$

طبق تعریف نرخ رشد: $\gamma_{\pi}(t) := \sum_{i=1}^n \pi_i \gamma_i(t) + \gamma_{\pi}^*(t)$ بنابراین

$$\gamma_{\pi}^*(t) := \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n \pi_i(t) a_{ii}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t))$$

$\gamma_{\pi}^*(t)$ نرخ رشد مازاد نامیده می شود. توجه شود که فرآیند قیمت سهام به صورت زیر نرمال می شود:

$$X(t) := X_1(t) + \dots + X_n(t) \quad \text{و} \quad \mu_i(t) := \frac{X_i(t)}{X(t)}$$

۳. بهینه سازی سبد سهام بر اساس نرخ رشد

اگر مدل بازار به صورت لگاریتمی در نظر گرفته شود: طبق ماکویتز واریانس سبد مینیمم می گردد یعنی:

$$a_{\pi\pi}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t)$$

مینیمم می شود. همچنین برای نرخ رشد کران در نظر گرفته می شود:

$$\gamma_{\pi}(t) := \sum_{i=1}^n \pi_i \gamma_i(t) + \gamma_{\pi}^*(t) = \sum_{i=1}^n \pi_i \gamma_i(t) + \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^n \pi_i(t) a_{ii}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i(t) a_{ij}(t) \pi_j(t)) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(t) (\gamma_i(t) + \frac{1}{2} a_{ii}(t)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i a_{ij} \pi_j \geq \gamma_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i(t) (\gamma_i(t) + \frac{1}{2} a_{ii}(t)) \geq \gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i a_{ij} \pi_j$$

۴. متنوع سازی سهام بر اساس نرخ رشد

اگر کل سرمایه در یک نوع سهام قرار نگیرد، متنوع است و تنوع بازار معیاری برای توزیع یکنواخت سرمایه در میان

سهام ها می باشد [2]. مدل بازار M در بازه زمانی $[0, T]$ متنوع نامیده می شود هرگاه $\delta \in (0, 1)$ به صورت

$$\max \mu_i(t) := \mu_{(1)}(t) < 1 - \delta, \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

وجود داشته باشد. مدل بازار M در بازه $[0, T]$ متنوع نامیده می شود، اگر عددی مانند C وجود داشته باشد به طوری

$$\gamma_\mu^*(t) \geq C, \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad a.s. \quad \text{که}$$

اگر تمام سهم ها در مدل بازار M دارای نرخ رشد یکسان باشند، آنگاه:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma_\mu^*(t) dt = 0 \quad a.s.$$

بنابراین اگر نرخ رشد همه سهم ها با هم برابر باشند متنوع سازی سبد سهام وجود ندارد.

در فرنهلز و کاراتزاس* [2] نشان داده شده است، که تنوع بازار موجب آربیتراژ می شود. برخلاف ریاضیات مالی کلاسیک، نظریه سبد تصادفی از وجود آربیتراژ در بازارها بیزار نیست، بلکه ویژگی های بازار را که حاکی از وجود آربیتراژ است مطالعه می کند. علاوه بر این، نشان می دهد که وجود آربیتراژ مانع از توسعه نظریه قیمت گذاری اختیار یا انواع خاصی از حداکثر کردن سود نمی شود.

مراجع

1. J. Ruf & K.Xie (2019): Generalised Lyapunov Functions and Functionally Generated Trading Strategies, Applied Mathematical Finance.
2. Robert Fernholz, Ioannis Karatzas, Stochastic Portfolio Theory, 2008.
3. Tiantian Liu, Jun Zhao and Peibiao Zhao, Portfolio problems based on jump-diffusion models, Filomat (2012), pp 573–583(11 pages).
4. Ting-Kam Leonard Wong, Optimization of relative arbitrage, Springer, 2015.
5. X. Y. Zhou, D. Li, Continuous-time mean portfolio selection: a stochastic LQ framework, Applied Mathematics & Optimization 42(2000) 19-33.

³Ioannis Karatzas

رویکردی از برنامه ریزی آرمانی در حوزه صنعت

آذر غیاثی

دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی

azarghyasi@atu.ac.ir

چکیده: یکی از رویکردهای مورد استفاده در حل مسائل چند هدفه، برنامه ریزی آرمانی فازی است. با توجه به آنکه برنامه ریزی آرمانی یاری رسان خوبی برای تصمیم گیری در مدلسازی مسائل تصمیم گیری دنیای واقعی است. هدف از برنامه ریزی آرمانی، گسترش برنامه ریزی خطی به مسائلی است که شامل اهداف چندگانه است. به جهت این خواسته، لازم است سطح آرمان برای اهداف مشخص و میزان انحراف از سطح آرمان کاهش یابد. در صورت برخورد با مسائلی با اهداف نامساوی، وزن و یا اولویت هدف از طریق متغیرهای انحراف آن منعکس خواهد شد. اغلب، در مسائل جهان واقعی سطح آرمان و / یا عوامل اولویت تصمیم گیرنده، و گاهی حتی وزن اختصاص داده به اهداف، در طبیعت مبهم اند. در چنین شرایطی استفاده از نظریه مجموعه فازی بکار می آید. چرا که اغلب در مسائل تصمیم گیری، داده های موجود دقیق نیستند بلکه در عوض مقداری ابهام دارند. لذا، نظریه مجموعه های فازی (FS) به طور موفقیت آمیزی برای پرداختن به چنین مسائلی استفاده شده است. یک نکته مهم هنگام استفاده از FS ها، در نظر گرفتن پایایی یا عدم پایایی آن ها برای مسئله است.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی چند هدفه فازی، ریسک زنجیره، شفافیت زنجیره –

طبقه بندی موضوعی: c61-c02.

۱. **مقدمه** یکی از رویکردهای مورد استفاده در حل مسائل چند هدفه، برنامه ریزی آرمانی است. این تکنیک نخستین بار توسط چارنس و کوپر در سال (۱۹۵۷) معرفی شد. از ویژگی های این ابزار دستیابی همزمان به چندین تابع هدف بر مبنای اولویت های تعیین شده برای آن هاست. در برنامه ریزی آرمانی یک مدل چند هدفه به یک مدل تک هدفه تبدیل می شود. هرکدام از توابع هدف یک مقدار را به عنوان آرمان مد نظر قرار داده و مدل می کوشد که به آن ها دست یابد و یا انحرافات نامطلوب از مجموعه آرمان های تعیین شده کمینه گردد. تاکنون محققان زیادی از مدل برنامه ریزی آرمانی در حوزه های مختلف استفاده کرده اند. در تاریخچه ی زنجیره تأمین، زیدیسن (۲۰۰۲) ارزیابی ریسک تأمین را بررسی کرده است، ساندروزمانفردو (۲۰۰۲) احتمالات

ریسک نامطلوب بر اجناس (کالاها) را با استفاده از رویکرد ارزش در معرض ریسک پیشنهاد کرده اند [۹].. طبق نظر اینسلو (۲۰۰۶)، در حدود ۷۹ درصد از شرکت های بزرگی که مورد مطالعه قرار گرفته اند، فقدان وضوح و شفافیت زنجیره ی تأمین را به عنوان نگرانی اصلی خود عنوان کرده اند [۵]. علاوه بر این، ۹۰ درصد از زنجیره های تأمین پاسخگو، به این موضوع تأکید دارند که تکنولوژی زنجیره تأمین موجود آنها، در تأمین اطلاعات بجا و مناسب جهت فراهم نمودن طرح های جریان نقدی و بودجه ی مربوط به بخش امور مالی ناکارآمدند. دن، هاردگریو و شارد (۲۰۰۷) [۴] و ژو (۲۰۰۹) به این موضوع اشاره دارند که از طریق تکنولوژی RFID و با حذف موانع زنجیره تأمین از طریق فراهم نمودن و تقسیم اطلاعات و در نهایت بهبود عملکرد زنجیره تأمین، وضوح و شفافیت زنجیره ی تأمین می تواند افزایش یابد [۶]. به علاوه، اویانگ (۲۰۰۷) نشان داد که بکارگیری وضوح و شفافیت زنجیره ی تأمین می تواند ثبات زنجیره تأمین را افزایش دهد. ژانگ، (۲۰۱۰) نیز نشان دادند که اپراتورهای لجستیکی از وضوح و شفافیت زنجیره تأمین بهره می گیرند [۱۰]. از این رو، درک بهتر موضوعات مشترک مربوط به ریسک و شفافیت (بخصوص در زمینه ی اهداف چندگانه) مورد نیاز است. قدسی یور و ابرین یک سیستم پشتیبانی تصمیم (DSS) را به منظور کاهش تعداد تأمین کنندگان ارائه کردند [۱]. آنها از فرایند سلسله مراتبی (AHP) و برنامه ریزی عدد صحیح مختلط در سیستم پشتیبانی تصمیم شان استفاده کردند. قدسی یور و ابرین در مقاله دیگری، یک مدل برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح مختلط را برای حل مساله انتخاب تأمین کننده در حالت منبع یابی چند گانه ارائه کردند که کل هزینه لجستیک را در نظر می گیرد. چن و همکاران یک روش تصمیم گیری فازی را برای مساله انتخاب تأمین کننده در سیستم زنجیره ی تأمین ارائه کردند [۳]. آنها بیان داشتند که در طی سالهای اخیر تعیین تأمین کنندگان مناسب در زنجیره ی تأمین به عنوان مساله قابل توجه استراتژیک تبدیل شده است.

۱-۱ برنامه ریزی آرمانی:

تفاوت اصلی میان برنامه ریزی آرمانی و برنامه ریزی آرمانی فازی در این است که برنامه ریزی آرمانی نیاز به تصمیم گیرنده دارد تا مجموعه مقدار آرمان برای هر هدف که او قصد رسیدن به آن را دارد را معین نماید در حالی که در برنامه ریزی آرمانی فازی این ارزش ها در شیوه ای مبهم مشخص شده است. در این جا به بررسی یک مدل خاص افزودنی (وزن دار و اولویت دار) در برنامه ریزی آرمانی اشاره می کنیم که علاوه بر یک عملگر جمع به منظور تجمیع اهداف فازی نیز بکار می رود..

۱-۲ مدل:

الگوی برنامه ریزی عدد صحیح چند هدفه ارایه شده شامل سه هدف ماکزیم کردن شفافیت زنجیره تأمین، می نبم کردن ریسک و هزینه ی آن می شود.

$$\text{Max visibility} = \sum_i \sum_j V_{ij} Y_{ij}$$

$$\text{Min risk} = \sum_i \sum_j R_{ij} Y_{ij}$$

$$\text{Min cost} = \sum_i \sum_j V_{ij} C V_{ij} Y_{ij} + \sum_i \sum_j R_{ij} C R_{ij} Y_{ij} + \sum_i \sum_j I R_{ij} Y_{ij} + \sum_i \sum_j P_{ij} Q_{ij}$$

Subject to:

$$\sum_j V_{ij} C V_{ij} Y_{ij} \leq B_i \quad \forall i$$

$$\sum_j V_{ij} Y_{ij} \geq V_i \quad \forall i$$

$$\sum_j Q_{ij} = D_i \quad \forall i$$

$$\sum_i Q_{ij} \leq C_j Y_{ij} \quad \forall j$$

$$\sum_j R_{ij} Y_{ij} \leq R_i \quad \forall i$$

$$Q_{ij} \geq m_{ij} Y_{ij} \quad \forall i, j$$

$$Q_{ij} \leq N Y_{ij} \quad \forall i, j$$

$$Q_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j$$

(۱,۱)

از آنجائیکه اطلاعات در رابطه با انتخاب فروشنده به طور ذاتی، فازی است، مدل اصلی به یک مدل FMOP تبدیل می

شود. که برای حل مدل FMOP اصلاح شده، الگوریتم را طراحی میکنیم که به صورت زیر شرح داده می شود:

۱) الگویی بر مبنای اطلاعات در دسترس در مورد SCV و SCR می سازیم. محدودیت های ظرفیت و تقاضا برای قطعات و تأمین کنندگان متفاوت را پایه ریزی می کنیم.

۲) مساله را برای هر تابع هدف به عنوان مساله ای با یک تابع هدف حل می کنیم. برای هر تابع هدف جواب کران بالایی و پایینی را با استفاده از رویکرد ماکسی - مین زیمرمن می یابیم. چون SCV و SCR به صورت اعداد فازی مثلثی (l, m, u) مدلسازی می شوند.

سپس محدودیت های فازی را با استفاده از میانگین وزن دهی شده که از تابع احتمالی بتا استفاده می کند از حالت فازی خارج می کنیم. مدل FMOP را باز نویسی می کنیم و آنرا تحت عنوان یک مدل تک هدفه قطعی حل می کنیم. یک مدل تک هدفه قطعی وزن دهی شده که شامل k هدف می شود [1] برای حل مدل FMOP استفاده می شود. در این مدل λ_k سطح دستیابی به هدف k را مشخص می کند.

$$\text{Max} \sum_{k=1}^K w_k \lambda_k$$

Subject to:

$$\lambda_k \leq \mu_k(Z_k(x)) \quad k=1,2,\dots,K$$

$$\sum_j \left[\left(\frac{1}{6} \right) V_{ij}^p C V_{ij} Y_{ij} + \left(\frac{4}{6} \right) V_{ij}^m C V_{ij} Y_{ij} + \left(\frac{1}{6} \right) V_{ij}^o C V_{ij} Y_{ij} \right] \leq B_i \quad \forall i$$

$$\sum_j \left[\left(\frac{1}{6} \right) V_{ij}^p Y_{ij} + \left(\frac{4}{6} \right) V_{ij}^m Y_{ij} + \left(\frac{1}{6} \right) V_{ij}^o Y_{ij} \right] \geq V_i \quad \forall i$$

$$\sum_j \left[\left(\frac{1}{6} \right) R_{ij}^p Y_{ij} + \left(\frac{4}{6} \right) R_{ij}^m Y_{ij} + \left(\frac{1}{6} \right) R_{ij}^o Y_{ij} \right] \leq R_i \quad \forall i$$

$$\lambda_k \in [0,1] \quad k=1,2,\dots,K$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \lambda_k = 1$$

$$Y_{ij} \in [0,1] \quad \forall i,j \quad (2,2)$$

نتایج نشان می دهد که درجه دستیابی به هدف کاهش هزینه بیشتر از دو هدف دیگر است. این نتیجه برای اکثر شرکت ها مطلوب است. علاوه بر این درجه دستیابی به کاهش ریسک نسبتا بیشتر از درجه دستیابی به افزایش شفافیت است زیرا اکثر تصمیم گیرندگان ریسک گریزند و از اینرو به کاهش ریسک اولویت بیشتری می دهند.

قطعه ۳ حداقل ریسک مجاز را دارد زیرا محصول مرتبط با آن به قیمت بالاتری فروخته می شود. بنابراین تأمین کننده ی ۱ برای تأمین قطعه ی ۲ انتخاب می شود. برای تأمین کننده ی ۳ که قیمت پایین تری دارد اگرچه که ریسک بالاتری دارد و تاثیر ریسک آن نیز بیشتر است از اینرو برای تأمین قطعه ی ۲ انتخاب می شود

تأمین کننده ی ۲ قیمت متوسطی پیشنهاد می دهد و از طرفی سطح متوسطی از SCV و SCR را فراهم می آورد و برای تأمین دو قطعه مناسب است. بنابراین تعیین استراژی مناسب ریسک زنجیره ی تأمین و تلاش برای شفافیت زنجیره ی تأمین جزء فواید تأمین کننده ی ۲ است.

۳- نتیجه گیری:

این مقاله با استفاده از یک مدل FMOP تلاش کرده است تا تأثیرات دو جانبه ی SCV و SCR را بر عملکرد زنجیره ی تأمین مدلسازی کند. مثال عددی ما نشان داد که شرکت ها ابتدا تمایل دارند تا SCR را کاهش دهند سپس SCV را افزایش دهند. همچنین تأمین کنندگانی (مانند تأمین کننده ی ۲) که موازنه ای بین SCV و SCR ایجاد می کنند می توانند سهم بیشتری از قطعات مورد نیاز شرکت خریدار را تأمین کنند.

منابع:

1. Amid, A & „Ghodsypour, S. Fuzzy multiobjective linear model *International Journal of Production* , ۴۰۷-۳۹۴.
۲. Barlett, P & „Julien, D. Improving supply chain performance through improved visibility . *International Journal of Logistics Management*. ۳۱۳-۲۹۴ ,
۳. Chen, C., Lin, C & „Huang, S .(۲۰۰۶) .A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management *International Journal of Production Economics*. ۱۰۲ ,
۴. Delen, D., Hardgrave, B & „Sharda, R .(۲۰۰۷) .RFID for better supply-chain management through enhanced information visibility *Production and Operations Management*. ۶۲۴-۶۱۳ , (۵) ۱۶ ,
۵. Enslow, B .(۲۰۰۶) .Global supply chain benchmark report: Industry priorities for visibility, B2B, collaboration, trade, compliance, and risk management.
۶. Goh, M., De Souza, R., Zhang, A., Wei, H & „Tan, P .(۲۰۰۹) .Supply Chain visibility: a decision making perspective *In Proc. of the 4th IEEE conference on industrial electronics and applications*. (۲۵۵۱-۲۵۴۶) ,
۷. Harland, C., Brenchley, R & „Walker, H .(۲۰۰۳) .Risk in supply networks *Journal of Purchasing and Supply Management*. (62-51)
۸. Kumar, M., Vrat, P & „shankar, R .(۲۰۰۴) .A fuzzy goal programming approach for vendor selection problem in a supply chain .*Computers & industrial Engineering*. ۴۶ ,
۹. Sanders, D & „Manfredo, M .(۲۰۰۲) .The role of value-at-risk in purchasing: An application to the foodservice industry *Journal of Supply Chain Management*. ۴۵-۳۸ , (۲) ۳۸ ,
۱۰. Zhang, C .(۲۰۱۰) .Methodological review of supply chain risk management research *15th international symposium on logistics*. (۲۴۹-۲۴۱) ,

حل معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کاپوتوی تعمیم یافته به روش آشفتگی هموتویی

احمد بارانی^{۱*}، مریم عرب عامری^۲

^۱ دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی ahmad.b.2495@gmail.com

^۲ دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه ریاضی arabameri@math.usb.ac.ir

چکیده: معادله‌ی بلک-شولز کسری از معادلات مهم و مفید در زمینه مالی می‌باشد. در این مقاله به ارائه روشی برای محاسبه‌ی جواب تحلیلی معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کسری کاپوتوی تعمیم یافته پرداخته می‌شود. روش مورد نظر روش آشفتگی هموتویی با تبدیل لاپلاس می‌باشد.

کلمات کلیدی: معادله‌ی بلک-شولز، مشتق کسری کاپوتوی تعمیم یافته، روش آشفتگی هموتویی
طبقه بندی موضوعی: 35R11, 26A33.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۷۳، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مerton فرمول قیمت گذاری اختیارات را گسترش دادند و مقاله‌ای با عنوان « قیمت گذاری اختیارات و بدهی‌های سهام » در مجله مربوط به سیاست اقتصادی منتشر کردند [۱]. در همان سال، بلک و شولز مساله قیمت گذاری اختیارات را در قالب یک معادله دیفرانسیل جزئی با ضرایب متغیر مدل کردند. ایده اصلی بلک و شولز در رابطه با ساختار اوراق بهادار بدون ریسک با به کارگیری شرایط مرزی، قیمت اختیار و سهام بود. مدل بلک-شولز نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. پس از کشف حرکت بروانی کسری، معادله بلک شولز کلاسیک به معادله بلک-شولز کسری توسعه یافت که در آن مشتق موجود در معادله از نوع کسری می‌باشد. روش‌های زیادی برای حل معادله بلک-شولز کسری وجود دارد، از جمله این روش‌ها عبارتند از: حل عددی معادله بلک-شولز کسری برای قیمت گذاری اختیارات آمریکایی [۴]، حل عددی معادله بلک-شولز کسری به روش تفاضلات متناهی [۷] و حل عددی معادله بلک-شولز کسری به روش تقریب پد چند متغیره [۸]. در این مقاله به معرفی روش آشفتگی هموتویی برای حل معادله مورد نظر پرداخته می‌شود [۲].

۲ تعاریف و مقدمات

* سخنران

در این بخش به معرفی معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کسری کاپوتوی تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. به همین منظور ابتدا به تعریف مشتق کسری کاپوتو (معمولی و تعمیم‌یافته) و سپس به معرفی معادله‌ی بلک-شولز کسری پرداخته می‌شود.

تعریف ۱. (مشتق کسری کاپوتو): $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید مشتق کسری کاپوتوی تابع f از مرتبه α ، به صورت زیر تعریف می‌شود: [۳]

$${}_a^C D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds, \quad m-1 < \alpha < m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t > a$$

$\Gamma(x)$ نشانگر تابع گاما می‌باشد.

تعریف ۲. (مشتق کسری کاپوتوی تعمیم‌یافته): $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید مشتق کسری کاپوتوی تعمیم‌یافته تابع f از مرتبه α و $\rho > 0$ به صورت،

$$({}_a D_t^{\alpha, \rho} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{\rho} \right)^{-\alpha} f'(s) ds$$

و $0 < \alpha < 1$ ، $t > a$ نشانگر تابع گاما می‌باشد. [۳]

تعریف ۳. (تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو): تبدیل ρ -لاپلاس مشتق کسری کاپوتوی مرتبه α به شکل زیر می‌باشد: [۳]

$$L_\rho \{({}_a D_t^{\alpha, \rho} f)(t)\} = s^\alpha L_\rho \{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (\gamma^n f)(0)$$

لازم به ذکر است که ρ -لاپلاس تابع f به صورت $L_\rho \{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-s \frac{t^\rho}{\rho}} f(t) \frac{dt}{t^{1-\rho}}$ می‌باشد.

۲-۱ معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کسری کاپوتوی تعمیم‌یافته

معادله‌ی بلک-شولز مرتبه‌ی کسری که مشتق کسری در معادله از نوع کاپوتو می‌باشد به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$V(S, T) = \max(S - K, 0), \quad {}_t D_c^\alpha V + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

یک متغیر تصادفی و گاهی ثابت است، r ، نرخ بهره بدون ریسک سالانه و σ انحراف معیار برگشتی سهام است. T

، تاریخ انقضا را مشخص می‌کند، همچنین $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ ، بیانگر تعادل بین نرخ بهره آزاد و نوسانات سهام است.

ملاحظه می‌شود $V(0, t) = 0$ و مادامی که $S \rightarrow \infty$ ، $V(S, T) \approx S$. حال با اعمال تبدیلات $V = Ku(x, t)$ ،

$$S = x \quad \text{و} \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial u}{\partial x} - ku \quad u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$$

بدست آمده، مشتق کسری کاپوتو را با مشتق کسری تعمیم‌یافته جایگزین کنیم معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کاپوتو تعمیم‌یافته به شکل زیر بدست می‌آید:

$${}^\tau D^{\alpha, \rho} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial u}{\partial x} - ku \quad u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad (1)$$

۳ روش آشفستگی هموتوپی با تبدیل ρ -لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل کسری

در این بخش روش آشفستگی هموتوپی اصلاح شده برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به شکل زیر بیان می‌شود:

$$D_c^{\alpha, \rho} u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t) \quad u(x, 0) = f(x)$$

هموتوپی به شکل زیر ساخته می‌شود [۶ و ۵]:

$$D_c^{\alpha, \rho} u(x, t) + p\{Lu(x, t) + Nu(x, t) - g(x, t)\} = 0 \quad p \in [0, 1] \quad (2)$$

پارامتر p را پارامتر هموتوپی گویند. L عملگر خطی و N نشانگر عملگر غیرخطی می‌باشد. تابع g ، منبع گفته می‌شود.

با روش آشفستگی کلاسیک، از پارامتر هموتوپی p برای گسترش جواب به شکل زیر استفاده می‌شود:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + pu_1(x, t) + p^2u_2(x, t) + p^3u_3(x, t) + \dots \quad (3)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) توابع $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ از معادلات دیفرانسیل کسری زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} p^0 : D_c^{\alpha, \rho} u_0(x, t) &= 0; \quad p^1 : D_c^{\alpha, \rho} u_1(x, t) = -Lu_0 - h_1(u_0(x, t)) + g(x, t); \\ p^2 : D_c^{\alpha, \rho} u_2(x, t) &= -Lu_1 - h_2(u_0(x, t), u_1(x, t)); \\ p^3 : D_c^{\alpha, \rho} u_3(x, t) &= -Lu_2 - h_3(u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t)); \dots \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن توابع $h_1, h_2, h_3, \dots$ در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} h(u_0(x, t) + pu_1(x, t) + p^2u_2(x, t) + p^3u_3(x, t) + \dots) &= h_1(u_0(x, t)) + ph_2(u_0(x, t), u_1(x, t)) \\ &+ p^2h_3(u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t)) + \dots \end{aligned}$$

توابع $u_0, u_1, \dots$ با اعمال تبدیل ρ -لاپلاس در هر مرحله از رابطه (۴) تعیین می‌شود و شرایط اولیه برای رابطه

$$(4) \quad u_0(x, 0) = u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_3(x, 0) = \dots = 0$$

۴ روش آشفستگی هموتوپی با تبدیل ρ -لاپلاس برای حل معادله‌ی بلک-شولز کسری

معادله بلک-شولز (۱) با شرط اولیه‌ی $u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$ را در نظر بگیرید. هدف این بخش استفاده از روش هوموتوبی اصلاح شده توضیح داده شده در بخش ۳، برای حل معادله بلک-شولز است.

برای p^0 معادله دیفرانسیل کسری به صورت $D_c^{\alpha, \rho} u_0(x, t) = 0$ ، با شرط $u_0(x, 0) = u(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$ را حل می‌کنیم. با اعمال تبدیل ρ -لاپلاس بر طرفین معادله فوق داریم:

$$s^\alpha u_0(x, s) - s^{\alpha-1} u_0(x, 0) = 0 \Rightarrow u_0(x, s) = \frac{\max(e^x - 1, 0)}{s} \quad (5)$$

با بکار بردن معکوس تبدیل ρ -لاپلاس بر طرفین رابطه‌ی (۵)، جواب تحلیلی، به صورت $u_0(x, 0) = \max(e^x - 1, 0)$ بدست می‌آید. برای p^1 معادله دیفرانسیل کسری به شکل زیر با شرط $u_1(x, 0) = 0$ بدست می‌آید:

$$D^{\alpha, \rho} u_1 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (k-1) \frac{\partial u_0}{\partial x} - k u_0 = \max(e^x, 0) + (k-1) \max(e^x, 0) - k \max(e^x - 1, 0) \quad (6)$$

$$D^{\alpha, \rho} u_1 = k \max(e^x, 0) - k \max(e^x - 1, 0)$$

با اعمال تبدیل ρ -لاپلاس بر طرفین رابطه (۶) داریم:

$$s^\alpha u_1(x, s) - s^{\alpha-1} u_1(x, 0) = \frac{k \max(e^x, 0)}{s} - \frac{k \max(e^x - 1, 0)}{s} \quad (7)$$

$$\Rightarrow u_1(x, s) = \frac{k \max(e^x, 0)}{s^{1+\alpha}} - \frac{k \max(e^x - 1, 0)}{s^{1+\alpha}}$$

با بکار بردن معکوس تبدیل ρ -لاپلاس بر طرفین رابطه‌ی (۷)، جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل کسری (۶) به

$$u_1(x, t) = \left[\frac{k \max(e^x, 0)}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{k \max(e^x - 1, 0)}{\Gamma(1+\alpha)} \right] \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \quad \text{صورت}$$

p^2, p^3, p^4 و... جواب معادله بلک-شولز کسری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + p u_1(x, t) + p^2 u_2(x, t) + p^3 u_3(x, t) + \dots$$

هنگامی که p به ۱ همگرا شود، جواب تحلیلی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \max(e^x - 1, 0) \left\{ 1 - \frac{k}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha - \frac{k^2}{\Gamma(1+2\alpha)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} + \dots \right\} \\
 &+ \max(e^x, 0) \left\{ 1 - 1 - \frac{k}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha - \frac{k^2}{\Gamma(1+2\alpha)} \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^{2\alpha} + \dots \right\} \\
 &= \max(e^x - 1, 0) E_\alpha \left(-k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \max(e^x, 0) \left\{ 1 - E_\alpha \left(-k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right\}
 \end{aligned}$$

سرانجام جواب تحلیلی صریح معادله بلک-شولز کسری با مشتق کسری کاپوتوی تعمیم یافته، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, t) = \max(e^x - 1, 0) E_\alpha \left(-k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) + \max(e^x, 0) \left\{ 1 - E_\alpha \left(-k \left(\frac{t^\rho}{\rho} \right)^\alpha \right) \right\}$$

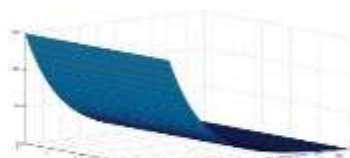
با توجه به معادله بلک-شولز کسری که در رابطه (۱) تعریف شده است اگر قرار دهیم $r = 0.01$ و $\sigma = 0.03$ ، تعادل بین نرخ بهره آزاد و نوسانات سهام از رابطه $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ بدست می‌آید. مقادیر اختیار معامله به ازای $\alpha = \rho = 1$ در شکل ۱ نشان داده شده است. شکل ۲ مقادیر اختیار معامله به ازای $\alpha = 1$ و $\rho = 0.65$ را نشان می‌دهد. مقادیر اختیار معامله به ازای مقادیر $\alpha = \rho = 0.65$ نیز در شکل ۳ نشان داده شده است. تفاوت‌های بین شکل‌های ۱-۳ را می‌توانید در شکل ۴ و ۵ مشاهده کنید.



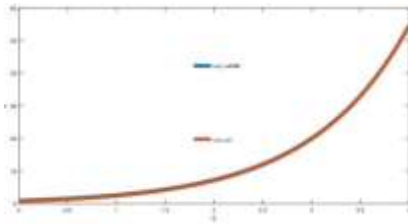
شکل ۱: مقادیر اختیار معامله به ازای $\alpha = \rho = 1$



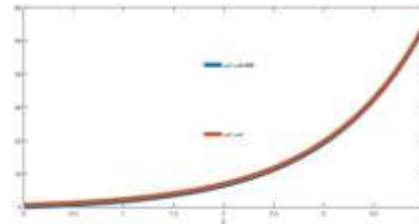
شکل ۲: مقادیر اختیار معامله به ازای $\alpha = 1$ و $\rho = 0.65$



شکل ۳: مقادیر اختیار معامله به ازای $\alpha = \rho = 0.65$



شکل ۴: مقادیر اختیار معامله $t = 0.5, \alpha = 1$ و $\rho < 1$



شکل ۵: مقادیر اختیار معامله $t = 0.5, \alpha = 1$ و $\rho > 1$

۵ نتیجه گیری

در این مقاله به ارائه روشی برای محاسبه‌ی جواب تحلیلی معادله‌ی بلک-شولز کسری با مشتق کسری کاپوتوی تعمیم یافته پرداخته شد که با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت، هنگامی که $\rho < 1$ دارای شتاب منفی در روند انتشار می باشد، بنابراین هزینه اختیار معامله اروپا کاهش می یابد و هنگامی که $\rho > 1$ دارای شتاب مثبت در فرآیند انتشار می باشد، بنابراین هزینه اختیار معامله اروپا افزایش می یابد.

مرجع‌ها

1. F. Black, M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities", J. Polit. Economy, 81, 637-654, 1973
2. A.N. Fall and S.N. Ndiaye and N. Sene, "Black-Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative", Chaos Solitons & Fractals, 125, 108-118, 2019.
3. J. Fahd, T. Abdeljawad, "A modified Laplace transform for certain generalized fractional operators", Res Nonlinear Anal, 2, 88-98, 2018
4. A.E. Hajaji and K. Hilal, "Numerical method for pricing governing american options under fractional Black-Scholes model", Mathematical Theory and Modeling, 52, 112-126, 2015
5. S. J. Liao, "On the homotopy analysis method for nonlinear problems", Appl. Math. Comput. , 147, 499-513, 2004
6. N. Sene and A.N. Fall, "Homotopy perturbation ρ -laplace transform method and its application to the fractional diffusion equation and the fractional diffusion-reaction equation", Fract. Frac. , 3:14, 2019.
7. L. Song and W. Wang , "Solution of the fractional Black-Scholes option pricing model by finite difference method", Abstract and Applied Analysis, 1-10, 2013
8. N. Özdemir and M. Yavuz, "Numerical solution of fractional Black-Scholes equation by using the multivariate padé approximation", Acta Phys. Polo. A., 127, 1050-53, 2017

مدلسازی تأخیر در گزارش‌دهی خسارت در ذخیره خسارت بیمه‌های غیرزندگی

فاطمه عطاطلب^{۱*}، دکتر امیرتیمور پاینده نجف‌آبادی^۲

^۱ دانشجوی دکتری بیمسنجی دانشگاه شهید بهشتی - f_atalab@sbu.ac.ir

^۲ استاد گروه بیمسنجی دانشگاه شهید بهشتی - Amirtpayandeh@sbu.ac.ir

چکیده: هنگامی که خسارتی رخ می‌دهد، بلافاصله توسط بیمه‌شده به بیمه‌گر اعلام نمی‌شود. فاصله‌ای که بین وقوع خسارت و اعلام آن به شرکت بیمه ایجاد می‌شود منجر به تحمیل هزینه‌هایی به شرکت بیمه می‌شود. مسأله‌ای که پیش روی این پژوهش است پیش‌بینی تعداد خسارت‌هایی است که قبلاً در سال‌های گذشته اتفاق افتاده‌اند ولی هنوز به شرکت بیمه گزارش نشده‌اند. این یک مسأله مهم برای استراتژی مدیریت ریسک بیمه‌گر است زیرا شرکت بیمه باید بتواند از عهده تعهدات خود نسبت به خسارت‌ها برآید. تأکید این مقاله بر مدلسازی زمان بین خسارت‌های رخ داده و خسارت‌های گزارش شده به شرکت بیمه است که از آن به عنوان تأخیر در گزارش‌دهی یاد می‌کنیم. در این مقاله از مدل خرد برای ناهمگنی در تأخیر گزارش‌دهی بر اساس ماه تقویمی استفاده می‌کنیم. نتایج حاصله حاکی از آن است که استفاده از مدل‌های خرد منجر به پیش‌بینی دقیق‌تر تعداد خسارت‌ها می‌شود و پیش‌بینی تعداد خسارت‌ها را برای هر تاریخی در آینده میسر می‌سازد.

کلمات کلیدی: ذخیره خسارت، تأخیر گزارش‌دهی، بیمه‌های غیرزندگی.

طبقه بندی موضوعی: G22

۱ مقدمه

هنگامی که خسارتی رخ می‌دهد، بلافاصله توسط بیمه‌شده به بیمه‌گر اعلام نمی‌شود. همچنین پس از اعلام خسارت به بیمه‌گر، به دلیل ارزیابی خسارت، فرایند قضایی و غیره خسارت بلافاصله تسویه نمی‌شود. بنابراین، با دو نوع تأخیر در فرایند خسارت مواجه خواهیم شد: تأخیر در گزارش‌دهی و تأخیر در تسویه خسارت. دلیل ارزیابی و شکل‌گیری ذخیره در واقع اختلاف بین زمان وقوع خسارت، زمان گزارش آن به شرکت بیمه و زمان پرداخت آن است. بر این مبنا، ذخایر به دو دسته تقسیم می‌شوند: خسارت‌های واقع شده ولی اعلام نشده و خسارت‌های اعلام شده ولی تسویه نشده. از زمانی که بیمه‌شده خسارت را به شرکت بیمه اعلام کند بیمه‌گر از تعهدی که بر عهده دارد مطلع

* سخنران

شده و در صورتی که آن خسارت را تا پایان سال مالی تسویه نکند موظف است برای آن ذخیره در نظر بگیرد. در فرایند بیمه‌گری، بیمه‌گر در ازای پوشش ریسک حق بیمه دریافت می‌کند و موظف به سرمایه‌گذاری آن جهت پرداخت خسارت احتمالی است. هنگامی که بیمه‌شده بلافاصله خسارت را به شرکت بیمه اعلام نمی‌کند ممکن است هزینه‌های زیادی را به آن تحمیل کند. این مقاله بر مدلسازی تأخیر در گزارش‌دهی برای برآورد تعداد خسارت‌های واقع شده ولی گزارش نشده* متمرکز می‌شود.

ذخایر خسارت از عناصر بسیار مهم در ترازنامه شرکت‌های بیمه هستند. شرکت‌های بیمه باید برای ایفای تعهدات خسارت‌هایی که در دوره‌های گذشته اتفاق افتاده‌اند سرمایه کافی نگهدارند. کم‌برآورد کردن ذخایر سبب می‌شود که شرکت بیمه نتواند از عهده ایفای تعهدات خود برآید و بیش‌برآورد آن نیز سبب می‌شود که به صورت غیر لازم سرمایه اضافی نگه داشته شود. خطاهای برآورد شده کوچک می‌تواند سود شرکت را تبدیل به زیان کند و خطاهای بزرگ می‌تواند منجر به عدم توانگری بیمه‌گر شود لذا پیشگویی خسارات و ذخیره مناسب برای پرداخت چنین ادعاهایی نقش مهمی در توانایی مالی و استمرار کسب‌وکار شرکت‌های بیمه‌ای دارد. بنابراین پیشگویی درست ذخایر یکی از وظایف مهم بیم‌سنج‌ها محسوب می‌شود.

در اکثر مدل‌های تصادفی برای محاسبه ذخایر از داده‌های تجمعی استفاده می‌شود. استفاده از داده‌های تجمعی موجب می‌شود که بخشی از اطلاعات در اندازه‌گیری ذخایر نادیده گرفته شود. به علاوه، تعداد کمی از داده‌ها بعد از جمع شدن نسبت به داده‌های پرت حساس می‌شوند [۱۰] و ممکن است نتایج دارای خطاهای پیش‌بینی بزرگ باشد [۷] و بدین ترتیب برآورد و پیش‌بینی خسارت‌های معوق ضعیف باشد. این امر موجب شده که استفاده از روش‌های خرد مورد توجه محققان قرار گیرد. نمونه‌هایی از مقالاتی که در چارچوب مدل خرد ارائه شده است عبارتند از [۲]، [۸] و [۹]. در این مقالات مدل کردن توسعه خسارت‌های انفرادی در زمان پیوسته با استفاده از فرآیند پواسون نشان‌دار می‌باشد. [۱] مدل سلسله مراتبی تصادفی را برای هر بخش از توسعه خسارت یعنی زمان وقوع خسارت، تأخیر در گزارش‌دهی، شدت خسارت و تصفیه نهایی خسارت ارائه کردند. مدل آنها با استفاده از سابقه خسارت‌ها واسنجی شده و از شبیه‌سازی فرآیند توسعه ادعاهای خسارت استفاده کردند. اساس کار آنها استفاده از همه اطلاعات مهم و اثرگذار بر مبلغ خسارت در بازه زمانی بین وقوع خسارت تا زمان تصفیه نهایی خسارت بود. [۴] و [۵] بر روی مدل‌سازی خسارت‌های وارده به صورت هفتگی با استفاده از فرآیند کاکس تحقیق کردند. این مدل‌ها اجازه می‌دهند تا بیش‌پراکندگی و وابستگی سریالی در نظر گرفته شود. [۶] استراتژی تغییر زمان را برای مدل کردن تأخیر گزارش در ذخیره‌گیری خسارت پیشنهاد کردند. آنها فرآیند وقوع خسارت را به صورت ناپارامتری مدل‌بندی کردند. به اعتقاد آنها این امر اجازه می‌دهد که مدل، نوسانات در تعداد خسارت‌ها به دلیل شرایط آب‌وهوایی و فصلی را نیز در نظر بگیرد بدون آنکه به وضوح این پیشامدها را مدل‌بندی کنند. [۳] ذخیره خسارت را به دو بخش خسارت‌های واقع شده و گزارش نشده و واقع شده و پرداخت نشده تفکیک کردند و با

* Incurred But Not Reported (IBNR)

استفاده از برآورد احتمالات تاخیر بر اساس مدل آمیخته گاما آماسیده در صفر ذخیره خسارت را محاسبه نمودند. نتایج این تحقیق نشان داد که ورد جزئیات اطلاعات خسارت در مدل باعث افزایش دقت پیش‌بینی می‌شود.

۱-۱ مدل

فرض کنید U نشان‌دهنده متغیر تصادفی تاخیر در گزارش‌دهی خسارت باشد که از توزیع گاما آمیخته آماسیده در صفر* پیروی می‌کند و دارای تابع چگالی زیر است:

$$g(u, \psi) = \pi I_{\{0\}}(u) + (1 - \pi) \sum_{h=1}^k W_h \text{Gamma}(\alpha_h, \theta_h) I_{[0, \infty)}(u)$$

که در آن $0 \leq \pi \leq 1$ نشان‌دهنده نسبت صفرهاست، $\sum_{h=1}^k W_h = 1$ وزن هریک از توزیع‌های گاما، $\psi = (\pi, W_1, \dots, W_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \theta_1, \dots, \theta_k)$ بردار پارامترها و $\text{Gamma}(\alpha_h, \theta_h)$ نشان‌دهنده تابع چگالی گاما است.

در این مقاله تاخیر در گزارش‌دهی خسارت در سطح ماهانه در نظر گرفته شده است، بنابراین تاخیر در گزارش‌دهی خسارت‌هایی که طی یک ماه از زمان وقوع آن گزارش شوند صفر در نظر گرفته خواهد شد. با توجه به مشاهده حجم بالای صفر در داده‌ها (شکل ۱) توزیع آماسیده به داده‌ها برازش خواهد شد. مفروضات مدل پیش‌بینی به شرح زیر است:

(۱) کل تعداد خسارت‌هایی که در زمان i اتفاق افتاده اند با N_i نشان داده می‌شود و از توزیع پواسون ناهمگن با شدت λ_i پیروی می‌کند.

(۲) متغیر تصادفی تاخیر در گزارش‌دهی، U ، دارای توزیع ZIGM است که در بالا تعریف شد. همانطور که می‌دانیم خسارت‌های معوق، خسارت‌هایی هستند که در زمان حادثه i اتفاق افتاده‌اند و با j واحد زمانی تاخیر به شرکت بیمه گزارش شده‌اند اما بنا به دلایلی l واحد زمانی بعد از j تسویه شده‌اند. فرض کنید $N_{i,j}^{\text{paid}}$ برای $i, j = 0, \dots, I$ نشان‌دهنده تعداد خسارت‌هایی است که در زمان i اتفاق افتاده و در زمان $i+j$ یا قبل از آن به طور کامل پرداخت شده است. بنابراین

$$N_{i,j}^{\text{paid}} = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l,l}^{\text{paid}} \quad (1)$$

که در آن $N_{i,j-l,l}^{\text{paid}}$ تعداد کل خسارت‌هایی است که در زمان i اتفاق افتاده، در زمان $i+j-l$ گزارش شده و در زمان $i+j$ پرداخت شده است. بر اساس مفروضات مدل و با استفاده از ویژگی‌های فرایند پواسون نتیجه می‌شود که $N_{i,j}^{\text{paid}}$ از فرایند پواسون ناهمگن با شدت $\lambda_i p_j$ پیروی می‌کند. همچنین $N_{i,j-l,l}^{\text{paid}}$ دارای توزیع پواسون ناهمگن با شدت $\lambda_i p_j q_l$ است که $l = 0, \dots, d$. در فرمول فوق p_j بیانگر احتمال تاخیر در گزارش‌دهی خسارت است و

* Zero-Inflated Gamma Mixture (ZIGM)

$$p_j = \int_j^{j+1} dG_{ZIGM}(u, \psi) \quad (2)$$

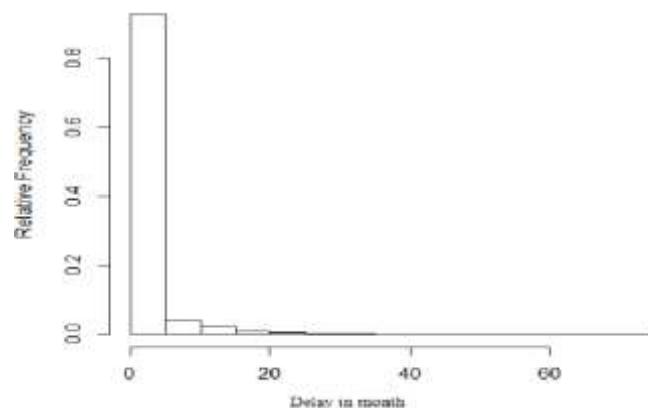
$G_{ZIGM}(\cdot)$ نشان‌دهنده تابع توزیع تجمعی گاما آمیخته آماسیده در صفر است. q_l بیانگر احتمال تاخیر در پرداخت خسارت است و با استفاده از روش درست‌نمایی ماکزیمم برآورد خواهد شد ($\sum_{l=0}^{l-1} q_l = 1$). جهت برآورد p_j و λ_i از روش ماکزیمم درست‌نمایی استفاده می‌کنیم. با استفاده از تابع لگاریتم درست‌نمایی برای داده‌های مشاهده شده تا زمان t داریم:

$$\log L = \sum_i \sum_j (n_{ij} \log(\lambda_i) + n_{ij} \log(p_j) - \lambda_i p_j - \log(n_{ij}!))$$

با استفاده از روش ماکزیمم درست‌نمایی $\hat{\lambda}_t = \frac{\sum_{j=1}^t n_{ij}}{\sum_{j=1}^t p_j}$ برآورد می‌شود. اکنون با جاگذاری برآوردگر فوق در تابع L لگاریتم درست‌نمایی می‌خواهیم احتمال تاخیر را برآورد نماییم. با توجه به این که تابع لگاریتم درست‌نمایی هم به پارامترهای مدل پواسون برای خسارتهایی که اتفاق افتاده اند و هم توزیع تاخیر بستگی دارد لذا برآورد p_j از طریق ماکزیمم درست‌نمایی دشوار خواهد بود. برای رفع این مشکل از الگوریتم EM برای برآورد احتمال تاخیر در گزارش دهی خسارت استفاده خواهیم کرد.

۲ نتایج اساسی

در این مقاله، داده‌های خسارت بیمه شخص ثالث اتومبیل (خسارت مالی) یک شرکت بیمه ایرانی مورد استفاده قرار گرفته است. تعداد خسارت‌های واقع شده و گزارش شده ۸۵۶۴۹ مورد در بازه زمانی ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۷ بوده است. پس از پالایش داده‌ها و کنار گذاشتن خسارت‌های بازیافتی و هزینه‌های ارزیابی خسارت و خسارت‌های برگشتی، تعداد خسارت‌ها به ۶۶۳۴۶ مورد کاهش یافت که جهت انجام پژوهش مورد بهره‌برداری قرار گرفت. بررسی داده‌ها نشان می‌دهد که تعداد قابل توجهی از خسارت‌ها تا یک ماه پس از وقوع خسارت به شرکت بیمه گزارش شده‌اند (شکل ۱). این مشاهده، استفاده از توزیع آماسیده در صفر را به ذهن متبادر می‌سازد.



شکل ۱. نمودار هیستوگرام فراوانی نسبی تاخیر در گزارش‌دهی خسارت‌های مالی برحسب ماه در بازه زمانی سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۷.

ما فرض می‌کنیم که تاخیر در گزارش‌دهی خسارت از توزیع ZIGM پیروی می‌کند. این فرض از طریق آزمون نیکویی برازش کولموگروف اسمیرنوف مورد تست قرار گرفت و p-value آن ۰/۱۶۹۵ به دست آمد که بیانگر تایید فرض در سطح اطمینان ۹۵ درصد است.

جدول ۱. برآورد پارامترها

$\hat{\alpha}_1 = 1.2412$	$\hat{\theta}_1 = 0.3850$
$\hat{\alpha}_2 = 1.4118$	$\hat{\theta}_2 = 5.5348$
$\hat{W}_1 = 0.2123$	$\hat{W}_2 = 0.7877$
$\hat{\pi} = 0.5608$	

نتایج حاصل از برآورد احتمالات تاخیر در گزارش‌دهی خسارت، احتمالات تاخیر در تسویه خسارت و $\hat{\lambda}_i$ به صورت ماتریس‌های 1×96 است که به دلیل محدودیت در تعداد صفحات مقاله، از آوردن این سه ماتریس خودداری شده است. با استفاده از پارامترهای برآورد شده، نتیجه پیشگویی تعداد خسارتهای واقع شده ولی گزارش نشده ۱۹۲ به دست آمد. با توجه به در اختیار داشتن تعداد واقعی خسارت‌ها و مقایسه نتیجه پیشگویی با تعداد واقعی مشاهده شد که تعداد پیشگویی شده به تعداد واقعی (۲۴۸) بسیار نزدیک است.

همانگونه که می‌دانیم یکی از روش‌های ساده و رایج در دنیا برای پیش‌بینی تعداد خسارت‌های واقع شده ولی پیش‌بینی نشده روش نردبان زنجیری است. روش نردبان زنجیری بر مبنای تعداد تجمعی خسارت‌ها می‌باشد بنابراین بخش زیادی از اطلاعات در پیش‌بینی ذخایر نادیده گرفته می‌شود و این امر موجب کم برآورد کردن ذخایر می‌شود. روش پیشنهادی در این مقاله جهت پیش‌بینی تعداد خسارت‌های واقع شده ولی گزارش نشده روشی جدید با استفاده از اطلاعات خرد می‌باشد. این روش در مقایسه با روش نردبان زنجیری دارای این مزیت است که کلیه متغیرهای مؤثر در فرایند تأخیر در گزارش‌دهی را در مدل وارد

می‌کند. مزیت دیگر آن این است که تعداد خسارت‌های مورد انتظار را برای هر تاریخی در آینده می‌توان پیش‌بینی نمود. مدل پیشنهادی در این مقاله را می‌توان با افزودن جزئیات اطلاعاتی بیشتر در مدل (مانند منطقه جغرافیایی، فصل وقوع خسارت و غیره) بهبود بخشید. ورود این ویژگی‌ها موجب افزایش دقت مدل می‌شود.

مرجع‌ها

1. K. Antonio, H.J. Plat, Micro-level stochastic loss reserving for general insurance, *Scandinavian Actuarial Journal*, 7(2014), 649-669.
2. E. Arjas, The claims reserving problem in non-life insurance: some structural ideas, *Astin Bulletin*, 19(1989), 139-152.
3. F. Atatalab, A.T. Payandeh Najafabadi, Prediction of Outstanding IBNR and RBNS Liabilities using Estimated Delay Probabilities by a Zero-Inflated Gamma Mixture Model, *North American Actuarial Journal*, (2020), Submitted.
4. B. Avanzi, B. Wong, X. Yang, A micro-level claim count model with over dispersion and reporting delays. *Insurance: Mathematics and Economics*, 71(2016), 1-14.
5. A.L. Badescu, X.S. Lin, D. Tang, A marked Cox model for the number of IBNR claims: Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 69(2016), 29-37.
6. J. Crevecoeur, K. Antonio, R. Verbelen, A time change strategy to model reporting delay dynamics in claims reserving, *arXiv: 1801.02935v1[q-fin.RM]*, (2018).
7. P.D. England, R. Verrall, Stochastic Claims Reserving in General Insurance, *British Actuarial Journal* 8-3(2002), 443-544.
8. R. Norberg, Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance, *Astin Bulletin*, 23(1993), 95-115.
9. R. Norberg, Prediction of outstanding liabilities II. Model variations and extensions, *Astin Bulletin*, 29(1999), 5-25.
10. T. Verdonck, M. Van Wouwe, J. Dhaene, A robustification of the chain-ladder method, *North American Actuary*, 13(2)(2009), 280-298.

روش تقریبی تفاضلات متناهی برای قیمت‌گذاری اختیار سبدي با دارایی‌های همبسته تصادفی

سید حامد اسدی^{۱*}، نجمه بازدار^۳

^۱ دانشگاه علامه طباطبائی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه h_asadi40@yahoo.com

^۳ دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده ادبیات و علوم انسانی najm.bazdar@gmail.com

چکیده: در بازارهای مالی، نوع خاصی از اختیارهای نامتعارف که به اختیارهای سبدي موسوم هستند از جذابیت‌های خاص و ویژگی‌های زیادی برخوردار می‌باشند. هزینه و سود (زیان) این نوع قراردادها برخلاف اختیارهای متعارف از جمله اختیارهای اروپایی و آمریکایی به چند دارایی پایه بستگی دارد. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های اختیار سبدي که باعث شده تا سرمایه‌گذاران از این نوع اختیارها استفاده کنند، قیمت کمتر آن نسبت به مجموع قیمت اختیارها روی تک دارایی‌های سبدي است. این ویژگی بخاطر وجود همبستگی دارایی‌های سبدي پایه می‌باشد. در اکثر پژوهش‌های ریاضی مالی مربوط به اختیار معامله با دارایی چندگانه، ضریب همبستگی دارایی‌ها ثابت فرض شده است در حالیکه محققان بر اساس داده‌های بازار نشان داده‌اند که همبستگی، فرآیندی تصادفی است. به همین منظور در این مقاله، فرآیند تصادفی بازگشت به میانگین را برای توصیف ضریب همبستگی میان دو دارایی در نظر گرفته و مدل قیمت‌گذاری اختیار سبدي با دارایی‌های همبسته تصادفی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جواب مدل ریاضی حاصل را با روش تفاضلات متناهی محاسبه و با مدل همبستگی ثابت متناظرش مقایسه کرده‌ایم. نتایج عددی برای اختیار سبدي با دو دارایی ارائه شده است که اهمیت و ضرورت همبستگی تصادفی در قیمت‌گذاری اختیار سبدي را توجیه می‌کند.

کلمات کلیدی: بازگشت به میانگین، روش تفاضلات متناهی، اختیار سبدي، همبستگی تصادفی.

طبقه‌بندی موضوعی: 65M70, 35K15

۱- مقدمه

اختیارها سهم مهمی در بازارهای مالی، از لحاظ مدیریت ریسک و ایجاد اهرم مالی در اختیار دارند. به لحاظ اهمیت اختیارها، محققین ریاضی مالی به مطالعه و بررسی مدل‌هایی برای قیمت‌گذاری اختیارها پرداخته‌اند. یکی از مدل‌های مشهور در بازارهای مالی برای قیمت‌گذاری اختیارها، مدل بلک-شولز است [1]. شاید بتوان گفت، عمومی‌ترین و متداول‌ترین نوع از اختیارهای نامتعارف، اختیارهای سبدي هستند. اختیار سبدي، اختیار معامله‌ای است که دارایی پایه آن سبدي شامل چند دارایی می‌باشد و جذابیت‌های خاصی برای سرمایه‌گذاران دارد و محاسبه کردن قیمتی

منصفانه برای آن‌ها و تجزیه و تحلیل رفتاری این نوع اختیارها برای پژوهش‌گران و سرمایه‌گذاران از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مدل بلک-شولز بر چندین فرضیه تکیه دارد که منجر به مشکلاتی در زمان قیمت‌گذاری اختیار سبدي می‌شود و بدست آوردن جواب تحلیلی را پیچیده می‌کند، در واقع این فرضیات به مدل قیمت‌گذاری اختیار سبدي قابل تعمیم نیست. در مدل بلک-شولز فرض شده که دارایی پایه دارای فرآیند قیمتی لگ-نرمال می‌باشد، اما این فرض در مورد اختیار معاملات سبدي صدق نمی‌کند به این ترتیب که مجموع فرآیندهای لگ-نرمال لزوماً فرآیندی لگ-نرمال نیست [7]. به منظور حل این مشکل، چندین روش تقریبی در ادبیات موضوع وجود دارد که اساس آن‌ها ایجاد توابع گشتاور تقریبی متناظر با گشتاورهای توزیع سبدي است. تقریب لگ-نرمال لوی [6]، تقریب گاما میلفسکی و پونسر [8] و تقریب بسط تیلور جو [5] از جمله این روش‌ها هستند.

گرچه پژوهش‌های متعددی در مورد مشتقه‌های چند بعدی صورت گرفته است اما در اکثر مدل‌های مربوط به این مشتقه‌ها، با وجود تصادفی در نظر گرفتن تلاطم، به طور معمول همبستگی دارایی‌ها ثابت فرض شده است. بوراسچی، پورجیا و تروپانی [2] و درینسن، ماینهوت و ویلکف [3] با استفاده از تجزیه و تحلیل داده‌های بازار نشان دادند که همبستگی ضمنی و تاریخی اختلاف معناداری با همبستگی مشاهده شده از داده‌های بازار دارند، به عبارتی برآورد همبستگی ثابت به صورت ضمنی و تاریخی صرف ریسک همبستگی غیر صفر را نشان می‌دهند. با توجه به مطالب گفته شده، در این مقاله به بررسی و تحلیل مدل قیمت‌گذاری اختیارات سبدي با در نظر گرفتن همبستگی تصادفی میان دارایی‌های سبدي پایه می‌پردازیم. در این مدل فرض می‌کنیم که ضریب همبستگی از فرآیند تصادفی بازگشت به میانگین پیروی می‌کند و با توجه به این فرض صرف ریسک همبستگی را از بین خواهیم برد. سپس با روش سبدي ریسک خنثی و خودتأمین قیمت اختیار فروش سبدي را به فرم جوابی از یک مساله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان می‌کنیم. روش تفاضلات متناهی را برای محاسبه جواب تقریبی معادله حاصل به کار می‌گیریم و با استفاده از یک مثال عددی به مقایسه مدل همبستگی تصادفی و ثابت خواهیم پرداخت.

۲- قیمت‌گذاری اختیار سبدي با دارایی‌های همبسته تصادفی

بازاری شامل دو دارایی تصادفی و یک دارایی بدون ریسک با نرخ بهره‌ی بدون ریسک r را در نظر بگیرید فرض کنید $S_1(t)$ و $S_2(t)$ قیمت دارایی‌های تصادفی در زمان t ، باشند که از دینامیک تصادفی زیر پیروی می‌کنند:

$$\frac{dS_i}{S_i} = rdt + \sigma_i dW_i, \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

که در آن W_i فرآیند وینر نسبت به اندازه احتمال ریسک خنثی است. فرض کنید که به ازای $i = 1, 2$ ، پارامتر σ_i ثابت، $E[dW_i] = 0$ و $E[(dW_i)^2] = dt$ هستند. در این جا فرض بر این است که فرآیندهای وینر مربوط به دارایی اول و دوم همبستگی تصادفی دارند که ضریب همبستگی میان این دو فرآیند را با ρ نشان می‌دهیم و این ضریب همبستگی از فرآیند تصادفی بازگشت به میانگین زیر پیروی می‌کند:

$$d\rho = (\bar{\rho} - g\rho)dt + \sigma_3 \sqrt{(h - \rho)(\rho - f)} dW_3 \quad (2.3)$$

که در آن، $(\bar{\rho} - g\rho)$ و σ_3 به ترتیب رانش و تلاطم مربوط به ضریب همبستگی هستند، از طرفی $-1 \leq f < 1$ و $\bar{\rho} < h \leq 1$ که پارامتری‌هایی ثابت هستند. علاوه بر این فرض می‌کنیم همبستگی غیر صفر بین فرآیندهای وینر در دینامیک قیمت دارایی‌ها و ضریب همبستگی، به صورت زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} E[dW_1 dW_3] = \rho_1 dt \\ E[dW_2 dW_3] = \rho_2 dt \end{cases} \quad (3.3)$$

که در آن، ρ_1 و ρ_2 بیان‌گر ضریب همبستگی و ثابت هستند. با توجه به مدل فوق قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۱،۲ فرض کنید در بازار مالی مورد نظر فرض‌های فوق برقرار باشد. در این صورت قیمت اختیار فروش سبدي روی دو دارایی پایه تصادفی با فرآیندهای قیمتی با همبستگی تصادفی که از دینامیک (2.3) پیروی می‌کند، از حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی

$$I_b + rS_1 \frac{\partial v_b}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial v_b}{\partial S_2} + (\bar{\rho} - g\rho) \frac{\partial v_b}{\partial \rho} - rv_b = 0 \quad (4.3)$$

به همراه تابع عایدی

$$v_b(T, S_1, S_2, \rho) = \left(K - \sum_{i=1}^2 w_i S_i(T) \right)^+ \quad (5.3)$$

روی دامنه‌ی $\{(t, S_1, S_2, \rho) | 0 < t < T, 0 < S_i < \infty, -1 \leq \rho \leq 1\}$ بدست می‌آید. که در آن، I_b به-فرم زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} I_b = & \frac{\partial v_b}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 S_i^2 \frac{\partial^2 v_b}{\partial S_i^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 v_b}{\partial S_1 \partial S_2} + \rho_1 \sigma_1 \sigma_3 S_1 \sqrt{(h - \rho)(\rho - f)} \frac{\partial^2 v_b}{\partial \rho \partial S_1} \\ & + \rho_2 \sigma_2 \sigma_3 S_2 \sqrt{(h - \rho)(\rho - f)} \frac{\partial^2 v_b}{\partial \rho \partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 (h - \rho)(\rho - f) \frac{\partial^2 v_b}{\partial \rho^2}, \end{aligned}$$

۳- جواب تقریبی مدل همبستگی تصادفی

قرار می‌دهیم $v_b(t, S_1, S_1, \rho) = u(t, S_1, S_1, \rho)$ که در آن، u و v_b به ترتیب قیمت دقیق و قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي با محدودسازی دامنه در نقطه (t, S_1, S_1, ρ) هستند. هدف این بخش محاسبه قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي یعنی $u(t, S_1, S_1, \rho)$ در زمان t قبل از سررسید می‌باشد. به همین منظور، با انجام مراحل محدودسازی دامنه، گسسته‌سازی و تغییر متغیر زمان تا سررسید، قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي از حل مسأله دیفرانسیل مشتقات جزئی

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 S_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_i^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + \rho_1 \sigma_1 \sigma_3 S_1 \sqrt{(h-\rho)(\rho-f)} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial S_1} \\ & + \rho_2 \sigma_2 \sigma_3 S_3 \sqrt{(h-\rho)(\rho-f)} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial S_2} + \frac{1}{2} \sigma_3^2 (h-\rho)(\rho-f) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + r S_1 \frac{\partial u}{\partial S_1} \\ & + r S_2 \frac{\partial u}{\partial S_2} + (\bar{\rho} - g\rho) \frac{\partial u}{d\rho} - ru \end{aligned}$$

بدست می‌آید که همراه با تابع عایدی اختیار فروش سبدي

$$u(0, S_1, S_2, \rho) = \left(K - \sum_{i=1}^2 w_i S_i \right)^+$$

یک مسأله مقدار اولیه با شرایط اولیه و مرزی زیر است:

- اگر $S_1 = 0$ یا $S_2 = 0$ آن‌گاه باید داشته باشیم $\rho = 0$. پس در این حالت قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي مضربي از قیمت یک اختیار فروش وانيلي است.
- اگر $S_1 = 0$ و $S_2 = 0$ آن‌گاه باید داشته باشیم $\rho = 0$. پس در این حالت قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي در سررسيد برابر با قیمت توافقي است.
- اگر $0 < S_1, S_2 < L_D$ و $\rho = f$ آن‌گاه $u(\tau, S_1, S_2, f)$ از مسأله ديفرانسیل مشتقات جزئي زیر بدست می‌آيد:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 S_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_i^2} + f \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + r \sum_{i=1}^2 S_i \frac{\partial u}{\partial S_i} - ru.$$

- اگر $0 < S_1, S_2 < L_D$ و $\rho = h$ آن‌گاه $u(\tau, S_1, S_2, h)$ از مسأله ديفرانسیل مشتقات جزئي زیر بدست می‌آيد:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_i^2 S_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_i^2} + h \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 u}{\partial S_1 \partial S_2} + r \sum_{i=1}^2 S_i \frac{\partial u}{\partial S_i} - ru.$$

- اگر $S_1 \rightarrow L_D$ یا $S_2 \rightarrow L_D$ و حتی زمانی که هر دو به سمت L_D میل می‌کنند، قیمت تقریبی اختیار سبدي فروش به سمت صفر میل می‌کند. در واقع $u \rightarrow 0$.

با گسسته‌سازی و جایگذاری ماتریس مشتق تفاضلات متناهی در مسأله اختیار فروش سبدي به دستگاه معادله ديفرانسیل معمولی تقلیل می‌یابد.

۴- نتایج عددی

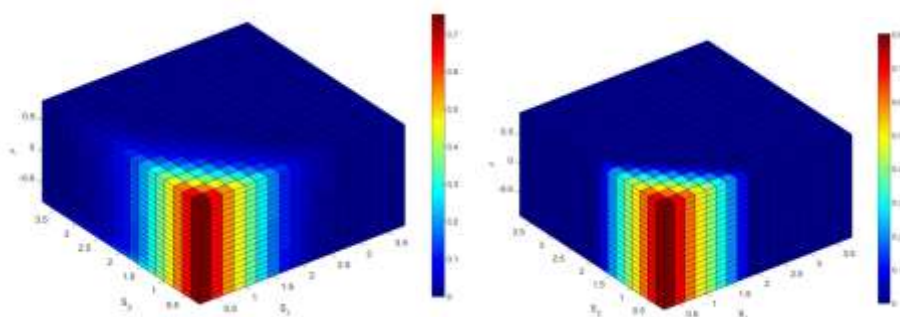
بازاری شامل دو دارایی تصادفی و یک دارایی بدون ریسک در نظر بگیرید. فرض کنید S_1 و S_2 قیمت دارایی‌های تصادفی باشد که از دینامیک‌های تصادفی (1.3) پیروی می‌کنند. پارامترهای ثابت به این صورت در نظر گرفته شده

است که $r = 0.05$ نرخ بهره بدون ریسک، $\sigma_1 = 0.25$ و $\sigma_2 = 0.35$ به ترتیب تلاطم دارایی‌ها و ρ ضریب همبستگی بین W_1 و W_2 است. با فرض این که ρ از دینامیک (2.3) پیروی می‌کند که در آن $\bar{\rho} = -0.01$ ، $g = 0.07$ ، $\sigma_3 = 0.2$ ، $h = -f = 0.9$ و $\rho_1 = -\rho_2 = 0.01$ ، که ضریب همبستگی بین فرآیندهای وینر W_1 ، W_2 و W_3 هستند.

اکنون قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي با پارامترهای فوق را محاسبه می‌کنیم که در آن، $K = 1$ قیمت توافقی و $w_1 = w_2 = 0.5$ وزن‌های دارایی‌ها در سبد پایه، $(S_1, S_2) \in [0.4] \times [0.4]$ و $T = 1$ سررسید، هستند. در این جا نقاط شبکه یکنواخت در نظر گرفته شده که تعداد نقاط گسسته سازی برای هر متغیر مکانی (ρ, S_2, S_1) $N = 20$ است. قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي برای مقادیر مختلف دارایی‌ها در جدول ۱ گزارش شده و به‌طور کلی قیمت و بازده اختیار فروش سبدي در شکل ۱ رسم شده‌اند. جدول ۱ نشان می‌دهد که با افزایش همبستگی در نقطه‌ی شروع، قیمت اختیار سبدي نیز افزایش می‌یابد.

جدول ۱: قیمت های اختیار فروش سبدي در زمان $t = 0$ ، به ازای $N = 20$.

$u(1-t, S_1, S_2, \rho)$	$N = 20$
$u(1, 0.8, 0.4, -0.4)$	$351.3633e - 003$
$u(1, 0.8, 0.4, 0)$	$352.1705e - 003$
$u(1, 0.8, 0.4, 0.5)$	$353.8312e - 003$
$u(1, 0.8, 0.8, -0.4)$	$164.7648e - 003$
$u(1, 0.8, 0.8, 0)$	$173.4142e - 003$
$u(1, 0.8, 0.8, 0.5)$	$184.0266e - 003$
$u(1, 0.8, 1, -0.4)$	$96.4698e - 003$
$u(1, 0.8, 1, 0)$	$109.1980e - 003$
$u(1, 0.8, 1, 0.5)$	$123.5185e - 003$
$u(1, 1, 1, -0.4)$	$44.0787e - 003$
$u(1, 1, 1, 0)$	$59.1662e - 003$
$u(1, 0.8, 1, 0.5)$	$75.5257e - 003$



شکل ۱: نمودار سمت راست و چپ به‌ترتیب نمودار بازده اختیار فروش سبدي و نمودار قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي هستند.

در جدول ۲، نتایج عددی مدل همبستگی تصادفی با پارامترهای مثال عددی مدل همبستگی تصادفی، که $N = 20$ و مدل همبستگی ثابت متناظر (پارامترهای مدل با پارامترهای مدل همبستگی تصادفی یکسان است) که $N = 80$ ، ارائه شده است. در مدل همبستگی تصادفی منظور از مقادیر ρ ، ضریب همبستگی در زمان $t = 0$ است و در زمان‌های دیگر تصادفی و از فرآیند (2.3) پیروی می‌کند اما در مدل همبستگی ثابت مقادیر ρ مربوط به ضریب همبستگی در تمام زمان‌هاست.

جدول ۲: مقایسه قیمت تقریبی اختیار فروش سبدي در مدل همبستگی ثابت و تصادفی

S_1	S_2	ρ	همبستگی ثابت	همبستگی تصادفی
0.8	0.4	0	$351.9385e - 003$	$352.1702e - 003$
0.8	0.4	0.5	$353.5476e - 003$	$353.8312e - 003$
0.8	0.8	0	$174.4105e - 003$	$173.4142e - 003$
0.8	0.8	0.5	$185.9356e - 003$	$184.0266e - 003$
0.8	1	0	$111.2857e - 003$	$109.1980e - 003$
0.8	1	0.5	$126.3740e - 003$	$123.5185e - 003$
1	1	0	$61.6851e - 003$	$59.1662e - 003$
1	1	0.5	$78.5750e - 003$	$75.5257e - 003$

مراجع

1. Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.
2. Buraschi, A., Porchia, P., & Trojani, F. (2006). Correlation Risk and Optimal Portfolio Choice, preprint, Imperial College/University of St.
3. Driessen, J., Maenhout, P. J., & Vilkov, G. (2013). Option-implied correlations and the price of correlation risk.
4. Du Toit, J., & Ehrlich, I. (2013). Local volatility FX basket option on CPU and GPU. *The Numerical Algorithms Group Ltd, Tech. Rep.*
5. Ju, N. (2002). Pricing Asian and basket options via Taylor expansion. *Journal of Computational Finance*, 5(3), 79-103.
6. Levy, E. (1992). Pricing European average rate currency options. *Journal of International Money and Finance*, 11(5), 474-491.
7. Lo, C. F. (2012). The sum and difference of two lognormal random variables. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
8. Milevsky, M. A., & Posner, S. E. (1998). A closed-form approximation for valuing basket options. *Journal of Derivatives*, 5, 54-61.

بررسی بسط مجانبی مسائل دوگان کنترل تصادفی با استفاده از حسابان ملیوان در ریاضی مالی

مهدیه طهماسبی^۱، سعیده علی بابایی^{۲*}

^۱ استاد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس (tahmasebi@modares.ac.ir).

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی مالی، دانشگاه تربیت مدرس (sababaei0018@gmail.com).

چکیده: حساب ملیوان مجموعه‌ای از ایده‌ها و روش‌های ریاضی است که باعث توسعه‌ای از شاخه‌ای از ریاضیات به نام حساب تغییرات از توابع غیرتصادفی به فرآیندهای تصادفی می‌باشد. در واقع حساب ملیوان ادبیات حسابان مشتق و انتگرال متغیرهای تصادفی در یک جهت مناسب می‌باشد، پس با استفاده از این روش در یک مسئله کنترل تصادفی می‌توانیم بسط مجانبی آن را محاسبه کنیم.

هدف ما در یک مسئله کنترلی یافتن تابع کنترلی است که ما را به دستیابی هدف مورد نظر (مینیمم کردن هزینه - ماکسیمم کردن سود) رهنمون سازد. برای بهینه کردن یک سبد نیاز به یک مدل ریاضی داریم که این مدل شامل یک تابع هدف و همراه با مجموعه‌ای از قیود می‌باشد که اجزای تشکیل دهنده یک مسئله کنترلی هستند. از حسابان ملیوان برای محاسبه‌ی مشتق تابع هدف در مسئله کنترلی نسبت به $\mathcal{E}$ به ازای $\mathcal{E} = 0$ استفاده می‌شود که در نهایت باعث ایجاد یک بسط مجانبی برای تابع ارزش می‌شود.

کلمات کلیدی: حساب ملیوان، کنترل تصادفی، قیمت‌گذاری بی‌تفاوت، بسط مجانبی.

طبقه بندی موضوعی: ۶۰H۰۷, ۹۳E۲۰, ۷۴H۱۰.

۱ مقدمه

مسئله کنترل بهینه تصادفی که ما آن را بررسی خواهیم کرد به صورت یک مسئله قیمت‌گذاری بی‌تفاوت می‌باشد. ایده استفاده از حساب ملیوان در قیمت‌گذاری بی‌تفاوت ابتدا توسط دیویس مطرح شد. او این روش را در یک مدل ساده ریسکی دو بعدی با پارامتر ثابت استفاده کرد و توانست بسط مجانبی مسئله کنترل بهینه تصادفی را محاسبه کند، اما مشکل روش این بود که در مدل‌های با بعد بالاتر کاربرد ندارد. ما در این مقاله تعمیمی از روش دیویس را بیان می‌کنیم.

۲ مسئله کنترلی

یک مسئله کنترلی شامل یک تابع هزینه است که این تابع هزینه خود تابعی از متغیر حالت $x(\cdot)$ و کنترل $u(\cdot)$ می‌باشد.

فرض کنید $O = [t_0, t_1] \times R^n$ و ψ تابع را به صورت زیر تعریف کنید:

* سعیده علی بابایی

$$\psi(t, x) = \begin{cases} g(t, x), (t, x) \in [t_0, t_1] \times R^n \\ \psi(x), (t, x) \in \{t_0\} \times R^n \end{cases}$$

در اینصورت تابع هزینه برابر است با $j(t, x; u) = \int_t^\tau L(s, x(s)) ds + \psi(\tau, x(\tau))$ ، که در آن τ زمان خروج از $\bar{O}$ و

L تابع هزینه جاری و ψ تابع هزینه پایانه می‌باشند. فرض کنید فضای احتمال فیلتر شده و حرکت براونی روی آن

تعریف شده است. متغیر تصادفی مربع انتگرال پذیر B به عنوان تابعی از مسیرهای براونی اغتشاش یافته $W + \varepsilon \int_0^\cdot \varphi_s ds$

که در آن ε پارامتر کوچک و φ فرآیند کنترلی مربع انتگرال پذیر باشد و شرط نوکیف برقرار باشد. مسئله کنترلی که ما در این مقاله به صورت ماکسیمم کردن تابع هدف زیر است:

$$G(\varphi) := E \left[B(W + \varepsilon \int_0^\cdot \varphi_s ds) - \frac{1}{2} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt \right], \quad (1,2)$$

و تابع ارزش آن برای کنترل بهینه φ^* به صورت زیر است:

$$P := G(\varphi^*) = \sup_{\varphi \in A} G(\varphi). \quad (2,2)$$

قضیه ۱,۲: مسئله کنترلی با تابع ارزش در رابطه (۲,۲) دارای مقدار مجانبی زیر است:

$$P = E[B(W)] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 E \left[\int_0^T \|\psi_t\|^2 dt \right] + O(\varepsilon^4),$$

فرض کنید مفروضات قضیه ۱,۲ برقرار باشد. کنترل بهینه φ^* برای مسئله با تابع ارزش به فرم رابطه (۱,۲) در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\varphi^* = \varepsilon E \left[\partial B \left(W + \varepsilon \int_0^\cdot \varphi_s^* ds; [t, T] \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], 0 \leq t \leq T,$$

۳ مسئله اولیه

مجموعه θ مجموعه همه‌ی استراتژی‌های قابل قبول به عنوان مجموعه‌ی فرآیندهای S -انتگرال پذیر تعریف می‌کنیم به طوری که انتگرال تصادفی $\theta.S$ برای هر $Q \in M_f$ یک Q -مارتینگال است. برای هر $t \in [0, T]$ متغیر تصادفی F_t -اندازه پذیر $\mathcal{X}_t$

که دارایی اولیه و θ_t نشان دهنده استراتژی قابل قبول شروع شده در لحظه t می‌باشد. مسئله اولیه ماکسیمم نمودن مقدار مورد انتظار مطلوبیت نهایی که از مبادله دارایی پایه S و درآمد مشتقه B می‌باشد در صورتی که مشتقه‌ای وجود نداشته باشد $B = 0$. فرآیند ماکسیمم نمودن مقدار مورد انتظار مطلوبیت نمایی به صورت زیر است:

$$u_t^B(x_t) := \operatorname{ess\,sup}_{\theta \in \Theta_t} E \left[-e^{-\alpha(x_t + \int_t^T \theta_u \cdot dS_u - B)} \middle| \mathcal{F}_t \right], 0 \leq t \leq T,$$

۴ آنتروپی شرطی

فرض کنید روی فضای احتمال فیلتر شده $(\Omega, \mathcal{F}, A = \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ قیمت تنزیل شده تعدادی سهم با نیم مارتینگل موضعی کراندار S مدل شده باشند. Q را اندازه مارتینگل موضعی معادل گوییم، اگر $Q \sim P$ و S تحت Q مارتینگل موضعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی این اندازه‌ها را با M نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم این مجموعه ناتهی باشد. فرض می‌کنیم اندازه‌های P و $Q \in M$ دو اندازه احتمال روی یک فضای احتمال مشابه باشند. در اینصورت فرآیند آنتروپی نسبی شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_t(Q|P) := E^Q[\log Z_{t,T}^Q | \mathcal{F}_t], 0 \leq t \leq T,$$

که تقریباً همه جا متناهی و نماد Z^Q فرآیند چگالی به ازای هر $Q \in M$ برابر است با $\frac{dQ}{dP}$.

M_f زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی اندازه‌های موضعا مارتینگل معادل در یک بازار مالی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_f := M_f(Q) := \{Q \in M | I(Q|P) < \infty\},$$

حال اندازه احتمال $Q^0 \in M_f$ را اندازه مارتینگلی مینمئیم کننده آنتروپی می‌نامیم هرگاه در رابطه زیر صدق کند:

$$I(Q^0|P) = \min_{Q \in M_f} I(Q|P).$$

۵ قیمت گذاری بی تفاوت

قیمت مطلوب بی تفاوت برای خرید (فروش) مشتقه در واقع شخص سرمایه گذار نسبت به این که مبلغ $P(\alpha)$ بپردازد و مشتقه را

داشته باشد و یا این که این مبلغ را نپردازد و مشتقه را نداشته باشد، بی تفاوت است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_t^B(x_t + P_t(\alpha)) = u_t^0(x_t), 0 \leq t \leq T,$$

استراتژی پوشش ریسک براساس مکانیسم قیمت گذاری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u_t^B(x_t + P_t(\alpha)) = u_t^0(x_t), 0 \leq t \leq T.$$

استراتژی پوشش ریسک براساس مکانیسم قیمت گذاری را به صورت $\theta(\alpha) := \theta^B - \theta^0$ تعریف می‌کنیم.

۶ مسئله دوگان

حال با استفاده از تبدیل لژاندر مسئله دوگان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I_t^B := \operatorname{ess\,inf}_{Q \in M_f} [I_t(Q|P) - \alpha E^Q[B | \mathcal{F}_t]]. \quad (1,6)$$

جواب بهینه (۱,۶) را با Q^B و در صورتی که مشتقه‌ای وجود نداشته باشد با Q^0 نشان می‌دهیم.

لم ۱,۶: فرآیند قیمت گذاری بی تفاوت با استفاده از نمایش دوگان مسئله کنترل تصادفی به صورت زیر می باشد:

$$P_t(\alpha) = \text{ess sup}_{Q \in M_f} \left[E^Q[B | F_t] - \frac{1}{\alpha} I_t(Q | Q^0) \right], 0 \leq t \leq T.$$

حال خانواده ای از اندازه ها با پارامتر کوچک ε به صورت $\{Q(\varepsilon)\}_{\varepsilon \in R}$ تعریف می کنیم به طوری که $Q \equiv Q(\varepsilon)$ و $Q^0 \equiv Q(0)$ باشد. همچنین برای فرآیندی مانند Q ، $q - q^0 =: -\varepsilon \varphi$ را تعریف می کنیم.

حال فرض می کنیم در یک بازار ناکامل d سهم از دارایی قابل مبادله S و $m - d$ سهم دارایی غیر مبادله Y داشته باشیم. حال با تعریف فرآیند چگالی $Z_t^Q = E(-q.W)_t$ و $\mu_t^S - \sigma_t q_t = o_d$ و قضیه گیرسائف $-Q(\varepsilon)$ - دینامیک Y و S را به صورت زیر داریم:

$$dS_t = \text{diag}_d(S_t) \sigma_t dW_t^{Q(\varepsilon)}, \quad (۲,۶)$$

$$dY_t = \text{diag}_{m-d}(Y_t) [(\mu_t^Y dt - \beta_t q_t^0) dt + \beta_t (dW_t^{Q(\varepsilon)} + \varepsilon \varphi_t dt)].$$

با استفاده از لم ۱,۶ قیمت بی تفاوت برای $\varepsilon^2 = \alpha$ دارای فرم کنترل تصادفی زیر است:

$$P_t(\alpha) = \text{ess sup}_{\varphi \in M_f} E^{Q(\varepsilon)} \left[B(W^{Q(\varepsilon)} + \varepsilon \int_t^T \varphi_u d_u) - \frac{1}{2} \int_t^T \|\varphi_u\|^2 d_u \middle| F_t \right], 0 \leq t \leq T.$$

یک مشتقه، B تابعی از مسیرهای S و Y را در نظر بگیرید. فرض کنید $Q(\varepsilon)$ - دینامیک Y و S را به صورت رابطه (۲,۶) باشند، $Q \equiv Q(\varepsilon)$ و $\varepsilon^2 = \alpha$. در این صورت برای پارامتر کوچک ریسک گریزی α قیمت بی تفاوت یک مشتقه دارای بسط مجانبی زیر است:

$$P_t(\alpha) = E^{Q^0}[B | F_t] + \frac{1}{2} \alpha E^{Q^0} \left[\int_t^T \|\xi_u^{(0)}\|^2 d_u \middle| F_t \right] + O(\alpha^2), 0 \leq t \leq T,$$

که در آن ξ فرآیند موجود در نمایش B به صورت زیر است:

$$B(W^{Q(0)}) = E^{Q(0)}[B(W^{Q(0)})] + (\theta^{(0)}.S)_T + (\xi^{(0)}.W^{Q(0)})_T.$$

مرجع ها

1. M. Monoyios, Malliavin calculus method for asymptotic expansion of dual control problems. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2013, pp. 884-915.
2. M.H., Davis, Option pricing in incomplete markets, Mathematics of derivative securities, 15, 1997, pp. 216-226.
3. F., Delbaen, W., Schachermayer, A general version of the fundamental theorem of asset pricing, Mathematische annalen, 1994, pp. 463-520.
4. W.H., Fleming, H.M., Soner, 2006, Controlled Markov processes and viscosity solutions, Vol. 25, Springer Science Business Media.
5. Y., Miyahara, 2011, Option pricing in incomplete markets: Modeling based on geometric Lévy processes and minimal entropy martingale measures, Vol. 3, World Scientific.

مقایسه روش هموارسازی لاپلاسیین گسسته و روش تحلیل مولفه اصلی در کاهش ابعاد ویژگی‌های مالی شرکت‌ها جهت ارزیابی ریسک مالی

حسین تیموری فعال^۱، میثم باقری^{۲*}

^۱ استادیار گروه رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، hossein.teimoori@atu.ac.ir

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر، دانشگاه علامه طباطبائی، m_bagheri98@atu.ac.ir

چکیده: داده‌های مالی معمولاً از ابعاد بالایی برخوردار هستند. کاهش بعد این داده‌ها برای استفاده در روش‌های طبقه‌بندی شرکت‌ها و بویژه ارزیابی ریسک مالی و احتمال ورشکستگی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مطالعه به مقایسه تأثیر استفاده از روش پیشنهادی جانشانی گراف و هموارسازی لاپلاسیین گسسته با روش تحلیل مولفه اصلی جهت کاهش ابعاد داده‌های مالی پرداخته شده است. این مطالعه با استفاده از داده‌های مالی شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران و با استخراج نسبت‌های مالی آنها به عنوان ویژگی مالی انجام شده است. داده‌های کاهش بعد داده شده با استفاده از روش‌های فوق‌الذکر برای ارزیابی تأثیر در دقت تفکیک، به مدل ماشین بردار پشتیبان جهت تفکیک شرکت‌های سالم از ورشکسته داده شد. دقت بدست آمده از این دو روش صرف نظر از تعداد کم داده‌های ورودی و وجود نویز احتمالی حاکی از کارایی برابر روش پیشنهادی در قیاس با مدل تحلیل مولفه اصلی و تاحدودی برتری آن می‌باشد.

کلمات کلیدی: جانشانی گراف، هموارسازی لاپلاسیین گسسته، ریسک مالی و ورشکستگی
طبقه‌بندی موضوعی: ۶۲ P05، 05C50.

۱ مقدمه

امروزه روش‌های زیادی در رابطه با ارزیابی ریسک اعتباری از سوی اعتبار دهندگان به کار گرفته می‌شود. در حیطه روش‌های آماری یا مدل‌های پارامتریک عمدتاً روش تحلیل ممیزی خطی[□] (LDA)، رگرسیون لجستیک (LR)،

* سخنران

[†] Linear discriminant analysis

تحلیل ممیزی چند متغیره^{*} (MDA)، تحلیل ممیزی درجه دو[□] (QDA) و... به کار گرفته می‌شوند [۱]. منطق پشتوانه تمامی این مدل‌های عنوان شده، عبارت است از پیدا کردن ترکیب بهینه خطی متغیرهای ورودی جهت ساخت مدل، تحلیل و پیش بینی ریسک ورشکستگی شرکت‌ها. اغلب روش‌های هوشمند که در حوزه مدل‌های ناپارامتریک قرار دارند شامل شبکه‌های عصبی، نظریه مجموعه فازی[□] (FST)، درخت تصمیم[□] (DT)، ماشین بردار پشتیبان^{**} (SVM) و ... می‌شوند [۲]. در سال ۲۰۱۶ بردار [۳] از نسبت‌های مالی به عنوان متغیرهای مستقل در مدل منطقی خود استفاده کرد. وی به این نتیجه رسید که نسبت‌های مالی سودآوری و نقدینگی می‌توانند با دقت راضی کننده‌ای ورشکستگی یک شرکت را پیش بینی کنند.

نسبت‌های مالی کلیدی شامل اطلاعات مالی با اهمیت در رابطه با عملکرد عملیاتی، سودآوری، نقدینگی مالی، بازده و ریسک هر شرکت می‌باشند که می‌توانند جهت بررسی وضعیت مالی آن به کار برده شوند. با در نظر گرفتن هر یک از نسبت‌های مالی به عنوان مولفه یک بردار، توصیف یک شرکت با استفاده از بردار مربوطه به صورت زیر امکان پذیر می‌گردد:

$$X_i = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}.$$

روش‌های کاهش ابعاد عموماً به دو دسته استخراج ویژگی و انتخاب ویژگی تقسیم می‌شوند. در روش‌های استخراج ویژگی عموماً فضای داده‌ها در ابعاد بالا با استفاده از تبدیلات ریاضی به فضای داده با ابعاد پایین تر نگاشته می‌شود. هی و نیوجی در سال ۲۰۰۳ [۴] یک روش خطی کاهش بعد به نام تصویر خطی حافظ (LPP)^{□□} ابداع کردند که در آن یک گراف حاوی اطلاعات همسایگی رئوس آن ساخته شده و بر اساس لاپلاسیان این گراف، ماتریس نگاشت آن بر روی زیرفضاهای با ابعاد پایین تر محاسبه می‌گردد. این نگاشت خطی اطلاعات مربوط به همسایگی رئوس را در خود ذخیره می‌کند.

دنگ کای و همکارانش در سال ۲۰۰۸ [۵] برای تفکیک تصاویر چهره انسان‌ها در حالات مختلف از یک مدل هموارسازی لاپلاسیان گسسته جهت کاهش ابعاد تصاویر استفاده کردند. آنها ابتدا گراف مربوط به کلیه تصاویر را که در آن هر تصویر یکی از رئوس گراف موردنظر را تشکیل می‌داد در نظر گرفته و سپس براساس روش LPP ماتریس شباهت آن را محاسبه کردند. در ادامه نیز بر اساس ماتریس تقریب لاپلاسیان گسسته نیومن، اقدام به هموارسازی

* Multivariate discriminant analysis

† Quadratic discriminant analysis

‡ Fuzzy Set Theory

§ Decision Trees

** Support Vector Machines

†† linear preserving projection

لاپلاسن گراف مربوطه نموده و با حل مساله مقدار ویژه، بردار ویژه بهینه‌ای را که می‌تواند گراف تصاویر را بر روی یک خط نگاشت کند استخراج نمودند.

در این مقاله سعی شده است کارایی روش پیشنهادی استفاده از هموارسازی لاپلاسن گسسته در مقایسه با روش تحلیل مولفه اصلی جهت کاهش ابعاد بردار ویژگی‌های مالی شرکت‌ها مورد بررسی قرار گیرد. از این رو ابتدا یک گراف که رئوس آن را شرکت‌ها با بردار ویژگی مربوط به خود تشکیل می‌دهند ساخته شده و سپس سعی می‌شود با استفاده از هموارسازی لاپلاسن گسسته، گراف مورد نظر در یک فضای چند بعدی بر روی یک خط جانشانی گردد. به این رویکرد گسترش خطی جانشانی گراف* نیز گفته می‌شود. در ادامه، مدل سازی شرکت‌ها با نظریه گراف، و بعد جانشانی آن از طریق هموارسازی لاپلاسن گسسته بر روی یک خط مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت به پیاده سازی مدل مذکور در کنار روش تحلیل مولفه اصلی جهت تفکیک شرکت‌های ورشکسته از سالم پرداخته شده است.

۲ مدل سازی شرکت‌ها با نظریه گراف

فرض کنید n شرکت که هریک با m ویژگی نمایش داده می‌شوند را در اختیار داریم. بنابراین مجموعه‌ی بردارهای $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ نشان دهنده شرکت‌ها در فضای m - بعدی می‌باشند. از این رو ماتریس، $X_{m \times n}$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم که ستون‌های آن نماینده شرکت‌ها و سطرهاى آن نماینده ویژگی آنها می‌باشد. همچنین فرض کنید گراف G شامل n راس می‌باشد که هریک از رئوس آن را شرکت‌های عنوان شده در فضای m - بعدی تشکیل می‌دهند. برای ترسیم گراف فرضی ابتدا با استفاده از روش K -نزدیکترین همسایگی (KNN) و فاصله اقلیدسی رئوس از یکدیگر و با در نظر گرفتن $K=5$ ، ماتریس مجاورت نظیر G را بدست می‌آوریم. در ادامه، به محاسبه وزن یال‌های گراف مفروض می‌پردازیم. برای سادگی عملیات گراف مورد نظر را بدون جهت در نظر می‌گیریم. ماتریسی که دربردارنده وزن یال‌های گراف G می‌باشد را ماتریس شباهت[†] می‌نامند که با $W_{n \times n}$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه ماتریس شباهت ایده‌های متفاوتی وجود دارد. در این مطالعه از مدل LPP بهره برده شده است. براین اساس اگر $N_k(x_i)$ را مجموعه k نزدیکترین همسایگی x_i در نظر بگیریم، ماتریس شباهت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$W_{ij}^{LPP} = \begin{cases} e^{-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}}, & x_i \in N_k(x_j), x_j \in N_k(x_i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

* Linear extension of graph embedding

† Affinity graph weight matrix

در فرمول ۱ منظور از σ عرض هسته* است. برای حالات طبقه بندی با ناظر، می توان برچسب هر طبقه را در محاسبه وزن یال دخیل نمود. به این ترتیب که اگر دو داده متعلق به یک طبقه بودند، شروط همسایگی فوق بررسی می شود و اگر نبودند وزن یال بین آنها صفر در نظر گرفته می شود.

۳ جانشانی گراف با استفاده از هموارسازی لاپلاسین گسسته[‡]

هدف از جانشانی یک گراف، نمایش هر راس از گراف توسط بردارهای با ابعاد پایین تر است به طوری که شباهت های بین رئوس حفظ گردد. شباهت رئوس از طریق وزن یال های بین آنها اندازه گیری می شود. فرض کنید بردار $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ، بردار نگاشت گراف مورد نظر بر روی یک خط باشد. بردار $\mathbf{y}$ بهینه از طریق کمینه کردن مجموع وزن دار زیر بدست می آید:

$$\sum_{i,j} (y_i - y_j)^2 W_{ij}. \quad (2)$$

هدف از کمینه کردن این تابع این است که اگر دو راس i و j در فاصله کمی از یکدیگر قرار داشته باشند، نقطه متناظر آنها y_i و y_j در فاصله مناسبی از یکدیگر قرار گیرند. به راحتی از طریق عملیات جبری می توان نشان داد:

$$\sum_{i,j} (y_i - y_j)^2 W_{ij} = 2\mathbf{y}^T \mathbf{L} \mathbf{y} \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$ ماتریس لاپلاسین گرافی و $\mathbf{D}$ ماتریس قطری می باشد که برابر با جمع سطرها یا ستون های ماتریس $\mathbf{W}$ است. کمینه کردن فرمول مذکور معادل با بهینه سازی زیر است [۵]:

$$\mathbf{y}^* = \operatorname{argmax} (\mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y}) = \operatorname{argmax} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y}} \quad (4)$$

با در نظر گرفتن $y_i = f(x_i) = \mathbf{u}^T \mathbf{x}_i$ که در آن $\mathbf{u}$ بردار جانشانی $\mathbf{x}_i$ (کاهش ابعاد راس) می باشد، خواهیم داشت $\mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{u}$ و در نتیجه فرمول شماره (۴) را می توان به صورت زیر جهت یافتن بردار بهینه جانشانی تغییر داد:

$$\mathbf{u}^* = \operatorname{argmax} \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{D} \mathbf{y}} = \operatorname{argmax} \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{X} \mathbf{W} \mathbf{X}^T \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^T \mathbf{u}} \quad (5)$$

بردار بهینه $\mathbf{u}$ ، بردار ویژه مرتبط با بیشترین مقدار ویژه است که از طریق فرمول مقدار ویژه تعمیم یافته محاسبه می شود:

$$\mathbf{X} \mathbf{W} \mathbf{X}^T \mathbf{u} = \lambda \mathbf{X} \mathbf{D} \mathbf{X}^T \mathbf{u} \quad (6)$$

* kernel width

† Discretized Laplacian Smoothing

اگر f را یک تابع تعریف شده بر روی ویژگی‌های مالی یک شرکت در نظر بگیریم، عملگر لاپلاسیان $\mathcal{L}$ بر روی تابع مذکور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L} f(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\delta^2 f}{\delta x_j^2}. \quad (7)$$

جهت یافتن تقریب گسسته‌ای از عملگر لاپلاسیان تعریف شده در بالا، انتخاب‌های گوناگونی وجود دارد که ما در این مطالعه از تقریب لاپلاسیان گسسته نیومن با در نظر گرفتن عامل نرمال سازی برابر با ۲ استفاده کرده‌ایم. با استفاده از هموارسازی لاپلاسیان، فرمول شماره (۶) به صورت زیر تعدیل می‌گردد:

$$u^* = \operatorname{argmax} \frac{u^T X W X^T u}{(1-\alpha) u^T X D X^T u + \alpha \mathcal{J}(u)} \quad (8)$$

که در آن $\mathcal{J}$ تابع منظم سازی لاپلاسیان گسسته می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathcal{J}(u) = \|\Delta \cdot u\|^2 = u^T \Delta^T \Delta u \quad (9)$$

و α پارامتر کنترل کننده هموارسازی است که مقدار آن در بازه صفر و یک تعیین می‌گردد. با استفاده از فرمول ۸ و ۹، فرمول شماره ۶ به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$X W X^T u = \lambda ((1-\alpha) X D X^T + \alpha \Delta^T \Delta) u \quad (10)$$

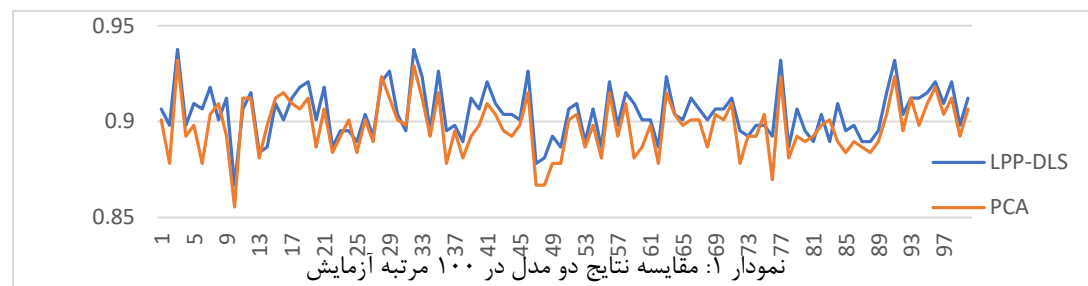
از بردار u بدست آمده برای جانشانی گراف شرکتها با رتوس m - بعدی بر روی یک خط استفاده می‌شود.

۴ پیاده سازی مدل آزمون و بررسی نتایج

روش کار برای پیاده سازی مدل‌ها بدین صورت است که در روش اول ابعاد بردار ویژگی هر شرکت که m - بعدی است را با استفاده از روش تحلیل مولفه اصلی به ۲ بعد کاهش می‌دهیم و در ادامه با استفاده از یک مدل تفکیک ساده مانند مدل ماشین بردار پشتیبان اقدام به تفکیک شرکت‌ها می‌کنیم. در روش دوم با ترسیم گراف فرضی شرکت‌ها با استفاده از الگوریتم KNN ابتدا اقدام به محاسبه ماتریس مجاورت نموده و در ادامه ماتریس شباهت آن را با استفاده از روش LPP محاسبه می‌کنیم. در این مرحله می‌توان از مقادیر مختلفی برای هسته بهره برد که ما در این مطالعه از مقدار ۰,۵ استفاده کرده‌ایم. سپس با استفاده از هموارسازی لاپلاسیان گسسته اقدام به کاهش ابعاد بردار کرده و در عمل گراف فرضی را بر روی یک خط جانشانی می‌کنیم. برای ضریب هموارسازی (α) نیز می‌توان از مقادیر مختلفی در بازه [۰ و ۱] بهره برد که در این تحقیق از عدد ۰,۹۵ استفاده شده است. در نهایت نیز مانند روش اول از مدل ماشین بردار پشتیبان جهت تفکیک شرکت‌ها بهره می‌بریم. پیاده سازی مدل‌ها با استفاده از زبان پایتون و کتابخانه‌های sklearn و scipy انجام شده است.

برای انجام این آزمون، از داده‌های شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران در میان سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۸ استفاده شده است. در میان این سال‌ها اگر شرکت مورد نظر از سلامت مالی برخوردار باشد فقط از داده آخرین سه سال مالی گزارش شده استفاده شده است، ولی اگر طی سال‌های دیگر دچار ورشکستگی شده باشد داده سال مالی مورد نظر نیز به عنوان یک مورد ورشکسته به مجموعه داده‌ها اضافه شده است. طبق ماده ۱۴۱ قانون تجارت ایران شرکتی ورشکسته تلقی می‌گردد که زیان انباشته آن معادل با ۵۰ درصد سرمایه ثبت شده شرکت باشد. از آنجایی که بر اساس این تعریف تعداد سال - شرکت‌های ورشکسته کمتر از ۱۰ درصد کل داده‌ها را تشکیل می‌دهد، در این مطالعه هر شرکتی که زیان انباشته آن معادل ۳۰ درصد سرمایه شرکت باشد را ورشکسته در نظر گرفتیم. بر این اساس، ۵۹۷ شرکت انتخاب شد که از آنها معادل ۱۷۶۲ سال - شرکت داده مالی استخراج گردید. از این تعداد سال - شرکت ۳۳۳ مورد ورشکسته و ۱۴۲۹ مورد به عنوان شرکت سالم طبقه‌بندی شدند. برای بررسی وضعیت مالی هر سال - شرکت در این مطالعه از ۱۸ نسبت مالی بدین ترتیب استفاده گردید. ۱- حاشیه سود خالص ۲- حاشیه سود عملیاتی ۳- بازده دارایی‌ها ۴- بازدهی سرمایه ۵- نسبت جاری ۶- نسبت آنی ۷- نسبت نقدینگی ۸- نسبت دارایی‌های جاری ۹- دوره گردش موجودی کالا ۱۰- دوره وصول مطالبات ۱۱- گردش دارایی‌های ثابت ۱۲- گردش مجموع دارایی‌ها ۱۳- سبت بدهی ۱۴- نسبت بدهی به ارزش ویژه ۱۵- نسبت دارایی ثابت به ارزش ویژه ۱۶- نسبت بدهی بلند مدت به ارزش ویژه ۱۷- نسبت بدهی جاری به ارزش ویژه ۱۸- نسبت مالکانه

برای آموزش مدل SVM از ۸۰ درصد داده‌های کاهش بعد داده شده از دو روش عنوان شده به عنوان مجموعه داده آموزش و از مابقی به عنوان مجموعه داده آزمون استفاده شده است. برای افزایش قابلیت اتکای نتایج بدست آمده انتخاب مجموعه آموزش و آزمون به طور تصادفی انجام پذیرفته و این آزمایش به تعداد ۱۰۰ مرتبه تکرار شده است. در هر مرتبه از این آزمایشات، یک مجموعه تصادفی جدید به عنوان مجموعه آموزش و مجموعه آزمون انتخاب شده است. در نمودار زیر میزان دقت تفکیک هر یک از این دو مدل در ۱۰۰ مرتبه تکرار آموزش و آزمون به تصویر



کشیده شده است.

همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود نتایج حاصل از استفاده از روش LPP-DLS جهت کاهش ابعاد در بیش از ۷۵ درصد موارد از روش PCA به طور میانگین ۱ درصد بیشتر بوده و در بهترین حالت نزدیک به ۲,۸ درصد بیشتر بوده است.

۵ جمع بندی

در این مطالعه به مقایسه تاثیر استفاده از روش پیشنهادی جانشانی گراف و هموارسازی لاپلاسین گسسته که در واقع یک روش خوشه بندی طیفی می‌باشد با روش تحلیل مولفه اصلی جهت کاهش ابعاد ویژگی‌های مالی به منظور تکفیک شرکت‌های سالم از ورشکسته پرداخته شده است. برای توصیف وضعیت مالی شرکت‌ها، از نسبت‌های مالی به عنوان ویژگی مالی هر شرکت استفاده گردید. خروجی حاصل از پیاده سازی روش‌ها جهت ارزیابی تاثیر در دقت تکفیک، به مدل ماشین بردار پشتیبان داده شد. دقت بدست آمده از دو روش حاکی از کارایی برابر روش پیشنهادی در قیاس با مدل تحلیل مولفه اصلی و تاحدودی برتری آن می‌باشد. در مدل پیشنهادی انتخاب مناسب دو پارامتر هسته و ضریب هموارسازی می‌تواند تاثیر بسزایی در دقت مدل داشته باشد. نکته حائز اهمیت دیگری که می‌تواند تاثیر زیادی در نتایج مدل داشته باشد وجود داده‌های مناسب، پالایش شده و به تعداد زیاد است. در این زمینه می‌توان گفت با عنایت به تعداد کم شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران در قیاس با سایر بورس‌های بین المللی، آزمون مدل‌های عنوان شده بر روی تعداد بیشتری از شرکت‌ها و با ویژگی‌های مالی پالایش شده و به تعداد بیشتر، می‌تواند به افزایش دقت روش‌ها کمک مطلوبی نماید.

مرجع‌ها

1. B. Ribeiro, N. Chen, A. Chen, Financial credit risk assessment: a recent review, *Artificial Intelligence Review*, 45 (2016), 1-23.
2. Bernardete Ribeiro, Ning Chen, Alexander Kovacec, Shaping Graph Pattern Mining for Financial Risk, *Neurocomputing*, 326–327 (2019) 123-131.
3. Loredana Cultrera Xavier Brédart. Bankruptcy prediction: the case of Belgian SMEs. *Review of Accounting & Finance*, 15(2016), 101–119.
4. Xiaofei He, Partha Niyogi, Locality Preserving Projections (LPP), *Proceedings of the 16th International Conference on Neural Information Processing Systems* (2003) 153–160
5. Deng Cai, Xiaofei He, Yuxiao Hu, Jiawei Han, Thomas Huang, Learning a Spatially Smooth Subspace for Face Recognition, *IEEE*, (June 2007) 17-22.

شناسایی شوک‌های پولی و مالی در ادوار تجاری ایران (رویکرد بیزین و علامتی)

فاطمه فرجی f.faraji86@pnu.ac.ir

دانشگاه پیام نور

چکیده: اقتصاد ایران به عنوان یک اقتصاد نفتی - دولتی که در سه دهه اخیر غالباً با معضلاتی چون تورم و کسری بودجه دست به گریبان بوده است، چرخه‌های تجاری بزرگ و کوچکی را پشت سر نهاده است. بدیهی است شناخت عوامل کلیدی ایجادکننده این چرخه‌های تجاری می‌تواند برنامه ریزان و سیاست‌گذاران اقتصادی کشور را در ارائه تصمیمات صحیح‌تر و کارا تر یاری رساند. بنابراین شناسایی نقش شوک‌های مختلف در وقوع ادوار تجاری یکی از زمینه‌های جذاب کارهای تجربی در حوزه اقتصاد کلان محسوب می‌گردد. بعد از بحران مالی اخیر (۲۰۱۸-۲۰۱۹) توجه به بخش مالی در توضیح نوسانات اقتصاد کلان بیشتر شده است. در این مطالعه، به دنبال شناسایی نقش شوک‌های بخش مالی (شوک عرضه اعتبارات، شوک قیمت مسکن و شوک بازار سهام) به همراه شوک‌های بخش حقیقی و پولی (شوک‌های عرضه کل، تقاضای کل، سیاست پولی و سرمایه‌گذاری) در ادوار تجاری اقتصاد ایران هستیم. به منظور شناسایی ساختاری شوک‌های مختلف از مدل خودرگرسیون برداری با محدودیت علامتی استفاده شده است.

واژگان کلیدی: مدل خودرگرسیون برداری با محدودیت علامتی، تخمین بیزین، چرخه‌های تجاری، ادوار تجاری
JEL:K12,K13,K14

۱. مقدمه

اگرچه چرخه‌های تجاری از لحاظ سال وقوع، شدت و دوام با یکدیگر متفاوت می‌باشند، اما ویژگی مشترکی در تمامی آنان وجود دارد. این جنبه مشترک همان فرآیند تغییرات متغیرهای اقتصادی در ارتباط با یکدیگر است که باعث شده تعریف تقریباً مشابهی از چرخه‌های تجاری در ادبیات اقتصادی به وجود آید. اقتصاد ایران نیز به عنوان یک اقتصاد نفتی - دولتی که در سه دهه اخیر غالباً با معضلاتی چون تورم و کسری بودجه دست به گریبان بوده است، چرخه‌های تجاری بزرگ و کوچکی را پشت سر نهاده است. بدیهی است شناخت عوامل کلیدی ایجادکننده این چرخه‌های تجاری می‌تواند برنامه ریزان و سیاست‌گذاران اقتصادی کشور را در ارائه تصمیمات صحیح‌تر و کارا تر یاری رساند و از حجم نوسانات اقتصادی بکاهد.

۲. پیشینه پژوهش

در اینجا، ابتدا به صورت اجمالی پیشینه روش تحقیق مورد استفاده در این مطالعه بررسی می‌شود و سپس به مرور مطالعاتی پرداخته می‌شود که با استفاده از داده‌های سری زمانی به بررسی ارتباط‌های کلان-مالی و شناسایی نقش

شوکه‌های مالی پرداخته‌اند (لازم به اشاره است که در بخش شناسایی محدودیت‌های مدل، کانل‌های اثرگذاری شوکه‌های مالی بر روی متغیرهای اقتصاد کلان مورد بحث قرار می‌گیرد).

۳. روش‌شناسی و معرفی مدل

۳-۱ رویکرد خودرگرسیون برداری با محدودیت علامتی

در این قسمت به صورت خلاصه مدل خودرگرسیون برداری با محدودیت علامتی معرفی می‌گردد. یک مدل خودرگرسیون برداری ساختاری به صورت زیر قابل نمایش است:

$$A y_t = B y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, I) \quad (1)$$

فاطمه فرجی*

که در رابطه بالا متغیر y_t یک بردار $n \times 1$ است و n دلالت بر تعداد متغیرهای مدل دارد و A و B ماتریس-های ضرایب با درجه $n \times n$ هستند. همچنین، بردار ε_t با درجه $n \times 1$ دلالت بر شوکه‌های ساختاری مدل دارد. لازم به

اشاره است که شوکه‌های ساختاری مستقل از یکدیگر هستند و همبستگی سریالی ندارند. تخمین سازگار مدل ساختاری به دلیل وجود همبستگی میان متغیرهای توضیحی و شوکه‌های مدل وجود ندارد. این همبستگی به دلیل وجود ماتریس A است که دربرگیرنده رابطه همزمان متغیرهای درونزای مدل است. به منظور رفع این مشکل رابطه بالا در معکوس ماتریس A ضرب می‌شود که جواب بدست آمده فرم خلاصه شده مدل خودرگرسیون برداری* نامیده می‌شود:

$$y_t = F y_{t-1} + u_t \quad u_t \sim N(0, \Sigma_u) \quad (2)$$

$$F = A^{-1} B \quad u_t = A^{-1} \varepsilon_t$$

۴. شواهد تجربی

۴-۱ نتایج تجربی مدل اول

دو مدل معرفی شده در قسمت قبل با استفاده از رویکرد بیزین و روش نمونه‌گیری گیبس در دوره زمانی ۱۳۹۸:۴-۱۳۷۰:۱ برآورد شده‌اند. لازم به اشاره است که در برآورد مدل‌ها از توزیع پیشین وارونه نرمال ویشارت و چهار وقفه زمانی استفاده شده است. تعداد تکرارهای انجام شده برابر با ۱۰,۰۰۰ و تکرارهای سوخته برابر با ۲,۰۰۰ در نظر گرفته شده است. معیار همگرایی در این رویکرد همان‌گونه که در قسمت روش‌شناسی مقاله توضیح داده شد

این است که در هر تکرار و برآورد مدل خودرگرسیون بردای اگر توابع عکس‌العمل آنی بدست آمده با محدودیت‌های علامتی وضع شده سازگاری داشته باشند مدل موردنظر به عنوان مدل صحیح شناسایی می‌شود. در نهایت، میانه توابع عکس‌العمل آنی صحیح به عنوان تابع عکس‌العمل آنی مدل خودرگرسیون بردای با محدودیت علامتی گزارش می‌شود. یافته‌ها حاکی از آن است که شوک سیاست پولی کمترین توضیح‌دهندگی را به ازای تغییرات دو متغیر نرخ تورم و نرخ سود دارد. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد در اینجا متغیر نرخ سود بانکی به عنوان متغیر نماینده سیاست پولی در مدل وارد شده است. لحاظ این متغیر به دو دلیل می‌تواند مورد انتقاد قرار گیرد. اول اینکه، این متغیر در اقتصاد ایران کمتر ماهیت ابزار اعمال سیاست پولی دارد و دوم اینکه، این متغیر عمدتاً به صورت سالانه توسط نهاد ناظر پولی تعیین می‌شود و تغییرپذیری آن با سایر متغیرهای مدل سازگاری ندارد. به همین دلیل، اینکه نتایج مدل نشان می‌دهد که نرخ سود در اقتصاد ایران (به عنوان متغیر نماینده سیاست پولی) نمی‌تواند بخش مهمی از نوسانات نرخ تورم را توضیح دهد، می‌توان به عنوان نشانه‌ای قابل قبول از برآورد مناسب مدل برشمرد. مطالعات متعددی وجود دارد که نشان می‌دهد که دو متغیر حجم پول (شوک مثبت تقاضا) و نرخ ارز (شوک منفی عرضه) بیشترین تأثیر را بر نرخ تورم در اقتصاد ایران دارد، برای مثال می‌توان به کارهای عظیمی و همکاران (۱۳۹۲)، مهرآرا و قبادزاده (۱۳۹۵)، شاکری و همکاران (۱۳۹۴) و رحمانی و فلاحتی (۱۳۹۵) اشاره نمود.

جدول (۳) تجزیه واریانس خطای پیش‌بینی مدل اول

متغیر/شوک	افق زمانی (فصل)	شوک عرضه کل	شوک تقاضای کل	شوک سیاست پولی	شوک سرمایه گذاری	شوک مالی
نرخ رشد تولید ناخالص داخلی	۱	۰,۱۷	۰,۱۴	۰,۱۶	۰,۱۷	۰,۱۵
	۸	۰,۱۹	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۸	۰,۱۵
	۲۰	۰,۱۹	۰,۱۴	۰,۱۶	۰,۱۸	۰,۱۶
نرخ تورم	۱	۰,۲۴	۰,۱۴	۰,۱۱	۰,۱۶	۰,۱۴
	۸	۰,۲۲	۰,۱۳	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۶
	۲۰	۰,۲۲	۰,۱۶	۰,۱۶	۰,۱۶	۰,۱۸
نرخ سود سپرده‌گذاری یک ساله	۱	۰,۱۵	۰,۱۷	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۶
	۸	۰,۱۸	۰,۱۶	۰,۱	۰,۱۷	۰,۱۳
	۲۰	۰,۲۲	۰,۱۵	۰,۰۹	۰,۱۹	۰,۱۲
نرخ رشد سرمایه‌گذاری	۱	۰,۱۵	۰,۱۴	۰,۱۳	۰,۲	۰,۱۵
	۸	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۲	۰,۱۶
	۲۰	۰,۱۶	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۲	۰,۱۶
نرخ رشد شاخص بورس	۱	۰,۱۲	۰,۱۵	۰,۱۷	۰,۱۹	۰,۱۶
	۸	۰,۱۱	۰,۱۵	۰,۱۸	۰,۲	۰,۱۶
	۲۰	۰,۱۳	۰,۱۶	۰,۱۹	۰,۲	۰,۱۷

در نمودارهای (۱) و (۲) تجزیه تاریخی نرخ رشد تولید ناخالص داخلی و نرخ رشد شاخص بورس در دوره زمانی ۱۳۷۰:۱-۱۳۹۸:۴ نشان داده شده است. در هر یک از نمودارها خط ممتد قرمز رنگ دلالت بر داده‌های واقعی دارد و هر یک از میله‌ها تجزیه متغیر موردنظر را به اثرات شوک‌های مختلف در فصل مشخص نشان می‌دهد. از نمودار (۱) مشخص است که شوک عرضه کل نقش غالب را در توضیح نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بر عهده داشته است. لازم به اشاره است با توجه به اینکه در اینجا متغیر قیمت نفت در نظر گرفته نشده است اثرات شوک‌های نفتی نیز تحت عنوان شوک عرضه کل در مدل خود را نشان می‌دهد. همچنین، شواهد دلالت دارد که شوک مالی نیز در روند تولید ناخالص داخلی تأثیر گذار بوده است. به خصوص، شوک مالی در دوره کسادى اخیر نقش پر رنگ‌تری بر عهده داشته است. سایر شوک‌های مدل نیز کمابیش در توضیح روند تولید ناخالص داخلی موثر بوده‌اند. نمودار (۲) قبل از هر چیزی نشان می‌دهد که روند شاخص بورس کاملاً نوسانی بوده و همچنین، درصد تغییرات شاخص بورس چند برابر درصد تغییرات تولید ناخالص داخلی بوده است. تجزیه تاریخی نرخ رشد شاخص بورس دلالت دارد که دو شوک سرمایه‌گذاری و پولی نقش اصلی در توضیح رفتار این متغیر داشته‌اند. این نتایج با دلالت‌های نظری و تجربی سازگاری بالایی دارد. شوک سرمایه‌گذاری که به صورت مستقیم حجم سرمایه و به تبع آن بازدهی سرمایه را تحت تأثیر قرار می‌دهد و انتظار می‌رود که بر بورس اوراق بهادار تأثیرگذار باشد.

۲.۴ نتایج تجربی مدل دوم

در این قسمت به بررسی شواهد تجربی مدل دوم پرداخته می‌شود. در اینجا نیز یافته‌ها حاکی از آن است که شوک عرضه کل نقش اصلی در توضیح نوسانات دو متغیر تولید ناخالص داخلی و نرخ تورم داشته است. همچنین، شواهد دلالت دارد که بعد از شوک عرضه کل، شوک عرضه اعتبارات بانکی و سرمایه‌گذاری بیشترین نقش را در توضیح اکثر متغیرهای مدل داشته‌اند. در افق زمانی ۵ ساله، شوک عرضه کل، سرمایه‌گذاری و تسهیلات به ترتیب ۱۷، ۱۶ و ۱۵ درصد از نوسانات متغیر تولید ناخالص داخلی را توضیح می‌دهند. از سایر نتایج تجزیه واریانس خطای پیش-بینی مدل دوم می‌توان اشاره نمود که شوک عرضه اعتبارات به صورت کلی نقش با اهمیت‌تری در مقایسه با شوک قیمت مسکن در توضیح نوسانات متغیرهای مختلف داشته است. همچنین، شواهد حاکی از آن است که شوک قیمتی مسکن اثر کمتری از سایر شوک‌های مدل بر نرخ رشد تسهیلات بانکی دارد. مطابق با مدل محدودیت وثیقه-ای* در ادبیات اقتصادی انتظار بر آن است که توان وام‌گیری در اقتصاد ارتباط مستقیمی با قیمت مسکن به عنوان مهم‌ترین دارایی قابل وثیقه داشته است. اما شواهد این مطالعه حاکی از آن است که در اقتصاد ایران فعالیت و میزان اعتباردهی نظام بانکی بیشتر تحت تأثیر شوک‌های عرضه و تقاضای کل است. این موضوع به نحوی می‌تواند مکانیسم انتشار اثرات شوک‌های مالی را مختل نماید و به همین دلیل نقش شوک قیمتی مسکن در توضیح نوسانات

* Collateral constraint

سایر متغیرهای مدل پررنگ نیست. لازم به اشاره است که در اینجا نیز مدل دوم یکبار بدون لحاظ متغیر نرخ سود تخمین زده شده است و نتایج اصلی آن در ضمیمه (ب) گزارش شده است.

جدول (۴) تجزیه واریانس خطای پیش‌بینی مدل دوم

متغیر/شوک	افق زمانی (فصل)	شوک عرضه کل	شوک تقاضای کل	شوک سیاست پولی	شوک سرمایه گذاری	شوک عرضه اعتبارات	شوک قیمت مسکن
نرخ رشد تولید ناخالص داخلی	۱	۰,۱۵	۰,۱۳	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۴	۰,۱۳
	۸	۰,۱۷	۰,۱۲	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۳
	۲۰	۰,۱۷	۰,۱۳	۰,۱۴	۰,۱۶	۰,۱۵	۰,۱۳
نرخ تورم	۱	۰,۲۴	۰,۱۱	۰,۰۷	۰,۱۶	۰,۱۲	۰,۰۵
	۸	۰,۲۳	۰,۱۱	۰,۰۹	۰,۱۶	۰,۱۴	۰,۰۷
	۲۰	۰,۲۱	۰,۱۳	۰,۱۲	۰,۱۷	۰,۱۶	۰,۱۱
نرخ سود سپرده-گذاری یک ساله	۱	۰,۱۳	۰,۱۴	۰,۱۲	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۴
	۸	۰,۱۶	۰,۱۴	۰,۰۹	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۳
	۲۰	۰,۱۹	۰,۱۴	۰,۰۸	۰,۱۵	۰,۱۴	۰,۱۱
نرخ رشد سرمایه‌گذاری	۱	۰,۱۲	۰,۱۳	۰,۱۳	۰,۱۷	۰,۱۶	۰,۱۴
	۸	۰,۱۲	۰,۱۳	۰,۱۴	۰,۱۷	۰,۱۶	۰,۱۴
	۲۰	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۷	۰,۱۶	۰,۱۴
نرخ رشد تسهیلات بانکی	۱	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۲	۰,۱۵	۰,۱۳	۰,۰۸
	۸	۰,۱۶	۰,۱۵	۰,۱۲	۰,۱۵	۰,۱۳	۰,۰۸
	۲۰	۰,۱۷	۰,۱۵	۰,۱۲	۰,۱۶	۰,۱۴	۰,۰۹
نرخ رشد قیمت مسکن	۱	۰,۱۲	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۵
	۸	۰,۱۲	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۵
	۲۰	۰,۱۴	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۵	۰,۱۵

۵. جمع‌بندی

در این مطالعه به دنبال شناسایی نقش شوک‌های مالی در نوسانات بخش حقیقی اقتصاد ایران بودیم. دو مدل اصلی مطالعه حاضر با استفاده از روش بیزین و داده‌های فصلی در دوره زمانی ۱۳۹۸:۴-۱۳۷۰:۱ برآورد شدند. نتایج تجزیه واریانس خطای پیش‌بینی مدل‌های مختلف حاکی از آن است که شوک عرضه نقش غالب را در توضیح نوسانات متغیرهای اقتصاد کلان برعهده دارد. بخشی از این موضوع می‌تواند به دلیل عدم لحاظ قیمت نفت و شوک نفتی در مدل باشد. سایر نتایج بدست آمده دلالت دارد که بعد از شوک عرضه و شوک سرمایه‌گذاری، شوک‌های مالی (شوک بازار سهام، شوک عرضه اعتبارات و شوک قیمت مسکن) سهم بیشتری از نوسانات تولید ناخالص داخلی

را توضیح می‌دهند. همچنین، شواهد نشان می‌دهد که شوک سرمایه‌گذاری بیشترین نقش را در توضیح نوسانات شاخص بورس برعهده داشته است و شوک‌های عرضه کل و سرمایه‌گذاری سهم بیشتری در توضیح نوسانات نرخ رشد تسهیلات بانکی داشته‌اند. لازم به اشاره است که شوک عرضه اعتبارات به صورت کلی نقش با اهمیت‌تری در مقایسه با شوک قیمت مسکن در توضیح نوسانات متغیرهای مختلف داشته است. نتایج تجزیه تاریخی متغیرهای مختلف دلالت دارد که شوک عرضه بیشترین نقش را در توضیح رفتار نرخ رشد تولید ناخالص داخلی داشته است. نقش شوک‌های مالی در توضیح رفتار تولید ناخالص داخلی در دوره کسادی اخیر پررنگ‌تر بوده است. در اینجا نیز شواهد حاکی از آن است که شوک عرضه اعتبارات نقش با اهمیت‌تری از شوک قیمت مسکن داشته است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که قیمت مسکن نقش فعالی در توضیح رفتار تسهیلات بانکی نداشته است که این موضوع با فرضیه مدل محدودیت وثیقه‌ای سازگاری ندارد. نتایج توابع عکس‌العمل آنی مدل‌ها نشان می‌دهد که متغیرهای تولید ناخالص داخلی، سرمایه‌گذاری و تسهیلات بانکی واکنش مثبتی به شوک‌های مالی دارند. همچنین، نتایج دلالت دارد که واکنش مقداری سرمایه‌گذاری در مقایسه با سایر متغیرها قابل‌ملاحظه است. براساس یافته‌های این مطالعه پیشنهاد می‌شود که سیاست‌گذاران پولی و مالی برای ثبات بخشی به شرایط اقتصادی، توجه ویژه‌ای به متغیرهای بخش مالی بخصوص حجم تسهیلات بانکی و وضعیت بازار سهام داشته باشند. شواهد این مطالعه نشان می‌دهد که اعمال سیاست‌های ثبات بخشی بدون لحاظ این متغیرها تا حد زیادی ناقص خواهد بود.

مرجع‌ها:

1. Aikman, D., Haldane, A. G., & Nelson, B. D. (2015). Curbing the credit cycle. *The Economic Journal*, 125(585), 1072-1109.
2. Bernanke, B. S., & Kuttner, K. N. (2005). What explains the stock market's reaction to Federal Reserve policy?. *The Journal of finance*, 60(3), 1221-1257.
3. Blake, A. P., & Mumtaz, H. (2017). Applied Bayesian econometrics for central bankers. *Technical Books*.
4. Baumeister, C., & Hamilton, J. D. (2015). Sign restrictions, structural vector autoregressions, and useful prior information. *Econometrica*, 83(5), 1963-1999.
5. Caldara, D., Fuentes-Albero, C., Gilchrist, S., & Zakrajšek, E. (2016). The macroeconomic impact of financial and uncertainty shocks. *European Economic Review*, 88, 185-207.
6. Canova, F., & Paustian, M. (2011). Business cycle measurement with some theory. *Journal of Monetary Economics*, 58(4), 345-361.
7. Canova, F., & De Nicolò, G. (2002). Monetary disturbances matter for business fluctuations in the G-7. *Journal of Monetary Economics*, 49(6), 1131-1159.
8. Cheng, L., & Jin, Y. (2013). Asset prices, monetary policy, and aggregate fluctuations: An empirical investigation. *Economics Letters*, 119(1), 24-27.
9. Christiano, L. J., Motto, R., & Rostagno, M. (2014). Risk shocks. *The American Economic Review*, 104(1), 27-65.
10. Claessens, S., Kose, M. A., & Terrones, M. E. (2012). How do business and financial cycles interact?. *Journal of International economics*, 87(1), 178-190.
11. Danne, C. (2015). VARsignR: Estimating VAR using sign restrictions in R. *MPRA, paper 68429*

12. Dedola, L., & Neri, S. (2007). What does a technology shock do? A VAR analysis with model-based sign restrictions. *Journal of Monetary Economics*, 54(2), 512-549.
13. Furlanetto, F., Ravazzolo, F., & Sarferaz, S. (2014). Identification of financial factors in economic fluctuations. *The Economic Journal*.
14. Fry, R., & Pagan, A. (2011). Sign restrictions in structural vector autoregressions: A critical review. *Journal of Economic Literature*, 49(4), 938-60.
15. Gerali, A., Neri, S., Sessa, L., & Signoretti, F. M. (2010). Credit and Banking in a DSGE Model of the Euro Area. *Journal of Money, Credit and Banking*, 42(s1), 107-141.
16. Gertler, M., & Karadi, P. (2011). A model of unconventional monetary policy. *Journal of monetary Economics*, 58(1), 17-34.

اوراق مهارت، سهامی به پشتوانه سرمایه انسانی

هوشنگ سهیلی نیا^۱

^۱ کارشناسی ارشد مدیریت مالی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بین الملل قشم

hooshang.soheilinia@yahoo.com

چکیده: هدف پژوهش بررسی انتشار ابزار مالی به پشتوانه سرمایه انسانی شرکت ها می باشد. نمونه آماری مشتمل بر ۱۸ صندوق مشترک سرمایه گذاری که بیشترین بازدهی دوره را طی سال ها ۹۶-۱۳۹۲ در بورس ایران داشته اند است، سنجش سرمایه انسانی در قالب پرسش نامه محقق ساخته و تعیین رابطه از طریق همبستگی و بررسی مدل پیش بینی در معادله رگرسیون می باشد. همبستگی پیرسون و اسپیرمن بین بازدهی صندوق ها با سرمایه انسانی (۰/۷۲۴) و (۰/۹۷۰) رابطه مثبت و قوی، با تحصیلات کارکنان (۰/۲۰۶) و (۰/۲۳۳) مثبت و ضعیف، اما در بازدهی صندوق ها با سابقه کار افراد با نبود سطح معناداری رابطه قابل اتکا نبود. براساس رگرسیون در ورود همزمان داده ها ضریب همبستگی بین متغیر وابسته و ترکیب خطی از متغیرهای مستقل ۰/۷۳۴ با ۰/۵۴ قابلیت پیش بینی تغییرات و در رگرسیون روش موثر ضریب همبستگی بین سرمایه انسانی و بازده کل دوره صندوق ها ۰/۷۲۹ می باشد، نتایج نشان داد صندوق های سرمایه گذاری که سرمایه انسانی بالاتری داشته اند بازدهی بیشتری داشته و امکان پیش بینی بازدهی صندوق ها بر مبنای میزان سرمایه انسانی وجود دارد و می تواند انتشار اوراق بهادار به پشتوانه سرمایه انسانی شرکت ها تحت عنوان اوراق بهادار مهارت معرفی و عملیاتی گردد.

کلمات کلیدی: اوراق بهادار، سهام، سرمایه انسانی

طبقه بندی موضوعی: JEL ، G17 ، G23

۱ مقدمه

انسان ها منابع جدید مولد ثروت هستند، مشروط به اینکه سرمایه انسانی به حساب آیند [۱]، امروزه بیش از هر زمان دیگر مشخص شده است که رشد و توسعه سازمان ها و در پی آن یک جامعه و کشور در گرو استفاده صحیح از نیروی انسانی است [۲]. تحقیقات چن و همکاران* (۲۰۰۵)، تاثیر مثبت سرمایه انسانی در افزایش سودآوری سازمان و رشد درآمد را نشان میدهد [۳]، براساس تحقیقات کاماس[†] (۲۰۰۸) سرمایه های انسانی نسبت به سرمایه های

* . Chen et al

† . Kamath

ساختاری و فیزیکی تاثیر بیشتری بر سود آوری و بهره وری شرکت ها دارند [۴]، یگانه وهمکاران (۱۳۹۳) نشان دادند که ارزش آفرینی نیروی انسانی تاثیر مثبت ومعنا دار بر بهبود عملکرد مالی و افزایش سود سهام شرکت های پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران داشته است [۵]. سوال اصلی پژوهش این است؛ آیا می شود صرفاً به پشتوانه سرمایه انسانی اوراق بهاداری را طراحی کرد؟ آیا می شود شرکت ها ابتداً با پشتوانه ی سرمایه انسانی اعتباردهی شده، خود را تامین مالی نمایند و سپس از منابع بدست آمده به بنیانگذاری شرکت بپردازند؟ فرضیه پژوهش وجود افراد متبحر و عدم سرمایه کافی در یک صنعت خاص و هدف آن بررسی طراحی ابزار مالی مبتنی بر سرمایه انسانی شرکت ها می باشد.

۲ روش شناسی پژوهش

تعیین میزان سرمایه انسانی شرکت ها با پرسش نامه ای محقق ساخته اقتباس شده از شاخص های سرمایه انسانی در پرسش نامه های بنتیس (۱۹۹۸)، پیکه و همکاران (۲۰۰۲)، لیپ و همکاران (۲۰۰۴) ، با تایید روایی و ضریب پایایی ۰٫۸۳ در آلفای کرونباخ انجام شده است. نمونه آماری شامل ۱۰۸ پاسخ دهنده (۶ نفر به ازای هر صندوق) از ۱۸ صندوق سرمایه گذاری مشترک از نوع سهام که بیشترین بازدهی کل طی دوره زمانی ۹۶-۱۳۹۲ داشته اند انتخاب شدند، برای تعیین وابستگی بین متغیرها از همبستگی اسپیرمن و پیرسون برای تبیین نوع رابطه و تخمین بازده صندوق ها از تابع رگرسیون استفاده شد.

۳ تجزیه و تحلیل داده ها

جدول ۱: ضرایب همبستگی پیرسون و اسپیرمن بین متغیرهای پیش بین و متغیر ملاک

		سرمایه انسانی	تحصیلات	سابقه کار		سرمایه انسانی	تحصیلات	سابقه کار
بازده کل دوره	همبستگی پیرسون	۰.۷۲۴**	۰.۲۰۶*	-۰.۰۵۴	همبستگی اسپیرمن	۰.۹۷۰**	۰.۲۳۳*	-۰.۰۷۳
	Sig. (2-tailed)	۰.۰۰۰	۰.۰۳۳	۰.۵۸۵	Sig. (2-tailed)	۰.۰۰۰	۰.۰۱۶	۰.۴۵۷
	تعداد	۱۰۸	۱۰۷	۱۰۶	تعداد	۱۰۸	۱۰۷	۱۰۶

**همبستگی در سطح ۰٫۰۱ ، *همبستگی در سطح ۰٫۰۵

ضرایب همبستگی پیرسون و اسپیرمن محاسبه شده دو متغیر سرمایه انسانی و بازده کل مثبت و شدت آنان در همبستگی پیرسون (۰.۷۲۴) قوی و در همبستگی اسپیرمن (۰/۹۷۰) شدید و برای دو متغیر تحصیلات کارکنان و بازده کل صندوق ها مثبت اما شدت آنها در همبستگی پیرسون (۰/۲۰۶) و ضریب همبستگی اسپیرمن (۰/۲۳۳) ضعیف استنباط می گردد، بین بازده کل صندوق ها و سابقه کار کارکنان، سطح معناداری بسیار بیشتر از مقدار مفروض ۰.۰۵ می باشد، که نشان می دهد از جنبه آماری دو متغیر با یکدیگر رابطه ای ندارند (جدول ۱).

۳-۱ رابطه بین بازده کل صندوق ها و سرمایه انسانی صندوق ها

جدول ۲: ضرایب همبستگی بین سرمایه انسانی و بازده صندوق ها

مدل	تخمین خطای استاندارد	ضریب تعیین تعدیل شده	ضریب تعیین r^2	ضریب همبستگی r
A	۷۷۲.۹۸	۰.۵۲	۰.۵۲۵	۰.۷۲۴

جدول ۳: ضرایب مدل رگرسیونی A (سرمایه انسانی و بازده صندوق ها)

مدل A	ضرایب غیراستاندارد		ضرایب استاندارد	t	سطح معناداری
	B	Std. Error	Beta		
مقدار ثابت	-۳۸۶۳.۷۰۲	۴۶۷.۳۸۹		-۸.۲۶۷	۰.۰۰۰
سرمایه انسانی	۱۳۵۴.۰۲۲	۱۲۵.۱۸۱	۰.۷۲۴	۱۰.۸۱۶	۰.۰۰۰

از آنجایی که مقدار سطح معنی داری برای مقدار ثابت و سرمایه انسانی در سطح ۰.۰۵ معنادار است، عدم وجود رابطه بین بازده کل و سرمایه انسانی رد می شود (جدول ۳) و مدل خط رگرسیون به صورت زیر نوشته می شود:

$$Y: \text{بازده کل دوره} \quad X: \text{سرمایه انسانی} \\ Y = -3863/1354 + 702/0.22 X$$

۳-۲ رابطه بین بازده کل صندوق ها و سطح تحصیلات کارکنان صندوق ها

جدول ۴: ضرایب همبستگی بین تحصیلات کارکنان و بازده صندوق ها

مدل	تخمین خطای استاندارد	ضریب تعیین تعدیل شده	ضریب تعیین r^2	ضریب همبستگی r
B	۱۱۰۰.۳۶۸۳۰	۰.۰۳۳	۰.۰۴۲	۰.۲۰۶

جدول ۵: ضرایب مدل رگرسیونی B (سطح تحصیلات و بازده صندوق ها)

مدل B	ضرایب غیراستاندارد		ضرایب استاندارد	t	سطح معناداری
	B	Std. Error	Beta		
مقدار ثابت	-۳۹۰.۵۴۱	۷۱۴.۱۱۰		-۰.۵۴۷	۰.۵۸۶
تحصیلات	۴۰۳.۶۹۹	۱۸۷.۰۲۳	۰.۲۰۶	۲.۱۵۹	۰.۰۳۳

در این مدل ۴.۲٪ از تغییرات توسط مدل رگرسیون توضیح داده شده است (جدول ۴). ضریب معناداری در سطح ۰/۰۵ برای تحصیلات کارکنان و در سطح ۰/۰۱ برای مقدار ثابت مناسب است (جدول ۵)، براین اساس مدل خط رگرسیون عبارت است از:

$$Y = - ۳۹۰/۵۴۱ + ۴۰۳/۶۹۹X$$

۳-۳ رابطه بین بازده کل صندوق ها و سابقه کاری کارکنان صندوق ها:

جدول ۶: ضرایب همبستگی بین سابقه کاری کارکنان و بازده صندوق ها

مدل	ضریب همبستگی r	ضریب تعیین r^2	ضریب تعیین تعدیل شده	تخمین خطای استاندارد
C	۰.۰۵۴	۰.۰۰۳	-۰.۰۰۷	۱۱۲۹.۸۹۱۷۱

جدول ۷: ضرایب مدل رگرسیونی C (سابقه کاری کارکنان و بازده صندوق ها)

مدل C	ضرایب غیراستاندارد		ضرایب استاندارد	t	سطح معناداری
	B	Std. Error	Beta		
مقدار ثابت	۱۲۴۳.۷۹۹	۲۳۷.۳۲۵		۵.۲۴۱	۰.۰۰۰
سابقه کار	-۶۱.۱۴۱	۱۱۱.۵۲۶	-۰.۰۵۴	-۰.۵۴۸	۰.۵۸۵

در این مدل ۳ درصد از تغییرات توسط مدل رگرسیون توضیح داده شده و ضریب همبستگی تعدیل شده ۰/۰۰۷ - است که بسیار کوچک و منفی محاسبه شد (جدول ۶). با توجه به جدول ۷، ضریب معناداری در سطح ۰/۰۵ برای مقدار ثابت مناسب است اما برای سابقه معنادار نیست و نشان میدهد که سابقه کاری نمی تواند برای پیش بینی بازده صندوق ها بکار رود.

۴ آزمون مدل روش ورود همزمان داده

براساس نتایج ضریب همبستگی بین متغیر وابسته و ترکیب خطی از متغیرهای مستقل 0.734 می باشد، حدود 0.54 تغییرات متغیر وابسته توسط مدل رگرسیون پیش بینی می شود. باتوجه به سطح معناداری تحصیلات کارکنان و سابقه کاری ضرایب آنها نادیده گرفته شد (جدول ۸)، در روش ورود همزمان باتوجه به سطح معناداری متغیرها، مدلی که براساس متغیر سرمایه انسانی تعریف شده می تواند مدل مناسبی باشد.

جدول ۸: ضرایب مدل رگرسیونی در ورد همزمان داده ها

سطح معناداری	t	ضرایب استاندارد		ورود همزمان
		Beta	Std. Error	
۰.۰۰۰	-۶.۸۳۷		۴۶۹.۳۷۶	مقدار ثابت
۰.۰۰۰	۱۰.۳۵۲	۰.۷۱۷	۱۲۹.۸۷۱	سرمایه انسانی
۰.۲۶۵	۱.۱۲۱	۰.۰۷۹	۱۳۸.۸۱۸	تحصیلات
۰.۷۹۵	۰.۲۶۰	۰.۰۱۸	۸۳.۱۲۰	سابقه کار

۵ آزمون مدل رگرسیون در روش موثر

بانوجه به نتایج ضریب همبستگی بین سرمایه انسانی و بازده کل دوره صندوق ها در مدل پذیرفته شده روش موثر 0.729 می باشد. در جدول ۹، ضرایب معناداری متغیر ثابت و سرمایه انسانی صفر می باشد و نشان از تایید مدل می کنند. مدل نهایی پژوهش :

$$Y = -3891/697 + 1366/277 X$$

: بازده دوره صندوق ها X: سرمایه انسانی صندوق ها

جدول ۹: ضرایب مدل رگرسیونی در روش موثر

سطح معناداری	t	ضرایب استاندارد		ورود همزمان
		Beta	Std. Error	
۰.۰۰۰	-۸.۲۵۴		۴۷۱.۴۹۵	مقدار ثابت
۰.۰۰۰	۱۰.۸۰۲	۰.۷۲۹	۱۲۶.۴۸۸	سرمایه انسانی

۵ بحث و نتیجه گیری

نتایج رگرسیون نشان می دهد، سرمایه انسانی دارای بیشترین تاثیر در مدل بوده و امکان پیش بینی بازدهی صندوق ها بر مبنای میزان سرمایه انسانی آنها وجود دارد و به نظر می رسد اگر بتوانیم میزان سرمایه انسانی یک

شرکت را مشخص کنیم، به احتمال قوی می توان مقدار بازدهی آن را پیش بینی کرد. نهایتاً ایده ی انتشار اوراق بهادار به پشتوانه رتبه اعتباری سرمایه انسانی شرکت ها تحت عنوان اوراق بهادار مهارت (اوراق مهارت) معرفی می گردد، البته طرح این ایده و ارائه مدل رگرسیونی پیشی بینی بهتراست که توسط پژوهشگران دیگر دوباره سنجی و مورد آزمون قرار گیرد.

مرجع ها

۱. صنوبری، محمد (۱۳۸۸). مقدمه ای بر سرمایه انسانی (مفاهیم، ویژگی ها و شاخص های اندازه گیری)، دومانهنامه توسعه انسانی پلیس، سال ششم، شماره ۲۲: ۱۳۶-۱۲۰.
۲. فرهی بوزنجانی، برزو؛ ممبینی، یعقوب (۱۳۹۱). اهمیت منابع انسانی در تولید ملی، ماهنامه اجتماعی، اقتصادی، علمی و فرهنگی کار و جامعه، شماره ۱۵۲: ۳۱-۱۹.
۳. چن، مینگ چین؛ چنگ، شو جی؛ هوانگ، یو چانگ (۲۰۰۵). بررسی تجربی رابطه بین سرمایه فکری و ارزش بازار شرکت و عملکرد مالی، مجله سرمایه فکری، شماره ۶: ۱۷۶-۱۵۹.
۴. کامت، بهاراتجی (۲۰۰۸). سرمایه فکری و عملکرد شرکت در صنعت داروسازی هند، سرمایه فکری، شماره ۹: ۷۰۴-۶۸۴.
۵. یگانه، یحیی؛ رحیمیان، نظام الدین؛ توکل نیا، اسماعیل (۱۳۹۳). بررسی ارزش آفرینی گزارشگری سرمایه انسانی، فصلنامه علمی پژوهشی حسابداری مدیریت، شماره ۲۰: ۳۴-۱۱.

الگوریتم محاسبه توزیع آماره‌های ترتیبی در یک نمونه بدون جایگذاری از یک توزیع گسسته

مهدی شمس^{۱*}

^۱ دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی، گروه آمار

چکیده: آماره‌های ترتیبی نقش مهمی در علوم نظری و کاربردی آمار دارند و در اکثر شاخه‌های آمار نظیر تحلیل بقا، قابلیت اعتماد، کنترل کیفیت آماری و نظریه پالایش و همچنین در سایر علوم نظیر پردازش سیگنال، پردازش تصویر و ردیابی هدف رادار کاربرد دارند. در این مقاله یک الگوریتم کامپیوتری برای محاسبه تابع جرم احتمال آماره‌های ترتیبی که از یک جامعه گسسته انتخاب شده ارائه می‌شود. برای نمونه‌گیری بدون جایگذاری از یک جامعه متناهی و همچنین نامتناهی، این الگوریتم مورد تحلیل قرار می‌گیرد که خروجی این الگوریتم کامپیوتری تابع جرم احتمال آماره‌های ترتیبی هست. در ادامه مثال‌هایی در حالت‌های نمونه‌گیری بدون جایگذاری از یک جامعه با تکیه‌گاه متناهی و احتمال‌های هم‌شانس و همچنین احتمال‌های ناهم‌شانس و نمونه‌گیری بدون جایگذاری از یک جامعه با تکیه‌گاه نامتناهی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: آماره‌های ترتیبی، نمونه‌گیری بدون جایگذاری، میانه، توزیع هندسی، تابع بقا.

طبقه بندی موضوعی: 62G30, 60E05, 62Exx.

۱ مقدمه

آماره‌های ترتیبی از لحاظ نظری و کاربردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند [2] و تعداد زیادی از متون آمار ریاضی مشهور مانند [1,3,4] توزیع‌هایی از آماره‌های ترتیبی برای متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از یک جامعه پیوسته را بیان کرده‌اند. آماره‌های ترتیبی در شاخه‌هایی نظیر تحلیل بقا، قابلیت اعتماد، کنترل کیفیت آماری، نظریه پالایش، پردازش سیگنال، پردازش تصویر و ردیابی هدف رادار کاربرد دارند. در این مقاله یک الگوریتم برای تعیین توزیع آماره‌های ترتیبی که به طور کلی از یک جامعه اصلی گسسته انتخاب شده ارائه می‌شود. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند که روی تکیه‌گاه S تعریف شده‌اند و هر یک با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و تابع جرم (چگالی) احتمال $f_X(x)$ هستند. فرض کنید

* سخنران

$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی نمونه اصلی باشند و لذا $X_{(r)}$ ، r امین عدد کوچکتر در نمونه است که در آن $r = 1, \dots, n$. تابع چگالی r امین آماره ترتیبی یعنی $X_{(r)}$ برابر است با

$$f_{X_{(r)}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f_x(x) [F_x(x)]^{r-1} [1-F_x(x)]^{n-r}, \quad x \in S.$$

اجرای گامهای الگوریتم Orderstat (خلاصه دستور OrderStat(X, n, r, [wo])) در نرم‌افزار میپل، در بخش-های بعدی مقاله در حالت‌های بدون جایگذاری توضیح داده شده است. این الگوریتم به سه آرگومان نیاز دارد:

۱. متغیر تصادفی X .
۲. تعداد عضوهای n که به طور تصادفی از جامعه‌ای با تابع جرم احتمال $f_x(x)$ انتخاب شده است.
۳. شاخص r که رتبه آماره ترتیبی را نشان می‌دهد.
۴. انتخاب چهارمین آرگومان wo، نشان دهنده این هست که اعضای نمونه بدون جایگذاری از جامعه انتخاب شده‌اند.

خروجی الگوریتم، تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی $f_{X_{(r)}}(x)$ است. الگوریتم متغیرهای تصادفی با دامنه متناهی یا نامتناهی با دو روش مجزا دسته‌بندی می‌شوند که در دو بخش جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲ نمونه‌گیری بدون جایگذاری از یک جامعه با دامنه متناهی

اگر توزیع جامعه دامنه متناهی داشته باشد اندازه جامعه با N مشخص می‌شود و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم که دامنه به صورت $\{1, \dots, N\}$ مرتب شده باشد. به عنوان مثال اگر

$$f_x(x) = \begin{cases} 0.5 & x = 7 \\ 0.2 & x = 11 \\ 0.3 & x = 15 \end{cases}$$

در این صورت $N = 3$ و دامنه X موقتاً به جای $S = \{7, 11, 15\}$ به صورت $S = \{1, 2, 3\}$ فرض می‌شود. دامنه واقعی بعد از محاسبه احتمال آماره‌های ترتیبی دوباره بازگردانده می‌شود.

قضیه 1,2. اگر جامعه با تابع جرم احتمال $f_x(x)$ ، مقادیر هم‌شانس داشته باشد، در این صورت تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی از n نمونه تصادفی اخذ شده برابر است با:

$$f_{X(r)}(x) = \frac{\binom{x-1}{r-1} \binom{N-x}{n-r}}{\binom{N}{n}} \quad x = r, r+1, \dots, r+N-n.$$

اثبات. اعضای جامعه را به دو مجموعه $\{1, \dots, r-1\}$ و $\{r, r+1, \dots, r+N-n\}$ تقسیم می‌کنیم. برای این که احتمال r امین آماره ترتیبی را به دست آوریم باید $r-1$ آماره قبلی مشخص شده باشد که $\binom{x-1}{r-1}$ راه برای انتخاب r امین آماره ترتیبی وجود دارد. چون یافتن تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی مد نظر است، پس $N-x$ تا از اعضای جامعه وجود دارند که r امین آماره ترتیبی در آنها نیست. اگر یافتن r امین آماره را پیروزی تلقی کنیم، به تعداد $\binom{N-x}{n-r}$ راه برای انتخاب $n-r$ شکست از $N-x$ وجود دارد، پس $\binom{x-1}{r-1} \binom{N-x}{n-r}$ راه برای انتخاب r امین آماره ترتیبی و $n-r$ شکست است.

چون $\binom{N}{n}$ راه برای انتخاب n عنصر از N عنصر جامعه وجود دارد که هر یک هم‌شانس هستند، احتمال انتخاب

r امین آماره ترتیبی در n نمونه‌گیری به صورت

$$f_{X(r)}(x) = P(X_{(r)} = x) = \frac{\binom{x-1}{r-1} \binom{N-x}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

هست.

مثال 2,2 (نمونه‌گیری بدون جایگذاری با دامنه متناهی و احتمال‌های هم‌شانس). ۱۵ کارت به تصادف و بدون جایگذاری از یک دسته کارت ۲۵ تایی که از ۱ تا ۲۵ شماره‌گذاری شده‌اند انتخاب کنید. هدف یافتن احتمال آن است که کارت شماره ۱۰ میانه کارت‌های انتخاب شده باشد. چون جامعه گسسته است، تابع جرم احتمال متغیر تصادفی گسسته X از رابطه $f_X(x) = \frac{1}{25}$ که $x = 1, 2, \dots, 25$ به دست می‌آید. اندازه جامعه $N = 25$ و اندازه نمونه $n = 15$ است و میانه نمونه $X_{(8)}$ است. احتمال این که میانه نمونه مساوی ۱۰ باشد برابر است با

$$P(X_{(8)} = 10) = f_{X_{(8)}}(10) = \frac{\binom{10-1}{8-1} \binom{25-10}{15-8}}{\binom{25}{15}} \cong 0.0709.$$

علاوه بر محاسبه نظری بالا، الگوریتم orderstat تابع جرم احتمال هشتمین آماره ترتیبی (زمانی که یک نمونه-گیری بدون جایگذاری به اندازه $n = 15$ انجام شده باشد) را به صورت زیر محاسبه می‌کند:

$$f_{X_{(8)}}(x) = \binom{25}{15}^{-1} \binom{x-1}{7} \binom{25-x}{7}.$$

کدهای این مثال به صورت

```
X := UniformDiscreteRV(1, 25);
Y := OrderStat(X, 15, 8, "wo");
PDF(Y, 10);
```

است.

اگر متغیر تصادفی X دامنه متناهی N داشته باشد و احتمال‌ها هم‌شانس نباشند، هنگام محاسبه تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. نمونه‌گیری فقط شامل یک عضو باشد، یعنی $n = 1$: در این صورت برای $r = 1, 2, \dots, N$ داریم

$$f_{X_{(r)}}(x) = f_X(x).$$

۲. نمونه با جامعه برابر باشد، یعنی $n = N$: در این صورت تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی برای

$$x = r \text{ به صورت } f_{X_{(r)}}(x) = 1 \text{ است.}$$

۳. نمونه‌گیری بیشتر از یک عضو ولی تمام جامعه نمونه نباشد، یعنی $n = 1, \dots, N$: در این حالت یک آرایه

$n \times N$ به نام Probstorage شامل تمام احتمال‌های $f_{X_{(r)}}(x)$ ، $x = 1, 2, \dots, N$ و

$r = 1, 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم که مقدار $f_{X_{(r)}}(x)$ در سطر r ام ستون x ام آرایه یافت می‌شود. به

عنوان مثال اگر $X \sim \text{bin}(5, \frac{1}{4})$ و $n = 3$ نمونه اخذ شده باشد، آرایه Probstorage دارای بعد 3×6

است.

۳ نمونه‌گیری بدون جایگذاری از یک جامعه با دامنه نامتناهی

اگر توزیع جامعه دارای تکیه‌گاه شمارای نامتناهی باشد، یعنی $S = \mathbb{N}$ ، آن‌گاه الگویی که برای یافتن تابع جرم احتمال r امین آماره ترتیبی در حالت دامنه متناهی مورد استفاده قرار گرفت کار نخواهد کرد. هنگامی که $n = 1$ عضو نمونه‌گیری می‌شود، برای $r = 1, 2, \dots, N$ داریم $f_{X(r)}(x) = f_X(x)$. الگوریتم orderstat هنگامی که حداکثر $n = 2$ هست، تابع جرم احتمال کوچکترین آماره ترتیبی را محاسبه می‌کند که تابع احتمال آن برای $x \in \mathbb{N}$ برابر است با:

$$P(X_{(1)} = x) = P(X_1 = x)P(X_2 \geq x+1 | X_1 = x) + \sum_{y=x+1}^{\infty} P(X_1 = y)P(X_2 = x | X_1 = y).$$

بنابراین هنگامی که $n = 2$ عضو نمونه‌گیری شوند، تابع جرم احتمال $X_{(1)}$ برای $x \in \mathbb{N}$ عبارت است از:

$$f_{X_{(1)}}(x) = f_X(x) \left[\frac{S_X(x+1)}{1 - f_X(x)} + \sum_{y=x+1}^{\infty} \frac{f_X(y)}{1 - f_X(y)} \right] \quad (1,2)$$

که در آن $S_X(x) = P(X \geq x)$ تابع بقا است که با $S_X(x)$ تعریف می‌شود.

مثال 3,2 (نمونه‌گیری بدون جایگذاری و دامنه نامتناهی). اگر $n = 2$ عضو بدون جایگذاری از جامعه‌ای با توزیع $X \sim G(\frac{1}{2})$ نمونه‌گیری شوند، می‌خواهیم احتمال این که کوچکترین آماره ترتیبی 5 باشد را پیدا کنیم. در توزیع هندسی مقدار متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد آزمایشات تا رسیدن به اولین پیروزی است، که تابع جرم احتمال آن برای $x = 1, 2, \dots$ برابر است با $f_X(x) = (\frac{1}{2})^x$ و از این رو تابع جرم احتمال کوچکترین آماره ترتیبی که با استفاده از الگوریتم orderstat محاسبه می‌شود عبارت است از:

$$S_X(x+1) = P(X \geq x+1) = \sum_{y=x+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^y = (\frac{1}{2})^x$$

و از این رو طبق (1,2) داریم:

$$f_{X_{(1)}}(x) = \frac{(\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^x}{1 - (\frac{1}{2})^x} + (\frac{1}{2})^x \sum_{y=x+1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^y}{1 - (\frac{1}{2})^y}, \quad x = 1, 2, \dots$$

و در پی آن $f_{X_{(1)}}(5) = 0.0020$. کدهای این مثال به صورت

```
X := GeometricRV(1 / 2);
OrderStat(X, 2, 1, "wo");
```

است.

مرجع‌ها

1. G. Casella, R. Berger, *Statistical Inference*, 2nd ed. Duxbury Press, Pacific Grove, CA, 2002.
2. H. A. David, H. N. Nagaraja, *Order Statistics*, 3rd ed. Wiley, Hoboken, NJ, 2003.
3. R. V. Hogg, A. T. Craig, *Mathematical Statistics*, 5th ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 1995.
4. A. D. Hutson, M. D. Ernst, The exact bootstrap mean and variance of an L-estimator. J. Royal Statist. Soc. B 62 (2000), pp 89-94.
5. J. A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 2nd ed. Wadsworth, Belmont, CA, 1995.

برآورد ارزش در معرض خطر با استفاده از فرایندهای لوی زمان متغیر در بورس اوراق بهادار تهران

۱- نویده مدرسی، ۲- مشتاق درویشی

۱- دانشکده آمار، ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی

۲- گروه مهندسی مالی دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده: سرمایه گذاران در بازارهای مالی همواره با ریسک های ناشی از نوسانات قیمت مواجه هستند که به منظور جلوگیری از زیان های شدید به مدیریت ریسک و کنترل آن می پردازند از این رو در این مقاله مدل تلاطم تصادفی خانواده ای از فرایندهای لوی را در تعیین ارزش در معرض خطر شرطی مورد مطالعه قرار می دهیم. این دینامیک دارایی، مدل مناسبی برای پدیده هایی است که دارای پرش های نامتناهی اند و تلاطم وابسته به زمان دارند. بر این اساس سه فرایند پرش نامتناهی لوی برای مدل بندی بازده دارایی معرفی شده است که ویژگی های چولگی و دم سنگینی را نشان می دهند اما بیانگر تلاطم خوشه ای نمی باشند. با زمان متغیر کردن فرایندهای لوی توسط انتگرال فرایند کاکس - اینگرسول - راس، مدل تلاطم تصادفی فرایندهای لوی بدست می آید. این نوع فرایندها اثر تلاطم خوشه ای در واریانس بازده ها را نشان می دهند. با کمک روش تبدیل فوریه سریع فرم بسته ای از تابع چگالی احتمال به دست می آید و با استفاده از الگوریتم ترکیبی ازدحامی ذرات، جستجوی شبکه ای و روش تک متغیره پارامترهای مدل را برآورد می کنیم. در پایان نامه بعد از تحلیل داده های شاخص بورس تهران و محاسبه ارزش در معرض خطر نشان می دهیم که مدل تلاطم تصادفی پایدار ملایم شده نرمال در مقایسه با سایر مدل ها برازش مناسبی برای این نوع داده ها است.

واژگان کلیدی: الگوریتم بهینه سازی، تلاطم خوشه ای، فرایند لوی تبعی شده، آزمون کریستوفرسون

۱,۱ مقدمه

همواره فعالان بازارهای مالی به دلیل مواجهه با ریسک به دنبال یافتن راه کارهایی برای مدیریت آن و کنترل بیشتر بر ارزش سرمایه گذاری خود طی نوسانات بازار بوده اند. یکی از معیارها برای محاسبه ریسک، ارزش در معرض خطر است. روش واریانس - کواریانس یکی از شیوه های رایج برای محاسبه ارزش در معرض خطر است که فرض آن نرمال بودن بازدهی دارایی های مالی است. حال آنکه داده های مالی دارای ویژگی هایی از جمله چولگی*،

* Skewness

کشیدگی* و هم چنین تلاطم خوشه ای[‡] هستند که باعث می شود فرض نرمال بودن توزیع بازدهی دارایی های مالی صحیح نباشد. کار و وو [1] به منظور مدل سازی دقیق تر این نوع داده ها، فرایند های لوی زمان متغیر را معرفی کرده و نشان دادند که ساختار منعطفی را دارا می باشند. با بکار بردن این فرایند ها در مدل بندی می توان پرش، تلاطم های تصادفی و تلاطم های خوشه ای داده های مالی را مدل بندی کرد. از جمله کاندید های مناسب برای عامل زمان تبعی شده[§] در فرایند های لوی زمان متغیر، فرایندهای پایدار ملایم شده با پرش های نامتناهی[¶] است که توانایی پوشش دادن دم های سنگین و چولگی توزیع داده ها را دارند. همچنین گشتاور های مرتبه بالاتر را می توان برای آنها محاسبه نمود [5]. کار و وو [1] پیشنهاد دادند که اگر یک فرایند نوسان تصادفی را با یک فرایند لوی در نظر بگیریم می توانیم مدل هایی با کشیدگی و چولگی بیشتر و نیز نوسانات خوشه ای مدل سازی کنیم. این مدل ها چون با نوسانات تصادفی ترکیب می شوند، می توانند به نحو کاراتری الگو های پرش را مدل سازی کنند [2]. شوتنس و سایمنس [4] از فرایند های خود همبسته کاکس - اینگرسول - راس برای مدل بندی نوسانات تصادفی استفاده کردند. اگر فرایند کاکس - اینگرسول - راس با فرایند های پایدار ملایم شده مانند واریانس گاما، پایدار ملایم شده کلاسیک و پایدار ملایم شده نرمال را در نظر بگیریم سه دسته مدل های تلاطم تصادفی با این خانواده از فرایند های لوی به دست می آید.

۲ زمان متغیر کردن فرایند های لوی و محاسبه معیار ریسک

در این بخش به بیان زمان متغیر کردن فرایند های لوی و ارزش در معرض خطر مبتنی بر فرایند های تلاطم تصادفی می پردازیم. برای زمان متغیر نمودن فرایند های لوی بر مبنای توابع مشخصه، $(Y_t)_{t \geq 0}$ با استفاده از فرایند کاکس - اینگرسول - راس رابطه زیر را بیان می شود.

$$\mathbb{E}(\exp(iuX(Y_t))) = \phi(-i\psi_X(u)) \quad (1.2)$$

که در آن ϕ تابع مشخصه انتگرال فرایند کاکس - اینگرسول - راس که به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbb{E}(\exp(iuY_t)) = \phi(u, t, Y(0), k, \eta, \lambda) = A(t, u) \exp(B(t, u)Y(0))$$

$$A(t, u) = \frac{\exp\left(\frac{k^2 \eta t}{\lambda^2}\right)}{\left(\cosh\left(\frac{\gamma t}{2}\right) + \frac{k}{\gamma} \sinh\left(\frac{\gamma t}{2}\right)\right)^{\frac{2k\eta}{\lambda^2}}}$$

* Leptokurtosis

† Volatility Clustering

‡ Subordinated

§ Infinte Activity Tempered Stable

$$B(t, u) = \frac{2iu}{k + \gamma \cosh\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}, \quad \gamma = \sqrt{k^2 - 2\lambda^2 iu}$$

و $\psi_X(u)$ نمای مشخصه فرایند لوی $(X_t)_{t \geq 0}$ می باشد. توابع مشخصه فرایند های واریانس گاما، پایدار ملایم شده نرمال و پایدار ملایم شده کلاسیک به صورت زیر نمایش داده می شوند.

$$\begin{aligned} \psi_{VG}(u) &= C_1 \log \left(\frac{GM}{GM + (M - G)iu + u^2} \right) \\ \psi_{CTS}(u) &= \exp(tC_2 \Gamma(-\alpha)(\lambda_- - iu)^\alpha - \lambda_-^\alpha + (\lambda_+ - iu)^\alpha - \lambda_+^\alpha) \\ \psi_{NTS}(u) &= \exp \left(\frac{(1-\theta)t}{V\theta} \left(1 - \left(1 - \frac{(iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2})V}{1-\theta} \right)^\theta \right) \right) \end{aligned}$$

که در آن C_1 بیانگر کشیدگی، M و G بیانگر چولگی در فرایند واریانس گاما می باشند. پارامتر C در مدل پایدار ملایم شده کلاسیک تعیین کننده پارامتر مقیاس و پارامترهای λ_+, λ_- میزان تمایل دم ها به نقاط انتهایی را نشان می دهند. اگر $\lambda_+ > \lambda_-$ ($\lambda_+ < \lambda_-$) آن گاه توزیع پایدار ملایم شده کلاسیک به سمت چپ (راست) چوله است و اگر $\lambda_+ = \lambda_-$ توزیع متقارن است. μ چولگی را در تابع توزیع پایدار ملایم شده نرمال مشخص می کند به طوری که $\mu > 0$ چوله به راست و $\mu < 0$ چوله به چپ است. پارامتر $\theta \in (0, 1)$ تعیین کننده شکل توزیع پایدار ملایم شده نرمال و کشیدگی است، V تعیین کننده کشیدگی و σ پارامتر مقیاس است.

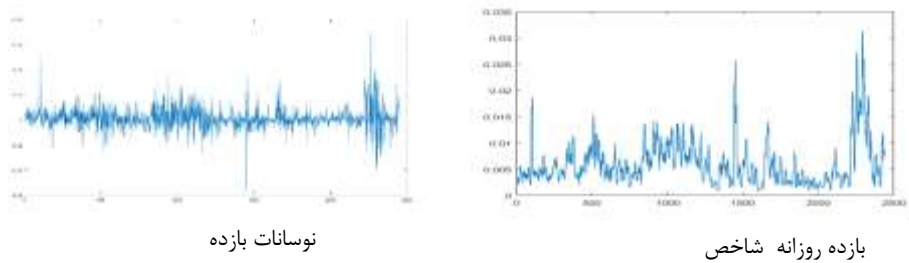
کیم و همکاران [3] برای محاسبه ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل های پایدار ملایم شده، تابع توزیع تجمعی را برای متغیر تصادفی X متعلق به خانواده پایدار ملایم شده به شکل زیر نمایش دادند.

$$F_X(x) = \frac{e^{\rho X}}{\pi} \Re \left\{ \int_0^\infty e^{-iux} \frac{\varphi_X(u + i\rho)}{\rho - iu} du \right\}$$

که در آن $\rho > 0$ ، $\Re$ نشان دهنده بخش حقیقی مقدار اعداد مختلط و φ تابع مشخصه فرایند تلاطم تصادفی است. به منظور محاسبه ارزش در معرض خطر $Var_\delta(X) = F_X^{-1}(\delta)$ از روش تبدیل فوریه سریع استفاده می کنیم و برای بکار بردن مدل های تلاطم تصادفی پارامتر های آن را برآورد می کنیم.

۳ تخمین پارامتر های مدل

برای تخمین پارامتر ها، ابتدا داده های شاخص کل بورس تهران از ابتدای سال ۱۳۸۸ تا انتهای سال ۱۳۹۷ در نظر گرفته و بازده روزانه و نوسانات آن را در نمودار نشان می دهیم.



نمودار ۱- ویژگی آماری بازده های روزانه بورس اوراق بهادار تهران

سپس ویژگی های آماری داده ها، از جمله مقادیر چولگی، کشیدگی و میانگین آنها به ترتیب ۰,۶۱۷۸، ۱۰,۲۵۸۴ و ۰,۰۰۱۳ را به دست می آوریم. چولگی و کشیدگی بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار نشان می دهند که این داده ها از توزیع نرمال پیروی نمی کنند. سپس از الگوریتم ترکیبی ازدحام ذرات، جستجوی شبکه ای و روش تک متغیره پارامتر های مدل را به دست می آوریم. نتایج حاصل از تابع حداکثر درستنمایی مدل های تلاطم تصادفی فرایند های لوی متفاوت در جدول های زیر بیان شده است.

G	M	K	η	λ	C_1
0.4326	0.7953	8.4832	12.4821	21.1689	12.4821

 جدول ۱,۳: برآورد پارامتر های مدل $SVVG$ بورس تهران

C_2	λ_-	λ_+	α	K	η	λ
0.7413	0.5147	7.2156	0.6431	18.3565	26.7448	5.5348

 جدول ۲,۳: برآورد پارامتر های مدل $SVCTS$ بورس تهران

K	η	λ	μ	θ	V	σ
0.8260	0.3365	6.9841	0.5473	0.00215	13.9958	0.0627

 جدول ۳,۳: برآورد پارامتر های مدل $SVNTS$ بورس تهران

جدول زیر نتایج آزمون کولموگروف اسمیرنف و اندرسون دارلینگ را برای پارامتر های تخمین زده شده نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود مدل $SVNTS$ دارای کمترین مقدار آماره اندرسون دارلینگ است.

	KS	$Pvalue$	AD
$SVVG$	0.0323	.0121	0.3651
	0.1459	0.0809	0.0256
$SVCTS$			
$SVNTS$	0.0219	0.1911	0.0816

جدول ۴,۳: نتایج حاصل از آزمون کولموگروف اسمیرنف و اندرسون دارلینگ بورس تهران

برای پس آزمون نمودن ارزش در معرض خطر، داده های شاخص بورس را به دو پنجره آزمون و تخمین طبقه بندی می کنیم به طوری که بازار شاهد یک رکود مالی در این دوره نیز باشد. جدول زیر نتایج پس آزمایی حاصل از روش کریستوفرسون را نشان می دهد که حاکی از برتری مدل *SVNTS* است.

Model	LR _{uc}	Pv _{uc}	LR _{ind}	Pv _{ind}	LR _{cc}	Pv _{cc}	Violation
<i>SVVG</i>	1.2217	0.2690	0.0682	0.7940	17.3467	0	5
<i>SVCTS</i>	0.4937	0.4823	0.8963	0.7796	9.2641	0.002	6
<i>SVNTS</i>	0.1031	0.7481	0.0421	0.8374	3.9251	0.0476	7

جدول ۵،۳: نتایج حاصل از پس آزمایی داده های بورس تهران به روش کریستوفرسون

مراجع

- [1] Carr, P., Wu, L. (2004). Time-changed Lévy processes and option pricing. *Journal of Financial economics*, 71 (1), 113-141.
- [2] Gong, X., Zhuang, X. (2017). Measuring financial risk and portfolio reversion with time changed tempered stable Lévy processes. *The North American Journal of Economics and Finance*, 40, 148-159.
- [3] Kim, Y.S., Rachev, S., Bianchi, M.L, Fabozzi, F.J. (2010). Computing VaR and AVaR in infinitely divisible distributions. *Probability and Mathematical Statistics*, 30 (2), 223-245.
- [4] Schoutens, W., Symens, S. (2003). The pricing of exotic options by Monte-Carlo simulations in a Lévy market with stochastic volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 6 (8), 839-864.
- [5] Zaeviski, T.S., Kim, Y.S., Fabozzi, F.J. (2014). Option pricing under stochastic volatility and tempered stable Lévy jumps. *International Review of Financial Analysis*, 31, 101-108.

OPTIMIZATION OF A DYNAMIC DUOPOLY SYSTEM USING OPTIMAL CONTROL STRATEGY

MEHRASA AYATOLLAHI^{1*}

¹ *Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.
m_ayatollahi@pnu.ac.ir*

ABSTRACT. This paper, deals with the application of mathematical control theory techniques of optimization in an economics problem. Here, we consider the optimization problem of a dynamic duopoly system that its model is stated by a first order ordinary differential equation. This system, consists of two agents such that each one has a distinct cost function that should be minimized. Our purpose is to solve this minimization problem by means of control theory techniques. To that end, it is necessary to reformulate the economic model into a linear control model. So, at the first step, by introducing suitable matrices, we reform the problem's model into a standard model of linear control system with quadratic cost functions. Afterwards, by stating a theorem, we propose an optimum control strategy to optimize the corresponding costs of the system and show that the optimal control law is unique and obtains from solving HJB partial differential equation.

Keywords: Control theory; Optimization; Duopoly problem; HJB equation.

Classification: 37N40; 93C05; 49J20.

1. INTRODUCTION

Various kinds of optimization problems appear in modern world such as science, social science, engineering and business. This variety of applications lead to development of optimization methods which are applicable for different subjects. Among these methods, control theory techniques for optimization seem to be useful tools for dealing with some dynamic economic problems. Application of control theory techniques in economics problems attracted considerable attention of authors in recent years; To study a few works on this subject, one can refer to [1],[2],[3] and the references therein.

In this paper, we consider a dynamic duopolistic optimization problem which is discussed in [4],[5], and propose an optimization method that stems from optimal control theory strategies. To that end, we consider the standard form of linear time invariant (LTI) control system stated by a first order ordinary differential equation known as state equation:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1)$$

where $A \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ and $B \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$ are system matrices, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is the state of the system (which can represent a set of economic variables) and $u(t) \in \mathbb{R}^m$ is the vector of variables that are used to control the system. For the most optimization problems, the linear system (1.1) is accompanied with an infinite time or finite time quadratic cost

* Speaker.

criterion of the following general form that should be minimized:

$$J = x^T(t)Q_Tx(t) + \int_0^T (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (1.2)$$

where Q and Q_T are symmetric matrices and R is a positive definite and symmetric matrix. One can obtain the minimum cost of the above mentioned problem by finding a continuously differentiable function:

$$V(t, x) = \min_u \{x^T(t)Q_Tx(t) + \int_0^T (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt\}, V(T, x) = Q_T(T, x) \quad (1.3)$$

which is the solution of a partial differential equation (PDE) known as Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation of following form [5]:

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} = \min_u [x^TQx + u^TRu + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}(Ax + Bu)] \quad (1.4)$$

In what follows, we introduce a suitable substitution in matrix form that reforms our economic duopolistic system into a standard LTI control system, and then, by using HJB partial differential equation, propose an optimum control strategy to optimize the corresponding costs.

2. MAIN RESULTS

As a dynamic duopoly problem we consider a market with only two sellers offering an identical product. By assuming that the rate of change of the market price is a function of the difference between the current market price and the price indicated by the linear demand function, [5] has modeled the problem as follows:

$$\dot{p}(t) = s\{a - (u_1(t) + u_2(t)) - p(t)\} \quad (2.1)$$

where $p(t)$ is the market price at time t , $s > 0$ is the adjustment speed parameter, $a > 0$ is a constant and $u_i(t) \geq 0$ is the output rate of company i , ($i = 1, 2$). The cost to be optimized for each company is:

$$J_i = \int_0^T e^{-rt} \{p(t)u_i(t) - c_i u_i(t) - \frac{1}{2}u_i^2(t)\} dt \quad (2.2)$$

where $c_i \in (0, a)$ are fixed parameters and $r > 0$ is the discount rate.

In order to use control theory optimization strategies, we should reform the above problem into LTI system representation. A simple substitution and calculation shows that the following choices for vectors and system matrices, reformulate our problem to the standard framework (1.1) with controllable pairs (A, B_i) and cost functions (1.2)

(for $i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t)] := \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}rt}p(t) & e^{-\frac{1}{2}rt} \end{bmatrix} \\
 v_i(t) &:= e^{-\frac{1}{2}rt}u_i(t) + [-1 \quad c]x(t), \text{ (for } i = 1, 2) \\
 A &:= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r - 3s & (a + 2c)s \\ 0 & -\frac{1}{2}r \end{bmatrix} \\
 B_i &:= \begin{bmatrix} -s \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ (for } i = 1, 2) \\
 Q_i &:= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}c^2 \end{bmatrix}, \text{ (for } i = 1, 2) \\
 R_i &:= \frac{1}{2}, \text{ (for } i = 1, 2)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Now, by applying the set of introduced transformations in (2.3) into (2.1) and (2.2), our problem reduces to:

$$\begin{aligned}
 \min J_i &= \int_0^T \{x^T(t)Q_i x(t) + v_i^T(t)R_i v_i(t)\} dt \\
 \text{s.t.} & \\
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 v_1(t) + B_2 v_2(t)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

The next theorem proposes the optimum control strategies v_i , which are obtained from the solution of (2.4)'s corresponding HJB equation.

Theorem 2.1. *The minimization problem (2.4) has a unique solution:*

$$v_i = -R_i^{-1}B_i^T S_i x, \text{ (for } i = 1, 2) \tag{2.5}$$

in which S_i is an $n \times n$ positive definite symmetric matrix resulted by solving the following differential ricati equation:

$$\dot{S}_i + S_i A + A^T S_i - S_i B_i R_i^{-1} B_i^T S_i + Q_i = 0, S_i(T) = 0 \tag{2.6}$$

Proof. Let $V_i(t, x)$, (for $i = 1, 2$) be the minimum cost of (2.4) that satisfies the boundary condition $V_i(T, x) = 0$. Under the assumption of continuous differentiability of V_i , we have the following HJB equation (resulted from (1.4)):

$$-\frac{\partial V_i(t, x)}{\partial t} = \min_{v_i} [x^T Q_i x + v_i^T R_i v_i + \frac{\partial V_i(t, x)}{\partial x} (Ax + B_1 v_1 + B_2 v_2)] \tag{2.7}$$

As it is not easy to compute $V_i(t, x)$ directly from (2.7), we consider a candidate solution to this HJB equation. Due to [6], for a quadratic cost function (for any arbitrary $t \in [0, T]$ and $x \in \mathbb{R}^n$) the minimum cost results from a quadratic solution to the corresponding HJB equation. So, we consider a quadratic candidate solution as follows:

$$V_i(t, x) = \frac{1}{2} x^T S_i(t) x \tag{2.8}$$

where $S_i(t)$ is an unknown $n \times n$ matrix. As (2.8) must satisfy its corresponding equation, substituting it into (2.7) yields:

$$-\frac{1}{2} x^T \dot{S}_i(t) x = \min_{v_i} [x^T Q_i x + v_i^T R_i v_i + x^T S_i(t) (Ax + B_1 v_1 + B_2 v_2)] \tag{2.9}$$

To carry out the minimization on the right hand side, we let:

$$\frac{d}{dv_i}[x^T Q_i x + v_i^T R_i v_i + x^T S_i(t)(Ax + B_1 v_1 + B_2 v_2)] = 0 \quad (2.10)$$

which yields:

$$v_i^* = -R_i^{-1} B_i^T S_i(t) x \quad (2.11)$$

To show that the resulting v_i^* minimizes the objective function, we consider the second derivative of the right hand side of (2.9) with respect to v_i :

$$\frac{d^2}{dv_i^2}[x^T Q_i x + v_i^T R_i v_i + x^T S_i(t)(Ax + B_1 v_1 + B_2 v_2)] = R_i \quad (2.12)$$

According to our assumption, R_i is a positive definite matrix, so, the resulting v_i^* in (2.11) is the optimum control strategy.

To determine $S_i(t)$, one can substitute (2.11) into (2.9), which leads to the following matrix differential ricati equation:

$$\dot{S}_i + S_i A + A^T S_i - S_i B_i R_i^{-1} B_i^T S_i + Q_i = 0, S_i(T) = 0 \quad (2.13)$$

To show uniqueness of v_i^* , notice that according to [7] positive definiteness of Q_i and controllability of (A, B_i) , (*for* $i = 1, 2$) guarantee the existence of a unique S_i satisfying in (2.13) and this implies uniqueness of v_i^* (because it is expressed in terms of S_i) and this completes the proof. $\square$

REFERENCES

1. A. A. ELSADANY , A. M. AWAD, *Dynamic and chaos control of a duopolistic Bertrand competitions under environmental taxes*, Ann. Oper. Res., 274 (2019), 211-240.
2. P. JOHNSON, N. J. FOSS, *Optimal strategy and business model: a control theory approach*, Managerial and Decision Economics, 37, (2016), 515-529.
3. T. A. WEBER, A. V. KRYIAZHIMSKIY, *Optimal control theory with applications in economics*, Cambridge MIT Press, 2011.
4. E. J. DOCKNER, S. JORGENSEN, N. VAN LONG, G. SORGER, *Differential games in economics and management science*, Cambridge University Press, 2000.
5. J. ENGWERDA, *LQ dynamic optimization and differential games*, John Wiley & Sons, 2005.
6. T. BASAR, G. J. OLSDER, *Dynamic noncooperative game theory*, Siam, 1999.
7. B. D. ANDERSON, J. B. MOORE, *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1990.

ON THE GEGENBAUER PSEUDOSPECTRAL METHOD FOR THE TIME FRACTIONAL BLACK–SCHOLES EUROPEAN OPTION PRICING MODEL

MOHAMMAD MAHDI IZADKHAH^{1*}

¹*Department of Computer Science, Faculty of Computer and Industrial Engineering,
Birjand University of Technology, Birjand, Iran.
izadkhah@birjandut.ac.ir*

ABSTRACT. The time fractional Black–Scholes model(TFBSM) is employed to price American or European call and put options on a stock paying on a non-dividend basis. In this paper, We examine pseudospectral method for numerical solution of TFBSM, based on Gegenbauer polynomials and Chebyshev spectral differentiation matrix . The presented method reduces TFBSM to a generalized Sylvester matrix equation, which can be solved by the global GMRES method.

Keywords: Time fractional Black–Scholes model, Gegenbauer pseudospectral method, generalized Sylvester matrix equation, global GMRES method.

Classification: 34K37, 97N50, 65M70.

1. INTRODUCTION

Recently, Wyss in [7] performed the pricing for the European call option by using a time fractional Black–Scholes model. Also, Cartea in [2] led a further investigation into this model and showed that the value of derivatives of the European style could be described by a partial-integral-differential equation and include a non-local time-to-maturity operator named the Caputo fractional derivative [6]. A discrete implicit numerical approach was proposed by Zhang et al. in [8] for European option pricing using the TFBSM with a temporal accuracy order of $2 - \alpha$ and a spatial accuracy of the second-order. Golbabai and Nikan [3] adopted the moving least-squares method for determining the approximate solution of the TFBSM. Currently, the following is suggested as the TFBSM corresponding to the value of an option model with final and boundary (barrier) conditions:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha C(S,t)}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S,t)}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} - rC(S,t) = 0, & (S,t) \in (0, \infty) \times (0, T) \\ C(0,t) = p(t), & C(\infty, t) = q(t), \\ C(S, T) = v(S), \end{cases} \quad (1.1)$$

where $0 < \alpha \leq 1$, T is expiry time, r is the risk-free rate, D the dividend rate and $\sigma(\geq 0)$ is the volatility of the returns from the holding stock price S , and $\frac{\partial^\alpha C(S,t)}{\partial t^\alpha}$ denotes a modified right Riemann–Liouville derivative [6] defined as follows:

$$\frac{\partial^\alpha C(S,t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{C(S,\eta) - C(S,T)}{(\eta-t)^\alpha} d\eta, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial C(S,t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

* Speaker.

For the special case $\alpha = 1$, the model (1.1) converts to the classical Black–Scholes model. Suppose $t = T - \tau$, for $0 < \alpha < 1$, we get

$$\frac{\partial^\alpha C(S, t)}{\partial \tau^\alpha} = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{C(S, T-\xi) - C(S, T)}{(\tau-\xi)^\alpha} d\xi.$$

So, the model (1.1) can be rewritten to the following expression:

$$\begin{cases} {}_0\mathcal{D}_\tau^\alpha U(x, \tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 - D) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - rU(x, \tau), \\ U(-\infty, \tau) = p(\tau), \quad U(\infty, \tau) = q(\tau), \\ U(x, 0) = u(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

by supposing $x = \ln S$, defining $U(x, \tau) = C(e^x, T - \tau)$, and $u(x) = v(e^x)$, where the fractional derivative is ${}_0\mathcal{D}_\tau^\alpha U(x, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{U(x, \eta) - U(x, 0)}{(\tau-\eta)^\alpha} d\eta$, $0 < \alpha < 1$.

To well approximate the numerical solution of the above-mentioned model, it is essential to work in a constrained interval. Therefore, we truncate the interval of variable x in (1.2) to a symmetric finite domain $(-1, 1)$ with homogeneous boundary conditions. In fact, an arbitrary (I_l, I_u) and nonhomogeneous boundary conditions can be transformed by using the change of variables and special transformation, respectively. Therefore, we consider the following dimensionless model:

$$\begin{cases} {}_0\mathcal{D}_\tau^\alpha U(x, \tau) = \gamma_1 \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + \gamma_2 \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - rU(x, \tau) + f(x, \tau), \\ U(-1, \tau) = U(1, \tau) = 0, \quad 0 < \tau < T, \\ U(x, 0) = u(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

where $\gamma_1 = \frac{1}{2}\sigma^2$ and $\gamma_2 = r - D - \gamma_1$. For the objectives of validation, a source term $f(x, \tau)$ is added. In the current paper, we approximate the solution of the TFBSM by the Gegenbauer pseudospectral method, that further information will provide in the next Sections.

2. GEGENBAUER POLYNOMIALS AND THEIR FRACTIONAL DERIVATIVES

The Gegenbauer polynomial of order n associated with the real parameter λ , $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$, denoted by $C_n^{(\lambda)}(t)$ in $[-1, 1]$, is given in [4] through the recurrence formula $C_{n+1}^{(\lambda)}(t) = \frac{2(\lambda+n)}{n+1}tC_n^{(\lambda)}(t) - \frac{2\lambda+n-1}{n+1}C_{n-1}^{(\lambda)}(t)$, $n \geq 1$, with $C_0^{(\lambda)}(t) = 1$, $C_1^{(\lambda)}(t) = 2\lambda t$, as the first terms. For practical use of Gegenbauer polynomials on the time interval of interest $\tau \in [0, T]$, let the shifted Gegenbauer polynomials $C_n^{(\lambda)}(\frac{2}{T}\tau - 1)$ be denoted by $G_n^{(\lambda)}(\tau)$, then $G_n^{(\lambda)}(\tau)$ can be obtained by

$$G_n^{(\lambda)}(\tau) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}(2\lambda)_{n+m}}{T^m m!(n-m)!(\lambda + \frac{1}{2})_m} \tau^m, \quad 0 \leq \tau \leq T. \quad (2.1)$$

where $(\theta)_n$ is the Pochhammer symbol, means $\theta(\theta+1)(\theta+2)\cdots(\theta+n-1)$ for $n \geq 1$ and $(\theta)_0 = 1$.

Theorem 2.1. Let $G_n^{(\lambda)}(\tau)$ for $0 \leq \tau \leq T$ as given in (2.1), and also suppose $\alpha > 0$, then

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{G_n^{(\lambda)}(\eta)}{(\tau-\eta)^\alpha} d\eta = \sum_{m=0}^n b_{n,m}^{(\alpha,\lambda)} \tau^{m-\alpha},$$

where

$$b_{n,m}^{(\alpha,\lambda)} = \frac{(-1)^{n-m}(2\lambda)_{n+m}}{T^m (n-m)!(\lambda + \frac{1}{2})_m \Gamma(m+1-\alpha)}.$$

Proof. See [5]. □

We can use a stable formula for computing coefficients $b_{n,m}^{(\alpha,\lambda)}$ when $0 < \alpha \leq 1$:

$$b_{n,m+1}^{(\alpha,\lambda)} = \frac{-(2\lambda + n + m)(n - m)}{T(\lambda + \frac{1}{2} + m)(m + 1 - \alpha)} b_{n,m}^{(\alpha,\lambda)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

where, we start with the following quantity:

$$b_{n,0}^{(\alpha,\lambda)} = \frac{(-1)^n (2\lambda)_n}{n! \Gamma(1 - \alpha)}.$$

3. GEGENBAUER PSEUDOSPECTRAL STRATEGY FOR TFBSM

Consider Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) nodes $z_{N,0}, \dots, z_{N,N}$, defined as $z_{N,j} = \cos(\frac{\pi j}{N})$ for $j = 0, 1, \dots, N$. Let $l_{N,j}(x)$, $j = 0, 1, \dots, N$, be the Lagrange polynomials based on CGL nodes, that are expressed as $l_{N,j}(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - z_{N,i}}{z_{N,j} - z_{N,i}}$, $j = 0, \dots, N$, with the Kronecker property $l_{N,j}(z_{N,k}) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$. Let $\phi_N(x)$ be a $(N + 1)$ -dimensional row vector function as $\phi_N(x) = [l_{N,0}(x), l_{N,1}(x), \dots, l_{N,N}(x)]$. For any integers N and M , we consider the approximate solution of the problem (1.3) in the form $V(x, \tau) = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=0}^M u_{j,k} l_{N,j}(x) G_k^{(\lambda)}(\tau)$ where $u_{j,k}$, $j = 1, \dots, N - 1$, $k = 0, \dots, M$, are the unknown coefficients to be determined. By defining the unknown vector function $\Theta(\tau) = [\theta_1(\tau), \theta_2(\tau), \dots, \theta_{N-1}(\tau)]^T$, with $\theta_j(\tau) = \sum_{k=0}^M u_{j,k} G_k^{(\lambda)}(\tau)$. We have $V(x, \tau) = \tilde{\phi}_N(x) \Theta(\tau)$, where $\tilde{\phi}_N(x)$ denotes the $(N - 1)$ -dimensional row-vector that obtained from $\phi_N(x)$ by removing the first and last components. So, we can approximate right hand side of the first equation in the problem (1.3) by

$$\left(\gamma_1 \phi_N(x) \tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(1)} + \gamma_2 \phi_N(x) \tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(2)} - r \tilde{\phi}_N(x) \right) \Theta(\tau) + f(x, \tau),$$

where $\mathbf{D}_{N+1}^{(m)}$ is the differentiation matrix of order $m = 1, 2$, given in [5], and the matrix $\tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(m)}$ obtained from $\mathbf{D}_{N+1}^{(m)}$ by removing the first and last columns. Let $\hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(1)}$ and $\hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(2)}$ are the matrices obtained from $\tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(1)}$ and $\tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(2)}$, by removing the first and the last rows, respectively.

We note that $\phi_N(x) \tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(1)} = \tilde{\phi}_N(x) \hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(1)} + \mathbf{r}^{(1)}(x)$ and $\phi_N(x) \tilde{\mathbf{D}}_{N+1}^{(2)} = \tilde{\phi}_N(x) \hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(2)} + \mathbf{r}^{(2)}(x)$. There is no need to compute the two terms $\mathbf{r}^{(1)}(x)$ and $\mathbf{r}^{(2)}(x)$, because these terms are eliminated during the collocation procedure with CGL points. Now, we consider approximate solution $V(x, \tau)$ for the TFBSM (1.3), and collocate the resulting equation in the internal grid points $z_{N,j}$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Note that, $e_p = \tilde{\phi}_N(z_{N,p})$ is the p -th row of the identity matrix $\mathbf{I}_{N-1}$. By the notation $[\mathbf{A}]_{(p)}$ for the p -th row of the matrix $\mathbf{A}$, we imply that

$${}_0\mathcal{D}_\tau^\alpha \theta_p(\tau) = \left(\gamma_1 [\hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(1)}]_{(p)} + \gamma_2 [\hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(2)}]_{(p)} - r e_p \right) \Theta(\tau) + f(z_{i,N}, \tau). \quad (3.1)$$

The vector function $\Theta(\tau)$ can be written as $\Theta(\tau) = \Lambda_u \Upsilon_M^\lambda(\tau)$, where Λ_u is a matrix of order $(N - 1) \times (M + 1)$ with unknown entries $(u_{j,k})$, for $1 \leq j \leq N - 1$, $0 \leq k \leq M$, and $\Upsilon_M^\lambda(\tau) = [G_0^{(\lambda)}(\tau), G_1^{(\lambda)}(\tau), \dots, G_M^{(\lambda)}(\tau)]^T$. Therefore, by Theorem 2.1 we get

$$\Lambda_u \Upsilon_M^{(\lambda,\alpha)}(\tau) = \left(\gamma_1 \hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(1)} + \gamma_2 \hat{\tilde{\mathbf{D}}}_{N+1}^{(2)} - r \mathbf{I}_{N-1} \right) \Theta(\tau) + F(\tau) + \Phi(\tau), \quad (3.2)$$

where $\Upsilon_M^{\lambda,\alpha}(\tau) = \left[b_{0,0}^{(\lambda,\alpha)} \tau^{-\alpha}, b_{1,0}^{(\lambda,\alpha)} \tau^{-\alpha} + b_{1,1}^{(\lambda,\alpha)} \tau^{1-\alpha}, \dots, \sum_{r=0}^M b_{M,r}^{(\lambda,\alpha)} \tau^{r-\alpha} \right]^T$, $\Phi(\tau) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} [u(z_{N,1}), u(z_{N,2}), \dots, u(z_{N,N-1})]^T$ for initial condition $u(x) = U(x, 0)$ of (1.3), and $F(\tau) = [f(z_{N,1}, \tau), f(z_{N,2}, \tau), \dots, f(z_{N,N-1}, \tau)]^T$. For determining the matrix of unknowns Λ_u , we collocate (3.2) in the real simple roots $\tau_{M,j} \in [0, T]$ of $G_{M+1}^{(\lambda)}(\tau)$ for $j = 0, 1, \dots, M$.

Finally, we have the generalized Sylvester matrix equation of the form

$$\Lambda_u \Upsilon_M^{\lambda,\alpha} + \mathbf{M} \Lambda_u \Upsilon_M^\lambda = \mathbf{C}, \quad (3.3)$$

where $\mathbf{M} = r\mathbf{I}_{N-1} - \gamma_1 \hat{\mathbf{D}}_{N+1}^{(1)} - \gamma_2 \hat{\mathbf{D}}_{N+1}^{(2)}$, and $\mathbf{C}$ is a $(N-1) \times (M+1)$ matrix defined as

$$\mathbf{C} = [F(\tau_{M,0}), F(\tau_{M,1}), \dots, F(\tau_{M,M})] + [\Phi(\tau_{M,0}), \Phi(\tau_{M,1}), \dots, \Phi(\tau_{M,M})].$$

Also,

$$\begin{aligned} \Upsilon_M^\lambda &= [\Upsilon_M^\lambda(\tau_{M,0}), \Upsilon_M^\lambda(\tau_{M,1}), \dots, \Upsilon_M^\lambda(\tau_{M,M})], \\ \Upsilon_M^{\lambda,\alpha} &= [\Upsilon_M^{\lambda,\alpha}(\tau_{M,0}), \Upsilon_M^{\lambda,\alpha}(\tau_{M,1}), \dots, \Upsilon_M^{\lambda,\alpha}(\tau_{M,M})]. \end{aligned}$$

We note that the generalized Sylvester matrix equation (3.3) has a unique solution if the matrix $\left((\Upsilon_M^{\lambda,\alpha})^T \otimes \mathbf{I}_{N-1} + (\Upsilon_M^\lambda)^T \otimes \mathbf{M} \right)$ is nonsingular, where $\otimes$ is the Kronecker product [1].

For solving the generalized Sylvester matrix equation (3.3), the restarted global GMRES (GIGMRES(k)) algorithm proposed in [1] can be used. We exploit Algorithm 1 to construct an F-orthonormal basis $V_1, V_2, \dots, V_k$ for the corresponding matrix Krylov subspace $\mathcal{K}_k(A, V_1)$, associated with the matrix equation (3.3). In Algorithm 1 $\|A\|_F$ is the Frobenius norm of the matrix A , defined by $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$. As mentioned in [1], to save memory and CPU-time requirements, the global GMRES method should be utilized in a restarted mode. The restarted Global GMRES algorithm is summarized as Algorithm 2.

Algorithm 1 Modified global Arnoldi algorithm

- 1: Choose an $(N-1) \times (M+1)$ matrix V_1 such that $\|V_1\|_F = 1$ ($V_1 = V/\|V\|_F$)
 - 2: For $j = 1, 2, \dots, k$ Do
 - : $\tilde{V} = V_j \Upsilon_M^{\lambda,\alpha} + \mathbf{M} V_j \Upsilon_M^\lambda$.
 - : For $i = 1, 2, \dots, j$ Do
 - : $h_{i,j} = \langle \tilde{V}, V_i \rangle_F$,
 - : $\tilde{V} = \tilde{V} - h_{i,j} V_i$,
 - : End Do
 - : $h_{j+1,j} = \|\tilde{V}\|_F$. If $h_{j+1,j} = 0$ then Stop
 - : $V_{j+1} = \tilde{V}/h_{j+1,j}$
 - : End Do
-

REFERENCES

1. A. BOUHAMIDI, K. JBILOU, *A note on thenumerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications*, Appl. Math. Comput., 206 (2008), pp. 687-694.
2. A. CARTEA, *Derivatives pricing with marked point processes using tick-by-tick data*, Quant. Financ., 13(1) (2013), pp. 111-123.

Algorithm 2 Global GMRES(k) algorithm

-
- 1: Choose X_0 , a tolerance ϵ and set $iter = 0$.
 Compute $R_0 = \mathbf{C} - X_0 \Upsilon_M^{\lambda, \alpha} - \mathbf{M} X_0 \Upsilon_M^\lambda$, $\beta = \|R_0\|_F$, and $V_1 = R_0/\beta$
 - 2: Construct the F -orthonormal basis $V_1, V_2, \dots, V_k$ by Algorithm 1
 - 3: Determine y_k as solution of the least square problem:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^k} \|\beta e_1 - \tilde{H}_k y\|_2$$
 - 4: Compute $X_k = X_0 + \mathcal{V}_k(y_k \otimes \mathbf{I}_{M+1})$
 - 5: Compute the residual R_k and $\|R_k\|_F$
 - 6: If $\|R_k\|_F < \epsilon \|R_0\|_F$ Then Stop
 - 7: else $X_0 = X_k$, $R_0 = R_k$, $\beta = \|R_0\|_F$, $V_1 = R_0/\beta$ and $iter = iter + 1$, Go to 2
-

3. A. GOLBABAI, O. NIKAN, T. NIKAZAD, *Numerical investigation of the time fractional mobile-immobile advection-dispersion model arising from solute transport in porous media*, Int. J. Appl. Comput. Math. 5(3) (2019), pp. 50, <https://doi.org/10.1007/s40819-019-0635-x>.
4. M.M. IZADKHAH, J. SABERI-NADJAFI, *Gegenbauer spectral method for time-fractional convection-diffusion equations with variable coefficients*, Math. Methods Appl. Sci. 38(15) (2015), pp. 3183-3194.
5. M.M. IZADKHAH, J. SABERI-NADJAFI, F. TOUOUNIAN, *An extension of the Gegenbauer pseudospectral method for the time fractional Fokker-Plank equation*, Math. Methods Appl. Sci., 41(4) (2018), pp. 1301-1315.
6. I. PODLUBNY, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
7. W. WYSS, *The fractional Black-Scholes equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., 3 (2017), pp. 51-62.
8. H. ZHANG, F. LIU, I. TURNER, S. CHEN, *The numerical simulation of the tempered fractional Black-Scholes equation for european double barrier option*, Appl. Math. Model. 40(11-12), (2016), pp. 5819-5834.

SYMMETRIC SUPPLY

BEHRUZ SADEQI*

Departement of Sciences, Marand Branch, Islamic Azad university, Marand, Iran.

behruz.sadeqi@gmail.com

b-sadeqi@marandiau.ac.ir

ABSTRACT. Implementing a set of microeconomic criteria, we develop price dynamics equations using a function of supply with key symmetry properties. The function of supply can be linear or nonlinear. The type of function determines the nature of the tail of the distribution based on the randomness in the supply and demand. For example, if supply and demand are normally distributed, and the function is assumed to be linear, then the density of relative price change has behavior x^{-2} for large x (i.e., large deviations). The exponent approaches -1 if the function of supply and demand involves a large exponent. The falloff is exponential, i.e., e^{-x} , if the function of supply is logarithmic.

Keywords: normally distributed, function of supply, symmetric.

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: G2, G4, D0, D4, D9

1. INTRODUCTION

Equations for price dynamics have generally fallen into one of two categories: (a) continuum approaches for asset markets that assume infinite arbitrage and stochastics without directly addressing supply and demand, (b) discrete approaches that examine the micro-structure of supply and demand.

The latter approach that is used widely in the mathematical finance community is expressed (see e.g., [1, 2]) in the continuum form as

$$P^{-1}dP = \mu dt + \sigma dW \quad (1.1)$$

where $P(t)$ is price at (continuous) time t , while W is Brownian motion, and μ and σ are the mean and standard deviation of the stochastic process. This approach marginalizes the issues involving supply and demand, modeling instead the price change as though (1.1) were an empirically observed phenomenon. While there is some empirical justification for this equation, there is large discrepancy between the implications for the frequency of unusual events [5]. In particular, if one measures σ for the S&P 500 then (1.1) would imply that the frequency of a 4% drop, for example, occurs about one in millions of days, instead of about 500 days, the observed frequency. This is a practical implication of the puzzle known as "fat tails" that refers to rare events occurring much more frequently than one might expect from classical results. More precisely, the density of relative price changes is observed to fall as a power law rather than exponentially.

The theoretical justification for equation (1.1) is also limited, and its widespread use is largely attributable to mathematical convenience [4].

* Speaker.

On the other hand, the approach developed by economists, i.e., (b), often called excess demand, is expressed as

$$p_t - p_{t-1} = d - s, \quad (1.2)$$

[6], with p_t as the price at discrete time, t , with supply, s , and demand, d , at time $t - 1$. Equation (1.2) must be regarded as a local equation that describes change at a particular set of values of d and s . Clearly, the price change will depend upon the magnitudes of d and s , and not just their differences. One can remedy this feature by normalizing $d - s$ by s , so that the right hand side of (1.2) is $(d - s)/s$. Similarly, the left hand side of (1.2) needs to be normalized, for example by dividing by p_{t-1} .

A third approach to price dynamics was built on this perspective to model an actively traded asset or commodity (see e.g. [3]). With active trading one can regard the buy/sell orders as flow. This led to the asset flow equations that were written in continuum form in 1990. The price equation has the form

$$\tau_0 \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = \frac{D(t) - S(t)}{S(t)}, \quad (1.3)$$

2. MAIN RESULTS

Here, τ_0 is a time constant that also incorporates a constant rate factor that can be placed in the right hand side. The difference in the two approaches is due to fact that (1.1) assumes infinite arbitrage. This means that there is always capital that can take advantage of mispricing of assets. In this way the deviation from realistic value will be small and random. Note that the equation (1.3) have the same value for the first term in the perturbation of $D = 1 + \delta$ and $S = 1 + \varepsilon$ about $\delta = \varepsilon = 0$. (i) The price derivative vanishes when $D = S$ so that price does not change in equilibrium. When $D > S$, prices rise, and vice-versa. (ii) The roles of D and S are anti-symmetric, in the sense that $D/S - S/D = -(S/D - D/S)$. (iii) A small change in the positive direction for supply, S , has the same effect as a small change in the negative direction for demand, D . (iv) When $D \rightarrow \infty$ (with S fixed) the relative price change diverges to ∞ ; when $S \rightarrow \infty$ (with D fixed) it diverges to $-\infty$.

We can consider a more general form by stipulating the requirements for a function $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ so $G(D/S)$ replaces the right hand side of

$$\frac{d \log P(t)}{dt} = G\left(\frac{D(t)}{S(t)}\right) \quad (2.1)$$

In addition one can readily verify that the following functions also satisfy this condition:

- (i) $G(x) = x^q - x^{-q}$ for $q > 0$;
- (ii) $G(x) = (x - x^{-1})^q$ for q an odd positive integer.

This last limit suggests that examining $\log(D/S)$ may yield an exponential decay. I.e. we use the equation

$$P^{-1} \frac{dP}{dt} = \log(D/S).$$

Letting $R := D/S$, we know that if D, S are normal, then $f_R(x) \sim x^{-2}$ so that

$$P\{\log R \leq x, R > 0\} = P\{R \leq e^x, R > 0\} = \int_0^{e^x} f(s) ds.$$

Taking the derivative, we have then

$$\begin{aligned}
f_{\log R}(x) &= \partial_x P \{ \log R \leq x, R > 0 \} \\
&= \partial_x \int_0^{e^x} f(s) ds = e^x f(e^x) \sim e^x (e^x)^{-2} = e^{-x}.
\end{aligned}$$

Hence, if D and S are bivariate normal with correlation less than 1, and the relative change in price is proportional to $\log D/S$, then the relative price change has a density that falls off as e^{-x} . Also, if p^{-1} is an odd positive integer, then $G(D/S) = [\log(D/S)]^{1/p}$ yields a decay of $x^{p-1}e^{-x^p}$.

Note that $G(x) = (\log x)^q$, with q an odd integer greater than 1, satisfies Condition G , while $G(x) = \log x$ satisfies only the conditions (i) – (iii). In place of (iv) and (v) it satisfies the symmetry condition $xG'(x) = 1$ for all $x \in \mathbb{R}^+$.

The results above establish a link between the relative price changes and the exponent of the fat tails through (2.1). One of the problems in empirically estimating the likelihood of rare events is that one would need a very long time history, but this often takes us back to a different time period that may be irrelevant. We can use our results to estimate the exponents by examining a much smaller data set and fitting G . To be precise, choose small δt and Δt so that

$$\delta t \ll \Delta t.$$

We approximate the left hand side of (2.1) as $P^{-1}\delta P/\delta t$ and obtain statistics for all intervals of δt within $(t, t + \Delta t)$. Then we can determine the function G that best fits the data. Using the results of Sections 3.2 and 3.4 one can then ascertain whether the decay in the density falls off exponentially (i.e., G is a logarithmic function) or with fat tails (with a specific exponent).

ACKNOWLEDGEMENT

The author is deeply grateful to the referee for careful reading of the original manuscript and valuable suggestions.

REFERENCES

1. Bachelier L. 1900. *Théorie de la spéculation*. Ann. Sci. École Norm. Sup. **17**, 21–86.
2. Black, F., Scholes, M. 1973. *The pricing of options and corporate liabilities*. J. Political Economy, **81**, 637–654.
3. Caginalp, G., Balevovich, D. 1999. *Asset flow and momentum: Deterministic and stochastic equations*. Phil. Trans. Royal Soc. A., **357**, 2119–2113.
4. Caginalp, C. and Caginalp, G., 2018. *The quotient of normal random variables and application to asset price fat tails*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **499**, 457–471.
5. Fama, E. 1965. *The Behavior of Stock-Market Prices*. J. Business, **38**, 34–105.
6. Plott, C., and Pogorelskiy, K. 2016. *Call market experiments: efficiency and price discovery through multiple calls and emergent Newton adjustments*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2602034> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2602034>

APPLICATION OF STEINE'S LEMMA IN MODERN FINANCE

ASIEH ABTAHI¹, *

¹ Department of mathematics and Statistics, Shiraz Branch, Islamic Azad university, Shiraz, Iran.
Asieh-abtahi@yahoo.com

ABSTRACT. When two random variable have a bivariate normal distribution, Stein's Lemma provides an expression for the covariance of the first variable with a function of the second. Stein's Lemma has many application in statistics and probability and it plays an important role in modern finance. Most of these applications were initially derived in a multivariate normal context. In finance, however, asset returns do not always display symmetry but may exhibit skewness. This paper introduced a unified multivariate skewed distribution and extend Stein's Lemma for two version of multivariate skewed distribution. The Capital Asset Pricing Model is derived for one version of this unified form. It is shown that, under another version of the unified form, the portfolios of all investors are expected utility maximizers are located on a single mean-variance skewness surface. *Keywords:* Stein's Lemma, Unified skewed distribution, portfolio se-

lection, Capital Asset Pricing Model.

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: At most 3 items.

1. INTRODUCTION

Stein's Lemma has shown to be very useful in various fields including statistics, probability, decision theory, finance and insurance (see Stein, (1986); Li,(1992)). Let $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ be multivariate normal vector. The equality,

$$E((X_i - \mu_i)h(X_j)) = Cov(X_i, X_j)E(h'(X_j)), \quad (1.1)$$

where $h(x)$ is a function having finite $E|h'(X_j)|$, is known as Steinn's Lemma. The covariance form of this lemma

$$Cov(X_i, h(X_j)) = Cov(X_i, X_j)E(h'(X_j)), \quad (1.2)$$

subject to $E[h(X_j)] < \infty$, has a special interest in the financial economics and in actuarial science for its important application to Capital Asset Pricing Models, where the vector $\mathbf{X}$ is considered as a set of returns of n securities. If the returns on risky financial assets follow a multivariate normal distribution Stein's Lemma greatly simplifies the task of portfolio selection.

It is well known that returns on financial assets are not normally distributed. They exhibits both skewness and kurtosis. For this reason, the construction of skewed multivariate distributions have received some considerable attention in the past few decades. There are so many proposals in construction of skewed distributions and it is worth to find an overall class which covers all of these proposals.

Abtahi and Towhidi(2013) introduce an overall unification of multivariate skewed distributions. This unified multivariate class of skewed distributions includes all of the

* Speaker.

multivariate skewed distributions in the literature. Their ideas for constructing a unified representation of multivariate skewed distributions are: (a) to separate the skewing mechanism from the symmetric distribution that serves as a starting point. A key advantage of skewing a symmetric distribution is that by doing so, it is possible to retain some of the properties of symmetric distribution, which are often well known. (b) to unify any skewed version of the same symmetric distribution by choosing a particular skewing mechanism(p), which represents and models the asymmetry.

Extensions of Stein's lemma to distributions that accommodate this feature are thus of interest. Adcock (2007, 2014) developed Stein Lemmas for various distributions that allow for asymmetry.

The structure of this paper is as follows. Section 2 summaries the unified multivariate skewed distribution and present the two skewing mechanisms which lead to an attractive model in finance. Section 3 contains the extension of Stein's Lemma for two version of unified form introduced in section 1. Section 4 shows how Stein's Lemma applied to portfolio selection and Capital Asset Pricing Models. The extension of the lemma shows that, under these distributions, investors who are expected utility maximizers will be located on a single mean-variance-skewness efficient surface, regardless of their choice of utility function.

2. UNIFIED MULTIVARIATE SKEWED DISTRIBUTION

A random vector $\mathbf{X}_{f,p}$ is said to have a unified multivariate skewed distribution with functional parameters f and p , if its *pdf* be of the form

$$s(\mathbf{x}|f, p) = f(\mathbf{x}) p[F(x_1), F(x_2|x_1), \dots, F(x_k|x_1, \dots, x_{k-1})]; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad (2.1)$$

where f is a symmetric multivariate *pdf* corresponding to a random vector $\mathbf{U}$ on $\mathbb{R}^k$ and p is a multivariate *pdf* on $[0, 1]^k$.

Note that for $i = 2, \dots, k$

$$F(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = F_{U_i}(x_i|U_1 = x_1, U_2 = x_2, \dots, U_{i-1} = x_{i-1}) \quad (2.2)$$

is the conditional cumulative distribution of $U_i|U_1 = x_1, U_2 = x_2, \dots, U_{i-1} = x_{i-1}$.

We say that $X_{f,p}$ has the unified multivariate skewed distribution, denoted by $X_{f,p} \sim UMSD(f, p)$, if its *pdf* is given by (2.1).

In the above definition the density p specifies a skewing mechanism. Different skewing mechanisms lead to different skewed symmetric distributions. Abtahi and Towhidi(2013) proved every continuous multivariate skewed density function $s(\cdot)$ can be expressed in the form of $UMSD(f, p)$. Here, we present the different skewing mechanisms which lead to different skewed distributions and show that all of these common-used distributions can be viewed as a $UMSD(f, p)$ by choosing an appropriate skewing mechanism p and a symmetric distribution f .

(a) Multivariate skew-normal distribution

The probability distribution of $\mathbf{X}$ is multivariate skew-normal with parameters μ, Σ, λ and τ , denoted as $X \sim MSN(\mu, \Sigma, \lambda, \tau)$. The probability density function of this distribution is

$$s(\mathbf{x}) = \phi_n(\mathbf{x}, \mu + \lambda\tau, \Sigma + \lambda\lambda^T) \Phi\left(\frac{\tau + \lambda^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)}{\sqrt{1 + \lambda^T \Sigma^{-1} \lambda}}\right) \frac{1}{\Phi(\tau)} \quad (2.3)$$

This density function is introduced by Azzalini and Dalla Valle's (1996) with a change of notation and generalization to accommodate a non zero value of τ . By defining $f(\mathbf{x}) =$

$f_U(x) = \phi_n(x)$ and $\Phi(x_i|x_1, \dots, x_{i-1}) = F_{U_i(x_i|U_1=x_1, \dots, U_{i-1}=x_{i-1})}$, the MSN can be stated as (2.1) with the skewing mechanism

$$p(v) = \Phi[\alpha'(g_1(v_1), g_2(v_1, v_2), \dots, g_k(v_1, v_2, \dots, v_k))' - (\mu_1, \dots, \mu_k)] \frac{1}{\Phi(\tau)} \quad (2.4)$$

where $\alpha' = \frac{\tau + \lambda' \Sigma^{-1}}{\sqrt{1 + \lambda' \Sigma^{-1} \lambda}}$ and $g_i(v_1, \dots, v_i)$ defined as follows

$$\begin{cases} x_1 = F^{-1}(v_1) = g_1(v_1) \\ x_2 = F^{-1}(v_2|g_1(v_1)) = g_2(v_1, v_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k = F^{-1}(v_k|g_1(v_1), \dots, g_{k-1}(v_1), \dots, v_{k-1})) = g_k(v_1, \dots, v_k) \end{cases}$$

and $F^{-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$ is the inverse of the cumulative distribution function of $(U_i|U_1 = x_1, \dots, U_{i-1} = x_{i-1})$

(b) Multivariate elliptical distributions Let $\mathbf{X}$ has a multivariate elliptical distribution, written as $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}_n(\mu, \Sigma, f_n)$, if the density exists, it has the following form:

$$s(x) = \frac{c_n}{\sqrt{|\Sigma|}} f_n\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right] \quad (2.5)$$

for some function f_n called density generator. This distribution can be stated as multivariate unified skewed distributions (see Abtahi and Towhidi(2013)).

3. EXTENSION OF STEIN,S LEMMA

The extension of Stein's Lemma for two version of multivariate unified skewed distribution is shown. The setup and method of proof follow Adcock (2007) and landsman (2006).

Theorem 3.1. (*Extension of Stein's Lemma for the Multivariate skew-normal distribution*) Let $\mathbf{X}$ be an n vector that has the distribution $MSN(\mu, \Sigma, \Lambda, \tau)$. For any scalar function $h(\mathbf{x})$ such that $\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ is continuous almost everywhere and $E\{\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_i}\} < \infty$, $i = 1, \dots, n$,

$$Cov(\mathbf{X}, h(\mathbf{X})) = (\Sigma + \lambda \lambda^T) E\{\nabla h(\mathbf{X})\} + \lambda [E_N h(\mathbf{X}) - E h(\mathbf{X})] \xi_1(\tau), \quad (3.1)$$

where $E\{\cdot\}$ denotes expectation taken over the MSN distribution defined above and $E_N\{\cdot\}$ denotes expectation taken over a multivariate normal distribution with mean vector μ and covariance matrix Σ . The vector $\nabla h(\mathbf{X})$ is the vector of first derivatives of $h(\cdot)$ with respect to the elements of $\mathbf{X}$.

Let $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}_n(\mu, \Sigma, f_n)$. Let μ^* and $\mathbf{Z}^*$ be, respectively, the associated measure and measurable map associated with the elliptical family. Let $I(h(\mathbf{Z}^*)) = \int_R h(z) d\mu^*$ and $\mathbf{X}_j^* = \sigma_j \mathbf{Z}^* + \mu_j, \sigma_j = \sqrt{\sigma_{jj}}, j = 1, \dots, n$.

Theorem 3.2. (*Extension of Stein,s lemma for the Multivariate elliptical distributions*) Suppose that vector $\mathbf{X}$ has finite expectations. Let function $h(x)$ be differentiable almost everywhere and $I(|h'(X_j^*)|) < \infty, j = 1, \dots, n$. Then

$$E((X_i - \mu_i)h(X_j)) = Cov(X_i, X_j)E(h'(X_j^*)), i, j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

4. MAIN RESULTS

4.1. Application To Portfolio Selection. A portfolio is a set of investment weight or proportions $\{w_i\}, i = 1, \dots, n$, defined such that an investor invests $100w_i$ of wealth in asset i . It is conventionally assumed that the weights sum to one. If the return on asset i is denoted by the random variable $R_i, i = 1, \dots, n$, then the return on the portfolio with weights w_i is $R_P = \sum_{i=1}^n w_i R_i = \mathbf{w}^T \mathbf{R}$, where $\mathbf{w}$ and $\mathbf{R}$ are vectors of length n containing the investment weights and asset returns, respectively. For portfolio selection, the investor conventionally chooses the vector of portfolio weights $\mathbf{w}$ to maximize the expected utility of portfolio return. For a general utility function, $U(R_P)$, the expected utility is, $\int \dots \int U(r_P) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \Xi(\mathbf{w})$ where $f(\mathbf{r})$ denote the density function of the multivariate probability distribution of the vector of return $\mathbf{R}$.

Following Kallberg and Ziemba(1983), the investor who is an expected utility maximizer solves, $\max_{(\mathbf{w})} \Xi(\mathbf{w}) - \eta(\mathbf{u}^T \mathbf{w} - \mathbf{1})$, where, $\mathbf{u}$ is a vector of length n containing ones and η is the Lagrange multiplier of the budget constraint. Ignoring this constraint for simplicity, the first order conditions for the weight for asset i are, $\frac{\partial \Xi}{\partial w_i} = \int \dots \int r_i U'(r_P) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ The right hand side of this last expression may be written as

$$E(R_i)EU'(R_P) + \int \dots \int r_i E[R_i]U'(r_P) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = Cov(R_i, U'(R_P)) + E(R_i)EU'(R_P)$$

When returns follow the multivariate skew normal distribution, application of the theorem 3.1 gives the vector of first order conditions for all assets.

$$\delta E(U') + (\boldsymbol{\Sigma} + \lambda \lambda^T) E(\nabla U') + \lambda \{E_N(U') - E(U)\} \xi_1(\tau)$$

where the vector $\nabla U'$ is given by $\nabla U' = \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{w} U''$. The first order conditions may re-expressed in terms of Θ , the covarianve of the returns as

$$\delta E(U') + \Theta \mathbf{w} E(U'') + \lambda [(E_N(U') - E(U)) \xi_1(\tau) - \lambda^T \mathbf{w} E(U'') \xi_2(\tau)]$$

This equation is the same for all investors, except for the three scalar quantities, which are functions of certain expected values of $U(\cdot)$ and $U'(\cdot)$. When all elements of the vector λ are equal to zero, asset returns have a multivariate normal distribution and Kallberg and Ziemba s(1983) result is obtained. That is, the portfolios of all investors who are expected utility maximizers are located on Markowitz mean-variance efficient frontier. Under the multivariate skew normal distribution, investors portfolios are located on the mean variance-skewness-efficient surface.

4.2. Application To Capital Asset Pricing Models. The Capital Asset Pricing Model (CAPM) describes the relationship between risk and expected return for assets, particularly stocks. CAPM is widely used throughout finance for pricing risky securities and generating expected returns for assets given the risk of those assets and cost of capital.

The main potential application of theorem 3.2, appears to be in Capital Asset Pricing Models, where the vector $\mathbf{R}$ is considered as a set of returns of n securities.

Assume a market with n securities and that all securities have returns that are jointly distributed as multivariate elliptical. Then, according to extension of Stein's Lemma, the expected rate of return for security j can be expressed as

$$E(R_j) = R_F + \beta_j [E(R_m) - R_F], \text{ for } j = 1, 2, \dots, n$$

where R_F is the risk-free rate, R_m is the market rate of return, and $\beta_j = \frac{Cov(R_j, R_m)}{Var(R_m)}$. For more details see Lansman(2006)..

Indeed, the expected return on asset k gives a linear function of the risk-free R_F and the expected return on the market. Investors expect to be compensated for risk and the time value of money. The risk-free rate in the CAPM formula accounts for the time value of money. The other components of the CAPM formula account for the investor taking

on additional risk. The beta of a potential investment is a measure of how much risk the investment will add to a portfolio that looks like the market. If a stock is riskier than the market, it will have a beta greater than one. If a stock has a beta of less than one, the formula assumes it will reduce the risk of a portfolio. A stock's beta is then multiplied by the market risk premium, which is the return expected from the market above the risk-free rate. The risk-free rate is then added to the product of the stock's beta and the market risk premium. The result should give an investor the required return or discount rate they can use to find the value of an asset. The goal of the CAPM formula is to evaluate whether a stock is fairly valued when its risk and the time value of money are compared to its expected return.

REFERENCES

1. A. ABTAHI AND M. TOWHIDI, *The new unified representation of multivariate skewed distribution*, Statistics., 47,1 (2013), 126-140.
2. C. J. ADCOCK, *Extensions of Stein's Lemma for the Skew-Normal Distribution*, Communication in Statistics. Theory and Methods, 36(9), (2007), 1661-1672.
3. C. J. ADCOCK, *Mean-variance-skewness efficient surfaces, Stein's lemma and the multivariate extended skew-Student distribution*, European Journal of Operational Research, 234(2),(2014),392-401.
4. J. G. KALLBERG AND W. T. ZIEMBA, *Comparison of Alternative Functions in Portfolio Selection Problems*, management Science, 11 (1983), 1257-1276.
5. Z.LANDSMAN, *On the generalization of Stein's Lemma for elliptical class of distributions*, Statist. Probab. Lett, 76 (2006), 1012-1016.
6. J. S. LIU, *Siegel's formula via Stein's identities*, Statist. Probab. Lett, 21 (1994), 247-251.
7. C. M. STEIN, *Approximate computation of expectations*, Lecture Notes-Monograph, 7 (1986), 1-164.

A ROBUST NUMERICAL METHOD FOR MULTI-ASSET OPTION PRICING

SIMA MASHAYEKHI*, SEYED NOUROLLAH MOUSAVI

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Arak University, Arak 38156-8-8349, Iran.

s-mashayekhi@araku.ac.ir

n-mousavi@araku.ac.ir

ABSTRACT. In this work, we numerically solve a multi-asset European call option with the finite difference method (FDM) and take the advantages of the antithetic Monte Carlo simulation as a variance reduction technique in the end point of the domain, and the linear boundary condition has been implemented in other boundaries. We also apply the grid stretching transformation to make a non-equidistance discretization with more nodal points around the strike price which is the non-smooth point in the payoff function to reduce the numerical errors around this point and have more accurate results. Superiority of our method (GSMCBC) will be demonstrated by comparison with the standard finite difference scheme with the equidistance discretization and the linear boundary conditions (LBC) and also combination of the LBC scheme with the standard Monte Carlo simulation at the end point of the domain (MCBC). Furthermore, the root mean square errors (RMSE) of these three schemes in the most interesting region which is around the strike price, have been compared.

Keywords: Finite difference scheme, Black-Scholes equation, Monte Carlo simulation, Operator splitting method

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: 65M06, 91G60

1. INTRODUCTION

The well-known Black-Scholes (B-S) equation [1] for multi-asset option pricing is the following d-dimensional partial differential equation (PDE):

$$\frac{\partial v(\mathbf{S}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j \frac{\partial^2 v(\mathbf{S}, t)}{\partial S_i \partial S_j} + r \sum_{i=1}^d S_i \frac{\partial v(\mathbf{S}, t)}{\partial S_i} - r v(\mathbf{S}, t) = 0, \quad (1.1)$$

for $(\mathbf{S}, t) \in (0, \infty)^d \times [0, T)$,

with the final condition $v(\mathbf{S}, T) = v_T(\mathbf{S})$, where $v(\mathbf{S}, t)$ is the value of the option in the multi-asset $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_d)$ at time t . T is the maturity time, σ_i is the volatility of underlying asset S_i , ρ_{ij} is the correlation of i -th and j -th assets, and r is the risk-free interest rate.

However most of financial derivatives specially linear ones have analytical solutions, but they are not often easy to implement. Therefore numerical methods would be suitable way to find numerical approximations of them. Various numerical methods have been considered for one and multi-dimensional Black-Scholes equations. For instance mesh free methods [9], high-order option pricing schemes [10, 11], alternating direction implicit schemes [2, 6] and etc. One of the common and easy to implement numerical methods for

* Speaker.

solving PDEs is the FDMs. The main problem of FDMs for pricing multi-asset options with non-linear payoffs is significant numerical errors around their boundary points and also the strike price (K). Several works have been done to achieve an accurate numerical solution of multi-asset options. Jeong et.al [8] proposed a useful remedy to reduce numerical error around $\mathbf{S}_{max}$ by using the standard Monte Carlo simulation at this boundary point. Here we improved their methodology by using the antithetic variate method in Monte Carlo simulation [3], and furthermore a space transformation[12] that causes more nodal points around the strike price to get more robust solution.

2. NUMERICAL SOLUTION

Two-dimensional B-S equation with two assets $x = S_1$ and $y = S_2$ is the following PDE:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma_x^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sigma_x \sigma_y \rho_{xy} xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + ry \frac{\partial u}{\partial y} - ru, \quad (2.1)$$

for $(x, y, \tau) \in \Omega \times [0, T]$,

with the initial condition $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ which is equation 1.1 with $d = 2$ and a variable changing $\tau = T - t$ in the truncated domain $\Omega = (0, x_{max}) \times (0, y_{max})$. Suppose $\mathcal{L}_{BS}$ is the operator of the right hand side of equation 2.1. Now we discretize the time interval with a uniform time step $\Delta\tau = T/N_\tau$ and the following grid stretching transformation that makes non-uniform space discretization of interval $[x_{min}, x_{max}]$ with more nodal points around K :

$$x = K \left(1 + \frac{\sinh(c_2 w + c_1(1 - w))}{15} \right) \quad \text{for } w \in [0, 1], \quad (2.2)$$

where $c_1 = \text{arcsinh}(15(x_{min} - K)/K)$ and $c_2 = \text{arcsinh}(15(x_{max} - K)/K)$. Therefore $x(w) \in [x_{min}, x_{max}]$ for any $w \in [0, 1]$. At first for the x -direction, we discretize the interval $[0, 1]$ uniformly to N_x sub-intervals, then we use the transformation 2.2 in $[0, x_{max}]$ and define $h_i^x = x_{i+1} - x_i$ for $i = 0, \dots, N_x - 1$. we discretize the interval $[0, y_{max}]$ to N_y sub-intervals similarly. Let for $i = 0, \dots, N_x$, $j = 0, \dots, N_y$ and $n = 0, \dots, N_\tau$ define $u_{ij}^n \approx u(x_i, y_j, \tau_n)$ and use the operator splitting method for solving Equation 2.1 with the following two discrete fractional time step equations[4]:

$$\frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^n}{\Delta\tau} = (\mathcal{L}_{BS}^x u)_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau} = (\mathcal{L}_{BS}^y u)_{ij}^{n+1}, \quad (2.4)$$

which are defined by

$$(\mathcal{L}_{BS}^x u)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\sigma_x x_i)^2}{2} D_{xx} u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} x_i y_j}{2} D_{xy} u_{ij}^n + r x_i D_x u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{r}{2} u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

$$(\mathcal{L}_{BS}^y u)_{ij}^{n+1} = \frac{(\sigma_y y_j)^2}{2} D_{yy} u_{ij}^{n+1} + \frac{\sigma_x \sigma_y \rho_{xy} x_i y_j}{2} D_{xy} u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + r y_j D_y u_{ij}^{n+1} - \frac{r}{2} u_{ij}^{n+1}, \quad (2.6)$$

where the derivatives approximations are defined as

$$D_{xx} u_{ij} \approx \frac{2}{h_{i-1}^x (h_{i-1}^x + h_i^x)} u_{i-1,j} - \frac{2}{h_{i-1}^x h_i^x} u_{ij} + \frac{2}{h_i^x (h_{i-1}^x + h_i^x)} u_{i+1,j}, \quad (2.7)$$

$$D_{xy} u_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h_i^x h_j^y + h_{i-1}^x h_j^y + h_i^x h_{j-1}^y + h_{i-1}^x h_{j-1}^y}, \quad (2.8)$$

$$D_x u_{ij} \approx -\frac{h_i^x}{h_{i-1}^x(h_{i-1}^x + h_i^x)} u_{i-1,j} + \frac{h_i^x - h_{i-1}^x}{h_{i-1}^x h_i^x} u_{ij} + \frac{h_{i-1}^x}{h_i^x(h_{i-1}^x + h_i^x)} u_{i+1,j}, \quad (2.9)$$

By substituting above derivatives in Equation 2.3, the following equations will be achieved:

$$\alpha_i u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = \beta_i u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (2.10)$$

where α_i , β_i and γ_i are the lower, main and upper diagonal of the tridiagonal matrix of the above system of equations and f_{ij} is the constant vector of the system which are defined as:

$$\alpha_i = -\frac{(\sigma_x x_i)^2}{h_{i-1}^x(h_{i-1}^x + h_i^x)} + \frac{r x_i h_i^x}{h_{i-1}^x(h_{i-1}^x + h_i^x)}, \quad (2.11)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{(\sigma_x x_i)^2}{h_{i-1}^x h_i^x} - \frac{r x_i (h_i^x - h_{i-1}^x)}{h_{i-1}^x h_i^x} + \frac{r}{2}, \quad (2.12)$$

$$\gamma_i = -\frac{(\sigma_x x_i)^2}{h_i^x(h_{i-1}^x + h_i^x)} - \frac{r x_i h_{i-1}^x}{h_i^x(h_{i-1}^x + h_i^x)}, \quad (2.13)$$

$$f_{ij}^n = \frac{1}{2} \sigma_x \sigma_y \rho_{xy} x_i y_j D_{xy} u_{ij}^n - \frac{1}{\Delta\tau} u_{ij}^n, \quad (2.14)$$

for fixed j and zero Dirichlet boundary condition at $(x, y) = (0, 0)$, antithetic Monte Carlo simulation at $(x, y) = (x_{max}, y_{max})$ and the linear boundary condition at other boundaries for instance $u_{0j} = 2u_{1j} - u_{2j}$, for $j = 1, \dots, N_y$ and similarly for $u_{N_x,j}$, u_{i0} and u_{i,N_y} . The solution of above system of equations will be the vector $u_{1:N_x,j}^{\frac{1}{2}}$. Similarly by substituting the derivatives approximations with respect to y in 2.4, we have another system of equations to solve for finding value of the two-asset option.

2.1. Two-Asset European Call Option. Now we consider a two-asset European call option with the payoff $u(x, y, 0) = \max\{\max\{x, y\} - K, 0\}$, $K = 100$, $\sigma_x = \sigma_y = 0.3$, $r = 0.03$, $\rho_{xy} = 0.5$ and $T = 1$. Then the exact analytical solutions of the option [5] will be compared to the numerical solutions. Figure 1 shows the comparison of the numerical solutions of two-asset Black-Scholes equation for an European call option with different boundary conditions and space discretization: LBC, MCBC and GSMCBC with $N = 10^6$ replications for the standard and antithetic Monte Carlo simulation. Now in Table 1 we compare the root mean square error (RMSE) of LBC, MCBC and GSMCBC in the most interesting region $\Omega_e = [0.7K, 1.3K] \times [0.7K, 1.3K]$ with different domain sizes $(x_{max}, y_{max}) = (L, L)$ and $N_x = N_y = L$ at $t = 0$.

TABLE 1. RMSE with different domain sizes in the region Ω_e .

L	150	200	250	300
LBC	4.0983	2.8751	0.5941	0.0936
MCBC	0.3189	0.0810	0.0095	0.0031
GSMCBC	0.1933	0.0163	0.0030	0.0024

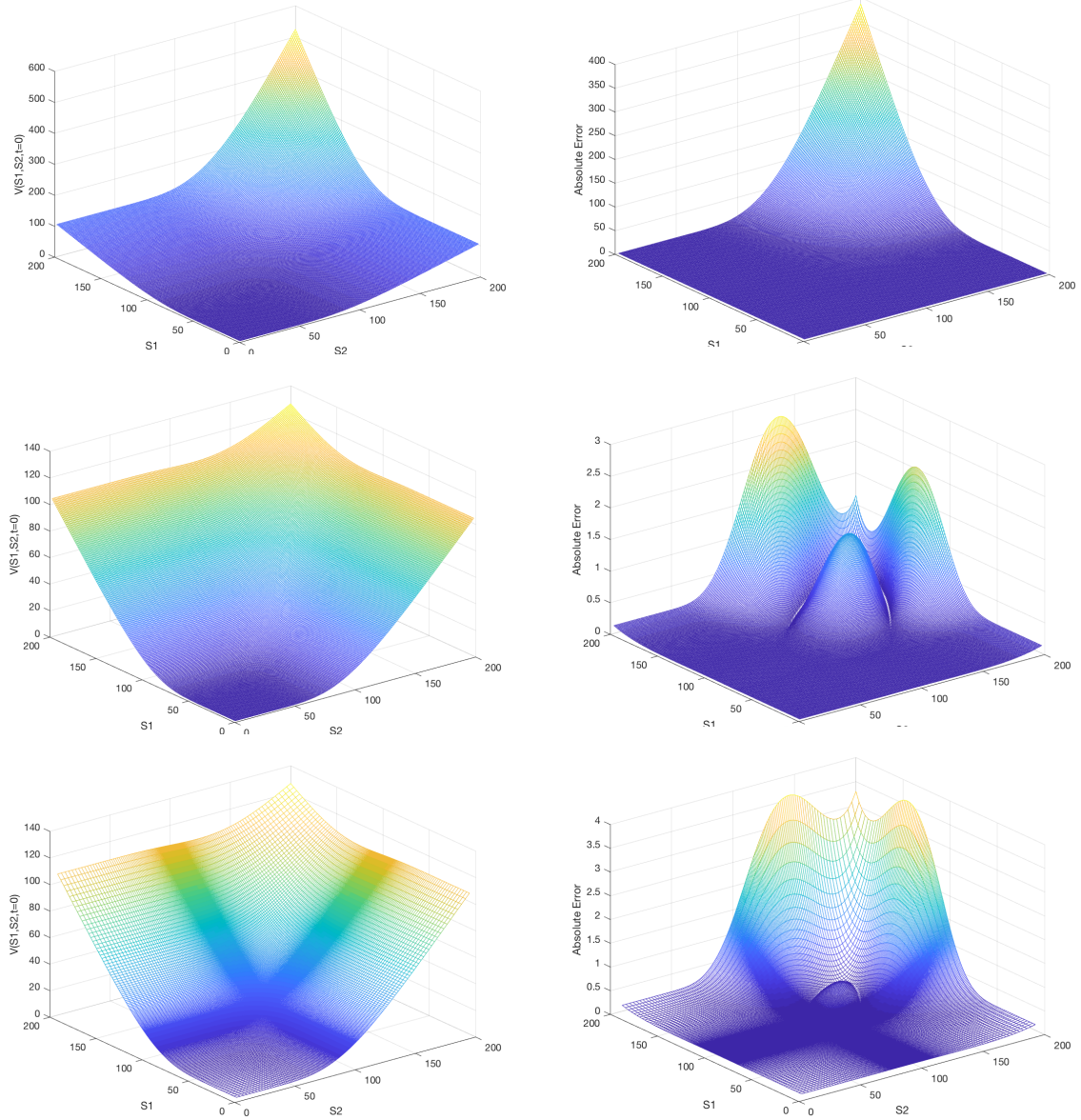


FIGURE 1. Two-asset call option curves(left figures) and error curves(right figures) at $t = 0$ with $(x_{max}, y_{max}) = (200, 200)$, $N_x = N_y = 200$ and $\Delta\tau = \frac{0.5}{365}$ for LBC (top curves), MCBC (middle curves) and GSMCBC (bottom curves).

3. CONCLUSION

We applied the FDM for solving numerically two-dimensional B-S equation with different space discretization and boundary conditions. Numerical experiments illustrated that by applying the Monte Carlo simulation for the end point of the space domain and discretization with grid stretching to put more nodal points around the non-smooth point of the payoff function, we obtained more accurate numerical solution of a two-asset European call option. These remedies can be implemented for higher dimensional B-S equations and other finanacial derivatives.

REFERENCES

1. F. BLACK AND M. SCHOLES, *The Pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973), 637–654.
2. W. CHEN AND S. WANG, *A 2nd-order ADI finite difference method for a 2D fractional Black–Scholes equation governing European two asset option pricing*, Math. Comput. Simul., 171 (2020), 279–293.
3. G. H. CHOE, *Stochastic analysis for finance with simulations*, Universitext, Springer, 2016.
4. D. J. DUFFY, *Finite difference methods in financial engineering: A partial differential equation approach*. New York, Wiley, 2006.
5. E. G. HAUG, *The complete guide to option pricing formulas*, New York: McGraw-Hill Companies, 2007.
6. C. HENDRICKS, C. HEUER, M. EHRHARDT AND M. GUNTHER, *High-order ADI finite difference schemes for parabolic equations in the combination technique with application in finance*, J. Comput. Appl. Math., 316, (2017) 175–194.
7. D. JEONG, AND J. KIM, *A comparison study of ADI and operator splitting methods on option pricing models* Journal of Computational and Applied Mathematics, 247, (2013), 162–171.
8. D. JEONG, M. YOO, C. YOO, AND J. KIM, *A hybrid monte carlo and finite difference method for option pricing*, Computational Economics 53, no. 1 (2019), 111–124.
9. L. KHODAYARI AND M. RANJBAR, *A computationally efficient numerical approach for multi-asset option pricing*, Int. J. Comput. Math., 96, (2019), 1158–1168.
10. M.N. KOLEVA, W. MUDZIMBABWE AND L.G. VULKOV, *Fourth-order compact finite schemes for a parabolic-ordinary system of European option pricing liquidity shock model*, Numer. Algorithms, 74, (2017), 59–75.
11. B.J. MCCARTIN AND S.M. LABADIE, *Accurate and efficient pricing of vanilla stock options via the Crandall–Douglas scheme*, Appl. Math. Comput., 143, (2003) 39–60.
12. D. TAVELLA AND C. RANDALL, *Pricing Financial Instruments, the Finite Difference Method*, Wiley, New York, 2000.

NUMERICAL METHOD FOR OPTION PRICING MODEL

MOHAMMAD MEHDIZADEH KHALSARAEI^{1*}, ALI SHOKRI², PARI KHAKZAD³

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
mehdizadeh@maragheh.ac.ir

² Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
shokri2090@gmail.com

³ Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
pari.khakzad@yahoo.com

ABSTRACT. Analytical solution of generalized Black-Scholes models are not available, therefore, numerical simulations are of fundamental importance in gaining some useful insights into the solutions. Numerical methods based on standard finite difference approach, most of the time the essential qualitative properties of the solution are not transferred to the numerical solution. Therefore, this might result in a calamitous erroneous outcome. One way to overcome this disadvantage is to use nonstandard finite difference methods. In this paper, we propose a non-standard finite difference method for solving the generalized Black-Scholes equation. In constructing the new scheme, we use a nonlocal approximation in the reaction term of the generalized Black-Scholes equation combined with an implicit time step technique. The new scheme is positivity preserving, conditionally stable, consistent, and the order of the scheme with respect to the space variable is two. Numerical investigations were conducted to validate these results. Furthermore, the obtained results are more accurate than other existing results in the literature.

Keywords: Generalized Black-Scholes equation, Option valuation, Nonstandard finite difference, Positivity.

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: At most 3 items.

1. INTRODUCTION

We consider the generalized Black-Scholes model as given in [1]:

$$-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2(x, t)x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r(t)x\frac{\partial v}{\partial x} + r(t)v = 0, \quad (x, t) \in (0, S_{\max}) \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$v(x, T) = \psi_\varepsilon(x - K), \quad x \in [0, S_{\max}], \quad (1.2)$$

$$v(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

$$v(S_{\max}, t) = S_{\max} - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}, \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

where the function ψ_ε is defined as follows

$$\psi_\varepsilon(y) = \begin{cases} y & \text{if } y > \varepsilon, \\ c_0 + c_1y + \dots + c_9y^9 & \text{if } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{if } y < -\varepsilon, \end{cases}$$

* Speaker.

for a sufficiently small $\varepsilon > 0$, $\psi_\varepsilon(y)$ satisfying

$$\psi_\varepsilon(-\varepsilon) = \psi'_\varepsilon(-\varepsilon) = \psi''_\varepsilon(-\varepsilon) = \psi'''_\varepsilon(-\varepsilon) = \psi_\varepsilon^{(4)}(-\varepsilon) = 0,$$

$$\psi_\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \psi'_\varepsilon(\varepsilon) = 1, \quad \psi''_\varepsilon(\varepsilon) = \psi'''_\varepsilon(\varepsilon) = \psi_\varepsilon^{(4)}(\varepsilon) = 0.$$

By using these conditions one can easily find that

$$c_0 = \frac{35}{256}\varepsilon, \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{35}{64\varepsilon}, \quad c_4 = -\frac{35}{128\varepsilon^3},$$

$$c_6 = \frac{7}{64\varepsilon^5}, \quad c_8 = -\frac{5}{256\varepsilon^7}, \quad c_3 = c_5 = c_7 = c_9 = 0.$$

Equation (1.1) is a partial differential equation used for pricing options. The function $v(x, t)$ is the European call option price with asset price x and time t . T is the maturity, K is the price of strike, $r(t)$ is the risk-free interest rate, and $\sigma(x, t)$ is the volatility function of the underlying asset and time.

In this paper, we propose a non-standard finite difference method for solving the generalized Black-Scholes equation. In the proposed NSFD scheme, we use a nonlocal approximation in the reaction term of the generalized Black-Scholes equation combined with an implicit time step technique. The method is conditionally stable, positivity preserving and of second-order of convergence with respect to the space variable.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2, we propose a NSFD scheme for model (1.1)-(1.4). In Section 3, the numerical results obtained from the new method are presented and compared with the results in [1].

2. CONSTRUCTION OF THE NEW SCHEME

By using the strategy of nonstandard discretization methods[2, 3, 4, 5], we consider the forward difference for $\frac{\partial v}{\partial t}$, the centered differences for $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, and $a(V_{i+1}^j + V_{i-1}^j) + (\frac{1}{2} - a)(V_{i+1}^{j+1} + V_{i-1}^{j+1})$ to approximate the v in the reaction term. Thus, we propose a new discretization scheme for (1.1) given by

$$\begin{aligned} & -\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{2}(\sigma_i^j)^2 x_i^2 \frac{V_{i-1}^j - 2V_i^j + V_{i+1}^j}{h^2} - r^j x_i \frac{V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{2h} \\ & + r^j \left(a(V_{i+1}^j + V_{i-1}^j) + \left(\frac{1}{2} - a\right)(V_{i+1}^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}) \right) = 0, \end{aligned}$$

where V_i^j , σ_i^j and r^j are approximations of $v(x, t)$, $\sigma(x, t)$ and $r(t)$, respectively at the grid point (x_i, t_j) with $x_i = ih$, $t_j = j\Delta t$ ($i = 1, \dots, N-1$; $j = 0, \dots, M-1$) and $h = \frac{S_{\max}}{N}$, $\Delta t = \frac{T}{M}$.

The above discretization may be written for each j in a matrix form as:

$$P^j V^j + b^j = Q^j V^{j+1} + b^{j+1}, \quad (2.1)$$

where $V^j = (V_1^j, \dots, V_{N-1}^j)^T$ and $V^{j+1} = (V_1^{j+1}, \dots, V_{N-1}^{j+1})^T$ are vectors containing approximations to v at time levels t_j and t_{j+1} , respectively. Also, b^j and b^{j+1} are column vectors that contain the known boundary-values and zeros, and P^j and Q^j are tridiagonal

matrices of the form:

$$P^j = \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_i^j x_i}{h} \right)^2 + \frac{r^j x_i}{2h} + ar^j; \frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\sigma_i^j x_i}{h} \right)^2; -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_i^j x_i}{h} \right)^2 - \frac{r^j x_i}{2h} + ar^j \right\}, \quad (2.2)$$

$$Q^j = \left\{ -\left(\frac{1}{2} - a\right)r^j; \frac{1}{\Delta t}; -\left(\frac{1}{2} - a\right)r^j \right\}. \quad (2.3)$$

Theorem 2.1. *If for $i = 1, \dots, N - 1; j = 0, \dots, M - 1$ it is*

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{\left(\frac{\sigma_i^j x_i}{h} \right)^2 - \frac{r^j x_i}{h}}{2r^j}, \quad (2.4)$$

then, the method given in (2.1) is positivity preserving.

Theorem 2.2. *The proposed method is conditionally stable, convergent and the local truncation error is an $O(h^2, \Delta t)$.*

3. NUMERICAL RESULTS

In this section, we give some numerical examples to confirm the theoretical results. The results of our method are compared with the results obtained in [1]. As in [1], we have used the approximate solution obtained for $N = 2048$ and $M = 1024$ as a reference solution on the mesh points. We compute the maximum error as follows

$$E_{N,M} = \max_{i,j} |V_{ij}^{N,M} - \bar{V}(x_i, t_j)|,$$

where $\bar{V}(x, t)$ is a linear interpolation of the approximated solution $V^{2048,1024}$ to get solutions at other points. Also, we have used the following formula to compute the convergence rate

$$\bar{R}_{N,M} = \frac{\log \left(\frac{E_{N,M}}{E_{2N,M}} \right)}{\log 2}.$$

Example 3.1. In this example, we compare the NSFD method with the method by Cen and Le [1] to solve the generalized Black-Scholes equation (1.1)-(1.4) with $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.2(1 + te^{-x})$, $K = 25$, $S_{\max} = 100$ and $\varepsilon = 10^{-4}$.

TABLE 1. Comparison of errors and rates of convergence obtained by NSFD method and the method by Cen and Le [1] for Example 3.1.

$M = 1024$		N=128	N=256	N=512	N=1024
Results for NSFD method	$E_{N,M}$	3.3353e-2	1.4481e-2	5.3031e-3	1.2522e-3
	$R_{N,M}$	1.204	1.449	2.082	-
Results for Cen and Le [1]	$E_{N,M}$	6.8027e-2	3.1258e-2	1.2588e-2	3.4189e-3
	$R_{N,M}$	1.122	1.312	1.880	-

Example 3.2. In the last example, we compare the NSFD method with the method by Cen and Le [1] for solving the generalized Black-Scholes equation (1.1)-(1.4) with $T = 1$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.4(2 + \sin x)$, $K = 25$, $S_{\max} = 100$ and $\varepsilon = 10^{-4}$.

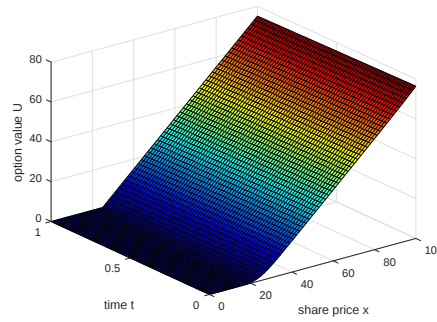


FIGURE 1. Computed option value V for Example 3.1 with $N = M = 64$ and $\varepsilon = 10^{-4}$.

TABLE 2. Comparison of errors and rates of convergence obtained by NSFD method and the method by Cen and Le [1] for Example 3.2.

$M = 1024$		N=128	N=256	N=512	N=1024
Results NSFD method	$E_{N,M}$	3.5388e-2	1.0353e-2	2.7108e-3	5.3870e-4
	$R_{N,M}$	1.773	1.933	2.331	-
Results for Cen and Le [1]	$E_{N,M}$	5.7124e-2	1.9498e-2	5.1550e-3	1.0586e-3
	$R_{N,M}$	1.551	1.919	2.284	-

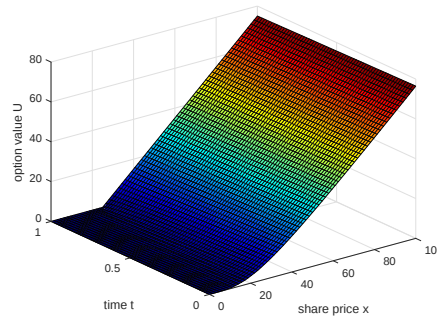


FIGURE 2. Computed option value V for Example 3.2 with $N = M = 64$ and $\varepsilon = 10^{-4}$.

It can be seen from Tables 1 and 2 the good performance of the proposed method, concerning accuracy and convergence rates. Figures 1 and 2 show some computed solutions for $N = M = 64$ and $\varepsilon = 10^{-4}$, showing the positivity preserving behaviour.

REFERENCES

1. Z. CEN AND A. LE, *A robust and accurate finite difference method for a generalized Black- Scholes equation*, J. Comput. Appl. Math., 235 (2011), pp. 3728-3733.
2. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND R. SHOKRI JAHANDIZI, *A family of positivity preserving schemes for numerical solution of BlackScholes equation*. International Journal of Financial Engineering, 4 (2016), pp. 1650025.
3. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND N. USMANI, *A family of positive nonstandard numerical methods with application to Black-Scholes equation*. Sahand Commun. Math. Anal, 5(1) (2017), pp. 31-40.

4. M. MEHDIZADEH KHALSARAEIA, A. SHOKRI, H. RAMOS AND S. HEYDARI, *A positive and elementary stable nonstandard explicit scheme for a mathematical model of the influenza disease*. Mathematics and Computers in Simulation, 182 (2021), pp. 397 - 410.
5. R. E. MICKENS, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1994.

POSITIVE METHOD FOR DISCRETE DOUBLE BARRIER OPTIONS

MOHAMMAD MEHDIZADEH KHALSARAEI^{1*}, ALI SHOKRI², PARI KHAKZAD³

¹ *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
muhammad.mehdizadeh@gmail.com*

² *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
shokri2090@gmail.com*

⁶ *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
pari.khakzad@yahoo.com*

ABSTRACT. The solution of the Black-Scholes partial differential equation determines the option price, respectively according to the used initial conditions. In the computation of the fair price of an option, it is a natural demand that the resulting numerical approximations, should be non-negative. Numerical methods based on standard finite difference approach such as fully implicit, Crank-Nicolson, and semi-implicit schemes are powerful tools for pricing. They are usually consistent with the original differential equation and guarantee convergency of the discrete solution to the exact one, but in the presence of discontinuous payoff and low volatility, essential qualitative properties of the solution are not transferred to the numerical solution. Spurious oscillations and negative values might occur in the solution. The application of a nonstandard finite difference method and investigation of its positivity preserving and smoothing properties for pricing European call options with a discrete double barrier is the subject of this paper. The new scheme is positivity preserving, conditionally stable, consistent, and convergent. Some numerical experiments have been performed to illustrate the efficiency of the new scheme.

Keywords: Black-Scholes equation, Theta scheme, Nonstandard finite difference, Positivity preserving scheme.

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: 65M06; 65M12..

1. INTRODUCTION

We consider the Black-Scholes model for pricing the European option as follows

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + rS\frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} - rv = 0, \quad (1.1)$$

with initial and boundary conditions following

$$v(S, 0) = \max(S - K, 0)\mathbf{1}_{[L, U]}(S), \quad (1.2)$$

$$v(S, t) \rightarrow 0 \text{ as } S \rightarrow 0 \text{ or } S \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

by updating the initial condition on the monitoring dates $t_i (i = 0, \dots, F)$

$$v(S, t_i) = v(S, t_i^-)\mathbf{1}_{[L, U]}(S), \quad (1.4)$$

* Speaker.

which $\mathbf{1}_{[L,U]}$ is an indicator function and is defined as follows

$$\mathbf{1}_{[L,U]} = \begin{cases} 1 & \text{if } S \in [L, U], \\ 0 & \text{if } S \notin [L, U], \end{cases} \quad (1.5)$$

where L and U are lower and upper barriers actives at all times t_n . Moreover, S is the asset price, v is the value of the option, K is the price of the strike, and T is the expiration date. The payoff function of this option is equal to $\max(S - K, 0)$, but if the price of the asset falls outside the range of $[L, U]$, the contract expires. The knock-out option at the monitoring dates indicates a discontinuity in obstacles $S = L$ and $S = U$, respectively. The rest of the paper is divided as follows. we review θ -method that is used to solve the Black-Scholes equation. In Section 3, we examine the application of nonstandard method for equation (1.1). The numerical results obtained from the new method are presented in Section 4.

2. THE θ -METHOD

Let us consider the computational domain $\Omega = [0, S_{\max}] \times [0, T]$ and discretize it in the following form. We introduce a grid of mesh points (S_j, t_n) where $S_j = j\Delta S, t_n = n\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, X$, the spatial step size is given by $\Delta S = S_{\max}/M$, and the time step size is $\Delta t = T/X$. We denote the approximation of $V(S_j, t_n)$ by V_j^n . The θ -method is defined by replacing the partial derivatives with respect to S at the mesh point (S_j, t_n) as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &\approx \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta S}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &\approx (1 - \theta) \frac{V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n}{\Delta S^2} + \theta \frac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{\Delta S^2}, \end{aligned}$$

and the derivative with respect to t by

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t}.$$

Therefore, the family of standard θ -method for solving (1.1) leads to a difference equation

$$AV^{n+1} = BV^n, \quad (2.1)$$

where $V^n = (V_1^n, \dots, V_{M-1}^n)^T$, $V^{n+1} = (V_1^{n+1}, \dots, V_{M-1}^{n+1})^T$ and

$$\begin{aligned} A &= \text{tridiag} \left\{ -\frac{\theta}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2, \frac{1}{\Delta t} + \theta \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2, -\frac{\theta}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 \right\}, \\ B &= \text{tridiag} \left\{ \frac{1 - \theta}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 - \frac{r S_j}{2\Delta S}, \frac{1}{\Delta t} - (1 - \theta) \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 - r, \frac{1 - \theta}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 + \frac{r S_j}{2\Delta S} \right\}. \end{aligned}$$

3. CONSTRUCTION OF THE NEW SCHEME

In this section, we propose the new scheme by using the nonstandard discretization techniques [1, 2, 3, 4]. By replacing

$$V(S_j, t_n) \approx a(V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_{j+1}^n) + V_j^{n+1}, \quad (3.1)$$

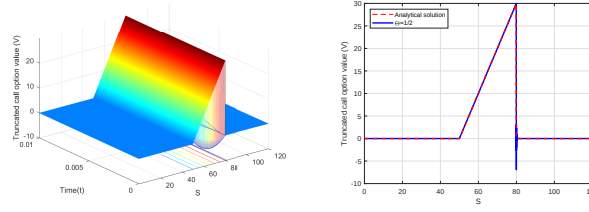


FIGURE 1. Spurious oscillations in the solution provided by the θ -method with $\Delta S = 0.01, \Delta t = 10^{-4}$, and $\theta = \frac{1}{2}$. Parameter values: $r = 0.07, \sigma = 0.001, T = 0.01, U = 80, K = 50, L = 20, S_{max} = 120$.

in the reaction term of (1.1), the second derivative in the term of equation (1.1) by

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{1}{\Delta S^2} (V_{j+1}^n - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^n)$$

and the first partial derivatives by

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &\approx \frac{1}{\Delta t} (V_j^{n+1} - V_j^n), \\ \frac{\partial V}{\partial S} &\approx \frac{1}{2\Delta S} (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n). \end{aligned}$$

we construct the new method as:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\Delta t} (V_j^{n+1} - V_j^n) + \frac{\sigma^2 S_j^2}{2\Delta S^2} (V_{j+1}^n - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^n) + \frac{rS_j}{2\Delta S} (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \\ &-r(a(V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_{j+1}^n) + V_j^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

The explicit form of (3.2) concerning the temporal variable is:

$$V_j^{n+1} = \frac{\left(-\frac{rS_j}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 - ra\right) V_{j-1}^n + \left(\frac{1}{\Delta t} + 2ra\right) V_j^n + \left(\frac{rS_j}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 - ra\right) V_{j+1}^n}{\frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 + r}. \quad (3.3)$$

where a is an arbitrary parameter to be determined by imposing positivity restrictions. The corresponding finite difference approximation provides for each $n = 0, 1, \dots, X-1$, the difference equation

$$V^{n+1} = NV^n, \quad (3.4)$$

where N is the matrix:

$$N = \text{tridiag} \left\{ \frac{-\frac{rS_j}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 - ra}{\frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 + r}; \frac{\frac{1}{\Delta t} + 2ra}{\frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 + r}; \frac{\frac{rS_j}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 - ra}{\frac{1}{\Delta t} + \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S}\right)^2 + r} \right\}, \quad (3.5)$$

and $V^n = (V_1^n, \dots, V_{M-1}^n)^T$, $V^{n+1} = (V_1^{n+1}, \dots, V_{M-1}^{n+1})^T$ are vectors containing approximations to V at the discrete points, at time levels t_n and t_{n+1} , respectively.

Theorem 3.1. *If $a \leq -\frac{r}{8\sigma^2}$ and $\Delta t < \frac{1}{-2ra}$ then the scheme in (3.4) for solving the Black-Scholes equation in (1.1) is positivity-preserving.*

Theorem 3.2. *Under the hypothesis of Theorem 3.1, the new scheme in (3.4) is conditionally stable and convergent with local truncation error $O(\Delta t, \Delta S^2)$.*

4. NUMERICAL RESULTS

Example 4.1. Consider the Black-Scholes equation in (1.1) to price a truncated call option with parameters $r = 0.07, \sigma = 0.001, a = -8800, T = 0.01, U = 80, K = 50, L = 20, S_{\max} = 120, \Delta S = 0.01, \Delta t = 10^{-4}$.

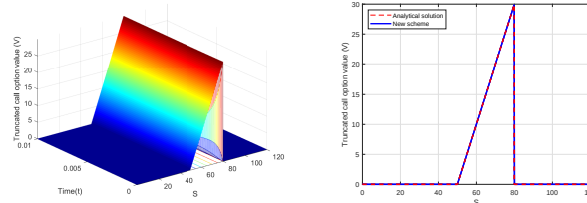


FIGURE 2. Numerical solution provided by the new scheme. Parameters: $r = 0.07, \sigma = 0.001, a = -8800, T = 0.01, U = 80, K = 50, L = 20, S_{\max} = 120, \Delta S = 0.01, \Delta t = 10^{-4}$.

Figure 2 illustrates the numerical solution provided by the new scheme (left). We can see in Figure 2 (right) that the positivity and stability are preserved.

Example 4.2. Consider the Black-Scholes equation in (1.1) to price a truncated call option with different values of the interest rate r and parameters $\sigma = 0.001, a = -1250, T = 1, U = 70, K = 50, L = 30, S_{\max} = 140, \Delta S = 0.05, \Delta t = 10^{-3}$.

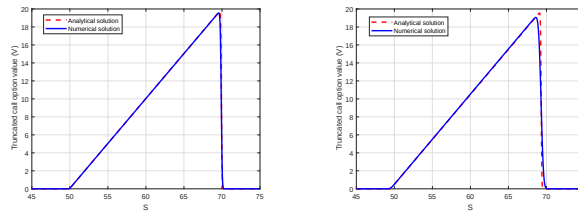


FIGURE 3. Numerical solution provided by the new scheme with parameter values $r = 0.01$ (right) and parameter $r = 0.001$ (left). Other parameter values $\sigma = 0.001, a = -1250, T = 1, U = 70, K = 50, L = 30, S_{\max} = 140, \Delta S = 0.05, \Delta t = 10^{-3}$.

Figure 3 illustrates the new scheme preserves the positivity property, is stable and the numerical results are in good agreement with the analytical solution for different values of the interest rate, $r = 0.01$ and $r = 0.001$. If the conditions in Theorem 3.1 are violated, the new scheme shows a poor performance (see Figure 4, for Example 4.1 (left) and Example 4.2 (right)).

REFERENCES

1. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND R. SHOKRI JAHANDIZI, *A family of positivity preserving schemes for numerical solution of BlackScholes equation*. International Journal of Financial Engineering, 4 (2016), pp. 1650025.
2. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND N. USMANI, *A family of positive nonstandard numerical methods with application to Black-Scholes equation*. Sahand Commun. Math. Anal, 5(1) (2017), pp. 31-40.
3. M. MEHDIZADEH KHALSARAEIA, A. SHOKRI, H. RAMOS AND S. HEYDARI, *A positive and elementary stable nonstandard explicit scheme for a mathematical model of the influenza disease*. Mathematics and Computers in Simulation, 182 (2021), pp. 397 - 410.
4. R. E. MICKENS, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1994.

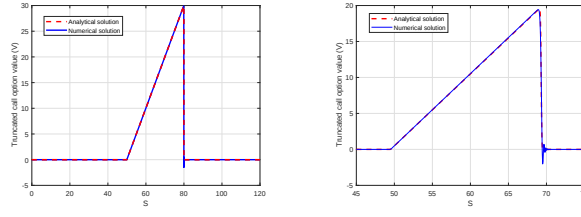


FIGURE 4. Poor performance of the new scheme if the conditions in Theorem 3.1 are not satisfied. Example 4.1 with parameter values $r = 0.07, \sigma = 0.001, a = -1300, T = 0.01, U = 80, K = 50, L = 20, S_{max} = 120, \Delta S = 0.01, \Delta t = 10^{-4}$ (left) and Example 4.2 with parameter values $r = 0.01, \sigma = 0.001, a = -50, T = 1, U = 70, K = 50, L = 30, S_{max} = 140, \Delta S = 0.05, \Delta t = 10^{-3}$ (right).

A NEW FINITE DIFFERENCE/SPECTRAL METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE BLACK-SCHOLES EQUATION FOR EUROPEAN PUT OPTIONS

Y. TALAEI

*Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, University of Tabriz, Tabriz,
Iran.*

ytalaei@gmail.com, y_talaei@tabrizu.ac.ir

ABSTRACT. The main purpose of this paper is to investigate a new numerical method based on backward finite difference method and spectral Galerkin method for solving Black-Scholes equation for European put option. In this paper, by discretization in time for the Black-scholes equation we get the ordinary system of differential equations (ODEs) in the spatial domain. The obtained ODEs is solved by applying the spectral Galerkin method based on the generalized Jacobi polynomials. The convergence of the method in suitable spaces of functions, equipped with the weighted L^2 - norm is discussed. Also, we provide numerical experiment to show the accuracy of method.

Keywords: Black-Scholes equation, Generalized Jacobi polynomials, Backward-difference method, Convergence analysis

Classification: 32W50, 97M30.

1. INTRODUCTION

In option pricing theory, the Black-Scholes equation is one of the most effective models for pricing options. Black-Scholes option pricing model (also called Black-Scholes-Merton Model) values a European-style call or put option based on the current price of the underlying (asset), the options exercise price, the underlying volatility, the options time to expiration and the annual risk-free rate of return [11]. Consider the Black-Scholes equation for put options

$$P_t(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{SS}(S, t) + rSP_S(S, t) - rP(S, t) = 0, \quad (1.1)$$

with the conditions

$$P(S, T) = \max(E - S, 0), \quad S \in \Omega = [0, \infty), \quad P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad P(S, t) = 0, \quad \text{as } S \rightarrow \infty.$$

where $P(S, t)$ is the European put option price at asset price S and at time t , E is the exercise price, T is the maturity, r is the risk free interest rate, and σ represents the volatility function of underlying asset. During the past few decades, many researchers studied about the solution of the Black-Scholes model using several methods such as [4, 2, 10, 9].

The spectral method is built on approximating the series solutions for differential equations in terms of classical orthogonal polynomials (Legendre, Chebyshev, Hermit, Jacobi, ...), say $\sum a_k \phi_k$. There are three well-known versions used as popular techniques to determine the expansion coefficients, namely collocation, tau, and Galerkin methods. The

classical orthogonal polynomials are used successfully and extensively for the numerical solution of differential equations in spectral methods (see [1]).

2. PRELIMINARIES

2.1. Generalized Jacobi polynomials. For real numbers α, β and $r \in \mathbf{Z}$, we define the space

$$\mathbf{W}_{\omega^{a,b}} := \{u \mid u \text{ is measurable on } I \text{ and } \|u\|_{\omega^{a,b},r} < \infty\},$$

equipped with the norm and semi-norm

$$\|u\|_{\omega^{\alpha,\beta},r} = \left(\sum_{k=0}^r \|\partial_x^k u\|_{\omega^{\alpha+k,\beta+k}}^2 \right)^{1/2}, \quad |u|_{\omega^{\alpha,\beta},r} = \|\partial_x^r u\|_{\omega^{\alpha+r,\beta+r}},$$

where $\|u\|_{\omega}^2 = \int v^2 \omega dx$. The Generalized Jacobi polynomials (GJPs) [5] on $[-1, 1]$ are define as follows

$$G_n^{(a,b)}(x) := (1-x)^{-a}(1+x)^{-b} J_{n-n_0}^{(-a,-b)}(x), \quad n_0 = -(a+b), \quad a, b \leq -1, \quad (2.1)$$

for all $n \geq n_0$ and $J_{n-n_0}^{(-a,-b)}(x)$ are the classical Jacobi polynomials (see [1] for more details) on $[-1, 1]$. An important property of the GJPs is that for $a, b \in \mathbf{Z}^+$, we have

$$D^i G_n^{(-a,-b)}(-1) = 0, \quad i = 0, \dots, a-1, \quad D^j G_n^{(-a,-b)}(1) = 0, \quad j = 0, \dots, b-1.$$

In this paper, we set $a = b = -1$, and $\widehat{G}_n^{(-1,-1)}(x)$, the shifted GJPs on arbitrary interval $[l_m, l_M]$ as

$$\widehat{G}_n^{(-1,-1)}(x) := G_n^{(-1,-1)}\left(\frac{2x - l_m - l_M}{l_M - l_m}\right), \quad (2.2)$$

with the homogenous boundary conditions

$$\widehat{G}_n^{(-1,-1)}(l_m) = \widehat{G}_n^{(-1,-1)}(l_M) = 0, \quad n \geq 2. \quad (2.3)$$

It can also be easily show that $\{\widehat{G}_n^{(-1,-1)}(x) : n \geq 2\}$ construct a complete orthogonal system in $L_{\omega^{-1,-1}}^2$ (see [5]). Define

$$B := \text{span}\{\widehat{G}_2^{(-1,-1)}(x), \widehat{G}_3^{(-1,-1)}(x), \dots, \widehat{G}_N^{(-1,-1)}(x)\},$$

and consider the orthogonal projection $\pi_N^{-1,-1} : L_{\omega^{-1,-1}}^2 \rightarrow B$ defined by

$$\langle u - \pi_N^{a,b} u, v \rangle_{\omega^{-1,-1}} = 0, \quad \forall v \in B.$$

In the following theorem, we estimate the projection errors which are useful in the error analysis of spectral-Galerkin methods.

Theorem 2.1. [5] Assume that $u \in \mathbf{W}_{\omega^{-1,-1},r}$, $0 \leq \mu \leq r$ and C a generic positive constant independent of any function and N ,

$$\|u - \pi_N^{-1,-1} u\|_{\omega^{-1,-1},\mu} \leq CN^{\mu-r} |u|_{\omega^{-1,-1},r}. \quad (2.4)$$

3. DESCRIPTION OF THE METHOD

At the first, we convert the problem (1.1) from backward to forward problem (a problem with initial conditions). To do this, change of variable $\tau = T - t$ in Eq. (1.1) yields

$$\hat{P}_\tau(S, \tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \hat{P}_{SS}(S, \tau) + rS\hat{P}_S(S, \tau) - r\hat{P}(S, \tau), \quad (3.1)$$

$$\hat{P}(S, 0) = \max(E - S, 0), \quad \hat{P}(0, \tau) = Ee^{-r\tau}, \quad \hat{P}(S, \tau) = 0, \quad \text{as } S \rightarrow \infty,$$

where $P(S, t) = P(S, T - \tau) = \hat{P}(S, \tau)$. Assume $S_M := S_\infty < \infty$, where is the suitably chosen positive number. Now, due to the application of homogeneous boundary conditions (2.3) of the GJPs, we must transform the Eq. (3.1) into a homogeneous boundary condition problem. Setting

$$\hat{P}(S, \tau) = W(S, \tau) + Ee^{-r\tau}\left(1 - \frac{S}{S_M}\right), \quad (3.2)$$

where $W(S, \tau)$ is a new unknown function, gives

$$\hat{P}_\tau(S, \tau) = W_\tau(S, \tau) - rEe^{-r\tau}\left(1 - \frac{S}{S_M}\right), \quad \hat{P}_S(S, \tau) = W_S(S, \tau) - \frac{Ee^{-r\tau}}{S_M}, \quad \hat{P}_{SS}(S, \tau) = W_{SS}(S, \tau). \quad (3.3)$$

Substituting (3.3) into (3.1) yields

$$W_\tau(S, \tau) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{SS}(S, \tau) + rSW_S(S, \tau) - rW(S, \tau) - \frac{rEe^{-r\tau}S}{S_M}, \quad (3.4)$$

with

$$W(S, 0) = \max(E - S, 0) - E\left(1 - \frac{S}{S_M}\right), \quad W(0, \tau) = W(S_M, \tau) = 0.$$

3.1. A semi-discretization in time for Eq. (3.4). Given the discretization of the time interval $[0, T]$ with step size $h = T/M$,

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_M = T.$$

By applying the backward-difference method for the left side of Eq. (3.4) we obtain

$$\frac{W(S, \tau_{i+1}) - W(S, \tau_i)}{h} + O(h) = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 W_{SS}(S, \tau_{i+1}) + rSW_S(S, \tau_{i+1}) - rW(S, \tau_{i+1}) - \frac{rEe^{-r\tau_{i+1}}S}{S_M}$$

for $i = 0, 1, \dots, M-1$. Taking the $F_i(S)$, approximation of the exact solution $W(S, \tau_i)$ for $i = 0, 1, \dots, M$, we obtain an ordinary differential equation as follows

$$DF_{i+1}(S) = R_i(S), \quad F_{i+1}(0) = F_{i+1}(S_M) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (3.5)$$

where

$$DF_{i+1}(S) := h\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{i+1}''(S) + rhSF_{i+1}'(S) - (1+rh)F_{i+1}(S), \quad R_i(S) := h\frac{rEe^{-r\tau_{i+1}}S}{S_M} - F_i(S).$$

For each time step i with homogeneous boundary conditions. It is clear that for the first step, $i = 0$, from initial condition of (3.4), we have

$$F_0(S) = \max(E - S, 0) - E\left(1 - \frac{S}{S_M}\right).$$

The unknown functions $F_i(S)$, $i = 1, \dots, M$ are approximated in the finite dimensional space, B , as follows

$$F_{i,N}(S) \simeq \sum_{j=2}^N c_{i,j} \widehat{G}_j^{(-1,-1)}(S). \quad (3.6)$$

Substituting (3.6) into (3.5) yields the Galerkin residual functions (see [1]), $Res_i(S)$, as follows

$$Res_i(S) = DF_{i+1,N}(S) - R_i(S), \quad i = 0 \dots M-1. \quad (3.7)$$

The application of the Galerkin method for each time step $i = 0, 1, \dots, M-1$, yields the following $(N-2)$ set of linear algebraic equations in the unknown expansion coefficients, $c_{i,j}$, namely

$$\int_0^{S_M} Res_i(S) \widehat{G}_j^{(-1,-1)}(S) \omega^{-1,-1}(S) dS = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad j = 2, \dots, M, \quad (3.8)$$

The obtained system of algebraic equation can be solved for the unknown coefficients $c_{i,j}$ and $F_{i,N}(S)$ calculated for $i = 1, \dots, M$.

4. CONVERGENCE ANALYSIS

Theorem 4.1. [7] Assume $K_{i+1}(s) := \frac{rEe^{-r\tau_{i+1}S}}{S_M}$ and $L(S) := \max(E-S, 0) - E(1 - \frac{S}{S_M})$. Then, the time semi-discrete problem (3.5) is unconditionally stable, i.e., if

$$\widehat{L}(S) = L(S) + \widehat{\delta}(S), \quad \widehat{K}_{i+1}(S) = K_{i+1}(s) + \widehat{\delta}_{i+1}(S)$$

provide a perturbed sequence $\widehat{F}_i(S)$, whose distance from the original sequence $F_i(S)$, is uniformly bounded by the maximum size of the perturbation, i.e.,

$$\|F_i(S) - \widehat{F}_i(S)\|_\infty \leq C \left(\widehat{\delta}(S) + \max_{j=0, \dots, i-1} \|\widehat{\delta}_j(S)\|_\infty \right).$$

Theorem 4.2. [7] If

$$\left| \frac{\partial^{i+j} W(S, \tau)}{\partial^i S \partial^j \tau} \right| \leq C, \quad 0 \leq j \leq 3, \quad 0 \leq i \leq 4,$$

then, the local truncation error e_n , and global truncation error E_n associated to the semi-discrete method (3.5) satisfies

$$\|e_n\|_\infty \leq Ch^2, \quad \|E_n\|_\infty \leq Ch.$$

Theorem 4.3. [7] The time semi-discrete method (3.5) is first order convergent, i.e.,

$$\|W(S, \tau_i) - F_i(S)\|_\infty \leq Ch.$$

The following Theorem show the convergence of the full discretization method that is obtained by

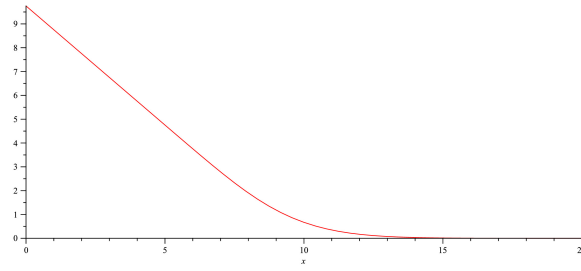
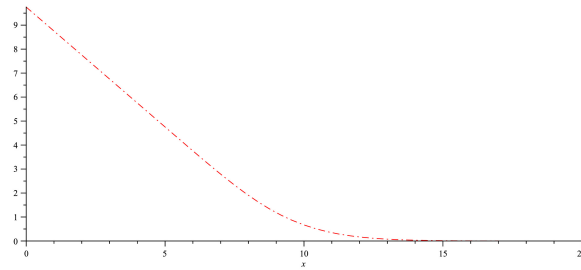
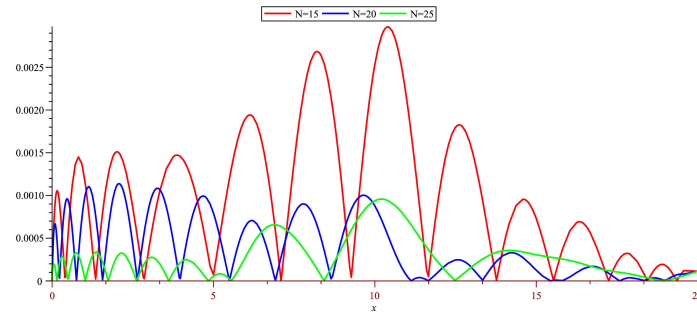
$$\|W(S, \tau_i) - F_{i,N}(S)\|_{\omega^{-1,-1},2} \leq \|W(S, \tau_i) - F_i(S)\|_{\omega^{-1,-1},2} + \|F_i(S) - F_{i,N}(S)\|_{\omega^{-1,-1},2}$$

and Theorems 2.1 and 4.3, respectively. The idea of the proof comes from [5, 7, 6].

Theorem 4.4. Let $W(S, \tau)$ be the solution of the initial boundary value problem (3.4)-(??) and $F_{i,N}(S)$ be the Galerkin approximation to the solution $F_i(S)$ in each time steps $i = 0, \dots, M$. Then,

$$\|W(S, \tau_i) - F_{i,N}(S)\|_\infty \leq C(h + N^{2-r}).$$

It is seen that the temporal and spatial rate of convergence are $O(h)$ and $O(N^{2-r})$, respectively, where r is an index of regularity of the underlying function.

FIGURE 1. Exact solution in time $t = T$.FIGURE 2. Approximate solution in time $t = T$ and $N=25$.FIGURE 3. Absolute error for various $N = 15, 20, 25$.TABLE 1. The absolute errors (Abs.err) and values of S for $N = 25$ at time $t = 0.25$.

S	Abs.err	S	Abs.err
2	$2.758800e - 04$	12	$2.024524e - 04$
4	$2.244770e - 04$	14	$3.512227e - 04$
6	$2.884300e - 04$	16	$2.424921e - 04$
8	$2.637970e - 04$	18	$7.445729e - 05$
10	$9.394778e - 04$	20	$1.129299e - 04$

5. NUMERICAL RESULTS

Consider to Eq. (1.1) with parameters $E = 10$, $T = 0.25$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ and $0 \leq S \leq 20$. The exact solution is

$$P(S, \tau) = Ee^{-r(T-\tau)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

where

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}, \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - \tau)}{\sigma\sqrt{T - \tau}}.$$

Figs. 1 and 2, show the exact and numerical solution in $t = 0.25$ for $N = 25$. The absolute error is shown for various $N = 15, 20, 25$ in Fig. 3. Also, the absolute errors (Abs.err) for various values of S are presented in Tab. 1. These results confirm the theoretical results and accuracy of the method.

REFERENCES

1. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1988).
2. D. Y. TANGMAN, A. GOPAUL, M. BHURUTH, *A fast high-order finite difference algorithm for pricing American options*, J. Comput. Appl. Math. 222, (2008), 17-29.
3. E. H. DOHA, A.H. BHRAWY, *Efficient spectral-Galerkin algorithms for direct solution for second-order differential equations using Jacobi polynomials*, Numer. Algor. 42, (2006), pp. 137-164.
4. F. BLACK, M. S. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econ, 81, (1973), pp. 637-654.
5. G. BEN-YU, J. SHEN, W. LI-LIAN, *Generalized Jacobi polynomials/functions and their applications*, Appl. Numer. Math, 59, (2009), pp. 1011-1028.
6. M. JANI, S. JAVADI, E. BABOLIAN, *Bernstein dual-Petrov-Galerkin method: application to 2D time fractional diffusion equation*, Comp. Appl. Math. 37, (2018), 23-35.
7. M. K. KADALBAJOO, L. P. TRIPATHI, A. KUMAR, *A cubic B-spline collocation method for a numerical solution of the generalized Black-Scholes equation*, Math. Comput. Model. 55, (2012), pp. 1483-1505.
8. M. BOHNER, Y. ZHENG, *On analytical solution of the Black-Scholes equation*, Appl. Math. Lett. 22, (2009), pp. 309-313.
9. M. DEGHAN, S. POURGHANBAR, *Solution of the Black-Scholes equation for pricing of barrier option*, Z. Naturforsch., A, Vol. 66, (2011), 289-296.
10. R. COMPANY, L. JODAR, J. R. PINTOS, *A numerical method for European option pricing with transaction costs nonlinear equation*, Math. Comput. Model. 50, (2009), pp. 910-920.
11. S. STOJANOVIC, *Computational Financial Mathematics using Mathematica, Optimal Trading in Stocks and Options*, Springer Science, USA, (2003).

A COMBINATION OF NON-STANDARD METHOD AND LAPLACE TRANSFORM FOR THE BLACK-SCHOLES EQUATION

MOHAMMAD MEHDIZADEH KHALSARAEI^{1*}, ALI SHOKRI², PARI KHAKZAD³

¹ *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
mehdizadeh@maragheh.ac.ir*

² *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
shokri2090@gmail.com*

³ *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran.
pari.khakzad@yahoo.com*

ABSTRACT. Numerical methods based on the standard finite difference approach is consistent with the original differential equation and guarantee convergence of the discrete solution to the exact one, but they impose severe restrictions on the time step and in the presence of discontinuous payoff and low volatility, essential qualitative properties of the solution are not transferred to the numerical solution. Spurious oscillations and negative values might occur in the solution. In this paper, we propose a combination of the Laplace transform method and the nonstandard finite-difference method to solving the Black-Scholes equation. The new scheme is positivity preserving, conditionally stable, consistent, and convergent. Compared with other standard numerical methods such as the Mixed method, our results indicate that a properly implemented version of our scheme is useful for the numerical integration of the considered Black-Scholes equation. The results obtained indicate that non-standard difference schemes may be promising for solving problems that may have an impact.

Keywords: Black-Scholes equation, Laplace Transform, Nonstandard finite difference, Positivity preserving.

Classification: MSC2010 or JEL Classifications: At most 3 items.

1. INTRODUCTION

We consider the Black-Scholes model for pricing the European option as follows

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + rS\frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} - rv = 0, \quad (1.1)$$

with initial and boundary conditions following

$$v(S, 0) = \max(S - K, 0)\mathbf{1}_{[L, U]}(S), \quad (1.2)$$

$$v(S, t) \rightarrow 0 \text{ as } S \rightarrow 0 \text{ or } S \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

by updating the initial condition on the monitoring dates $t_i (i = 0, \dots, F)$

$$v(S, t_i) = v(S, t_i^-)\mathbf{1}_{[L, U]}(S), \quad (1.4)$$

* Speaker.

which $\mathbf{1}_{[L,U]}$ is an indicator function and is defined as follows

$$\mathbf{1}_{[L,U]} = \begin{cases} 1 & \text{if } S \in [L, U], \\ 0 & \text{if } S \notin [L, U], \end{cases} \quad (1.5)$$

where L and U are lower and upper barriers actives at all times t_n . Moreover, S is the asset price, v is the value of the option, K is the price of the strike, and T is the expiration date. The payoff function of this option is equal to $\max(S - K, 0)$, but if the price of the asset falls outside the range of $[L, U]$, the contract expires. The knock-out option at the monitoring dates indicates a discontinuity in obstacles $S = L$ and $S = U$, respectively. In this paper, we modify the method presented in [6] for (1.1) by combining the Laplace transform method with the non-standard finite difference method. The rest of the paper is divided as follows. In Section 2, we will apply Laplace transformation method for the Black-Scholes equation. In Section 3, we examine the application of nonstandard methods through spatial nonlocalized discretization. The numerical results obtained from the new method are presented in Section 4.

2. THE LAPLACE TRANSFORM METHOD FOR THE BLACK-SCHOLES EQUATION

we use the Laplace Transformation for the Black-Scholes equation (1.1). The Laplace transform of function $v(S, t)$, is defined by $V(S, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} v(S, t) dt$, and its k -th derivative is defined as follows

$$\frac{d^k V(S, \lambda)}{d\lambda^k} =: V^{(k)}(S, \lambda) = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} v(S, t) dt,$$

multiplying each term by $t^k e^{-\lambda t}$ and integration on the interval $[0, \infty)$ and by doing some algebraic calculations, the following ordinary differential equation (ODE) is obtained:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 V^{(k)}}{dS^2} - rS \frac{dV^{(k)}}{dS} + (r + \lambda)V^{(k)} = \begin{cases} v(S, 0), & k = 0, \\ -kV^{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

In [6] by using the centered differences for $\frac{dV^{(k)}}{dS}$ and $\frac{d^2 V^{(k)}}{dS^2}$ have derived:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \left(\frac{V_{j-1}^{(k)} - 2V_j^{(k)} + V_{j+1}^{(k)}}{\Delta S^2} \right) - rS_j \left(\frac{V_{j+1}^{(k)} - V_{j-1}^{(k)}}{2\Delta S} \right) + (r + \lambda)V_j^{(k)} = \begin{cases} v(S, 0), & k = 0, \\ -kV^{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

with the boundary conditions $V^{(k)}(0, \lambda) = 0$ and $V^{(k)}(\infty, \lambda) = 0$, where $V_j^{(k)}$ is approximation $V^{(k)}(S, \lambda)$ at the grid point S_j with $S_j = j\Delta S$ ($j = 1, \dots, M-1$) and $\Delta S = \frac{S_{\max}}{M}$, which lead to:

$$\begin{cases} A_{pw} V^{(k)} = v(S, 0), & k = 0, \\ A_{pw} V^{(k)} = -kV^{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.3)$$

with

$$A_{pw} = \text{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 - r \frac{S_j}{\Delta S} \right]; (r + \lambda) + \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2; -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 + r \frac{S_j}{\Delta S} \right] \right\}. \quad (2.4)$$

As [6] if in (2.3) $k = 1, \dots, N$ and $\lambda = \frac{N}{T}$ are assumed, the approximation $v_N(S_j, t)$ of $v(S_j, t)$ using the post-wider formula [1], as follows is obtained

$$v_N(S_j, T) = \frac{(-1)^N}{N!} \left(\frac{N}{T}\right)^{N+1} V^{(N)}(S_j, \frac{N}{T}), \quad (2.5)$$

with $\lim_{N \rightarrow \infty} v_N(S_j, t) = v(S_j, t)$, as we prove in the sequel. An explicit form for $v_N(S_j, T)$ is obtained combining (2.3) with (2.5)

$$v_N(S_j, T) = \left(\frac{N}{T} A_{PW}^{-1}\right)^{N+1} v(S_j, 0), \quad (2.6)$$

so that $\frac{N}{T} A_{PW}^{-1}$ is the iteration matrix.

According to Figure 1, the mixed method produces spurious oscillations and negative values, when parameters σ and r satisfy in $\sigma^2 \ll r$. The parameters used in drawing Figure 1 are selected from [6].

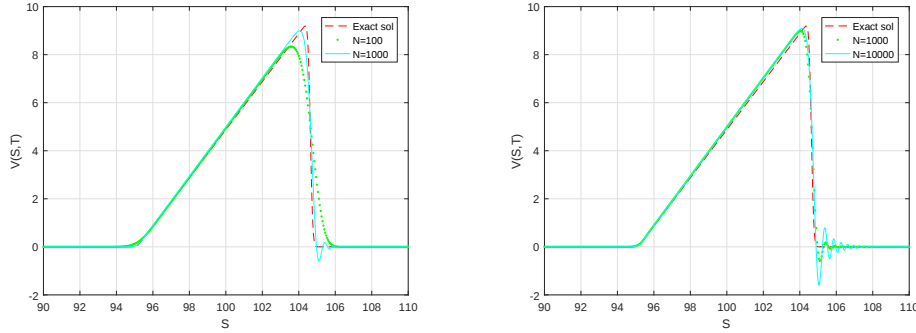


FIGURE 1. Parameters: $r = 0.05$, $\sigma = 0.001$, $T = 1$, $U = 110$, $K = 100$, $L = 90$, $S_{\max} = 200$, $\Delta S = 0.05$.

3. CONSTRUCTION OF THE NEW SCHEME

In the following, we use the strategy of NSFD discretization to overcome the above mentioned-drawbacks [2, 3, 4, 5]. By using values at different spatial points for discretization $V^{(k)}$ as a:

$$V^{(k)} \approx (a + b)(V_{j+1}^{(k)} + V_{j-1}^{(k)}) + (1 - 2a - 2b)V_j^{(k)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

we proposed our new scheme

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \left(\frac{V_{j-1}^{(k)} - 2V_j^{(k)} + V_{j+1}^{(k)}}{\Delta S^2} \right) - r S_j \left(\frac{V_{j+1}^{(k)} - V_{j-1}^{(k)}}{2\Delta S} \right) + (r + \lambda)(a + b)(V_{j+1}^{(k)} + V_{j-1}^{(k)}) \\ & + (r + \lambda)(1 - 2a - 2b)V_j^{(k)} = \begin{cases} v(S, 0), & k = 0, \\ -kV^{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

which a and b are the parameters that are obtained by imposing positivity restrictions. The above discretization may be written in a matrix form as:

$$\begin{cases} \hat{A}_{pw} V^{(k)} = v(S, 0), & k = 0, \\ \hat{A}_{pw} V^{(k)} = -kV^{(k-1)}, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.2)$$

with

$$\hat{A}_{pw} = \text{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 + \frac{r S_j}{2 \Delta S} + (a+b)(r+\lambda); \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 - (2a+2b-1)(r+\lambda); \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_j}{\Delta S} \right)^2 - \frac{r S_j}{2 \Delta S} + (a+b)(r+\lambda) \right\}.$$

The approximation $v_N(S_j, t)$ of $v(S_j, t)$ by using the Post-Widder formula

$$v_N(S_j, T) = \left(\frac{N}{T} \hat{A}_{PW}^{-1} \right)^{N+1} v(S_j, 0). \quad (3.3)$$

Theorem 3.1. *scheme (3.2) is positive, if*

$$(a+b) \leq -\frac{r^2}{8\sigma^2(r+\lambda)}. \quad (3.4)$$

Theorem 3.2. *The proposed method is conditionally stable and convergent and also the method is second-order respect to the spatial variable.*

4. NUMERICAL RESULTS

To illustrate the advantage of the designed new positive scheme we again consider the (2.1) with $\sigma^2 \ll r$. The proposed nonstandard scheme for different N produces an

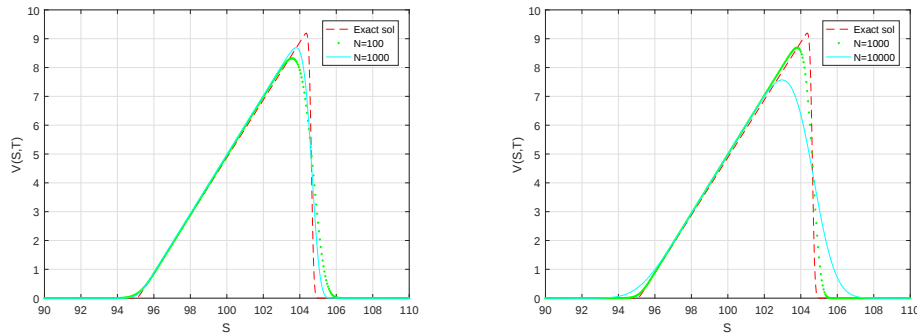


FIGURE 2. Parameters: $r = 0.05$, $\sigma = 0.001$, $T = 1$, $U = 110$, $K = 100$, $L = 90$, $S_{\max} = 200$, $\Delta S = 0.05$.

acceptable solution, spurious oscillation free, and is positivity preserving. This can be seen clearly in Figure 2, where the cross-section at $t = T$ of the analytical solution and the numerical one obtained with the NSFD scheme are shown.

If condition (3.4) is violated, the solution obtained from the new method may produce spurious oscillations and negative values in the solution, see Figure 3.

REFERENCES

1. A.M. COHEN, *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Springer, New York, 2007.
2. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND R. SHOKRI JAHANDIZI, *A family of positivity preserving schemes for numerical solution of BlackScholes equation*, International Journal of Financial Engineering, 4 (2016), pp. 1650025.
3. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND N. USMANI, *A family of positive nonstandard numerical methods with application to Black-Scholes equation*. Sahand Commun. Math. Anal, 5(1) (2017), pp. 31-40.

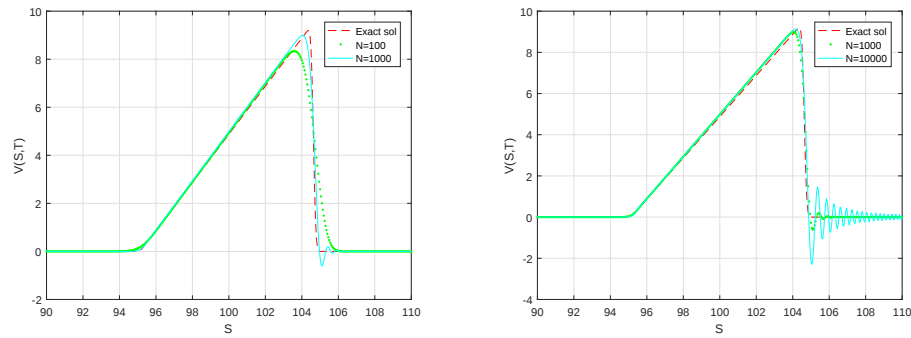


FIGURE 3. The condition (3.4) is violated. Parameters: $r = 0.05$, $\sigma = 0.001$, $T = 1$, $U = 110$, $K = 100$, $L = 90$, $S_{\max} = 200$, $\Delta S = 0.05$.

4. M. MEHDIZADEH KHALSARAEI AND A. SHOKRI, H. RAMOS AND S. HEYDARI, *A positive and elementary stable nonstandard explicit scheme for a mathematical model of the influenza disease*. Math. Comput. Simul., 182 (2021), pp. 397 - 410.
5. R. E. MICKENS, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1994.
6. M. MILEV AND A. TAGLIANI, *Laplace Transform and finite difference methods for the Black-Scholes equation*, Appl. Math. Comput., 220 (2013), pp. 649-658.

STOCHASTIC RUNGE-KUTTA ROSENBROCK TYPE SCHEME WITH STRONG GLOBAL ORDER ONE FOR STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

KAZEM NOURI¹, HASSAN RANJBAR² AND LEILA TORKZADEH³

*Department of Mathematics, Faculty of Mathematics,
Statistics and Computer Sciences, Semnan University, P. O. Box 35195-363, Semnan, Iran.*
¹knouri@semnan.ac.ir, ²hranjbar@semnan.ac.ir, ³torkzadeh@semnan.ac.ir

ABSTRACT. The analytical investigations and numerical solutions of stochastic differential equations have always been of interest to researchers. During the several decades, many efficient methods have been developed for solving different types of stochastic differential equations with different properties. We need numerical methods because a lot of stochastic differential equations are not analytically solvable. There are two dominating versions of stochastic calculus, the Itô stochastic calculus and the Stratonovich stochastic calculus. In this work, we concern the new class of stochastic Runge-Kutta method for solution of Stratonovich stochastic differential equations with scalar noise. Using Rosenbrock ordinary differential equation solver, we define stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type scheme. In recent years, implicit stochastic Runge-Kutta methods have been developed both for strong and weak approximations. For these methods, the stage values are only given implicitly. Stratonovich Taylor expansion is applied to derive strong global convergence order 1.0. Also, mean-square stability is studied and some examples are presented to support the theoretical results.

Keywords: Stochastic Runge-Kutta Rosenbrock scheme, Stratonovich stochastic differential equations, Stratonovich Taylor expansion, Strong global order, Mean-square stability.

MSC2010: 60H35, 65L06, 65L20.

1. INTRODUCTION

In this paper, we discuss on numerical scheme for approximation of strong solutions of Stratonovich stochastic differential equations (SDEs)

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t)) \circ dW(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

where the deterministic term $f(x(t))$ is the drift coefficient, the stochastic term $g(x(t))$ is the diffusion coefficient, and $W(t)$ is a Wiener process whose increment $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ is a Gaussian random variable $\mathcal{N}(0, \Delta t)$.

In the recent years many literatures proved that for numerically solving of SDEs, stochastic Runge-Kutta methods are an essential tool, for example see [4, 7, 8, 10]. Also, in [12, 11] have presented a general class of stochastic Runge-Kutta methods, for case of Stratonovich SDEs. For the numerical approximations of SDEs, economical Runge-Kutta methods with strong global order one in the Stratonovich sense is proposed in [6]. In [5], the authors consider a class of implicit methods based on stiffly accurate Runge-Kutta methods and splitting techniques for Stratonovich SDEs, which are of mean-square order 1.0. Recently, in some papers developed a family of explicit schemes such as stochastic orthogonal Runge-Kutta Chebyshev methods for Stratonovich SDEs, for example see [9, 1].

In this work, we propose a stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type scheme to solve (1.1). The main motivation for the methods proposed in this paper originates from the [2, 3] which have been successfully applied to Itô SDEs. For solving the Stratonovich SDE (1.1) a class of two-stage stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type method is given by

$$\begin{aligned}(1 - \gamma h \mathcal{J}_f)K_1 &= a_1 h f(y_n) + b_1 J_1 g(y_n), \\ (1 - \gamma h \mathcal{J}_f)K_2 &= a_2 h f(y_n + a_{21}K_1) + b_2 J_1 g(y_n + b_{21}K_1), \\ y_{n+1} &= y_n + K_1 + K_2,\end{aligned}\tag{1.2}$$

where $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $y_0 = x_0$, constant step size h is defined as $h = t_n - t_{n-1}$, $J_1 = \Delta W_n$ and $\mathcal{J}_f$ is the Jacobian matrix of f .

Theorem 1.1. *Let, $f, g \in C^{1,3}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Then the stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type method (1.2) converges strongly to solutions of SDEs (1.1) with order 1.0 if the coefficients of the stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type method (1.2) satisfy the following equations*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1, & b_1 + b_2 = 1, & b_1 b_2 b_{21} = \frac{1}{2}, \\ b_1^2 b_2 b_{21}^2 = \frac{1}{3}, & a_1 a_2 a_{21} + \gamma(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}. \end{cases}\tag{1.3}$$

Proof. The conditions in Theorem 1.1 are easily derived by comparing the coefficients of terms in the Itô-Taylor expansion of order 1.0 and the Taylor expansion of the numerical scheme (1.2). The solutions of system (1.3) are

$$b_1 = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{3}{4}, \quad b_{21} = \frac{8}{3}, \quad a_2 = 1 - a_1, \quad a_{21} = \frac{\frac{1}{2} - \gamma}{a_1(1 - a_1)},$$

which a_1 and γ are free parameters. Thus both the mean-square error with strong local order 1.0 and the local mean error with order 1.0

$$[\mathbb{E}(x(t) - y_{n+1})^2]^{1/2} = \mathcal{O}(h^{3/2}), \quad \mathbb{E}(x(t) - y_{n+1}) = \mathcal{O}(h^2),$$

hold. □

2. MEAN-SQUARE STABILITY ANALYSIS

In this section, we study the stability regions for methods (1.2) for the linear Stratonovich test equation

$$x(t) = \mu x(t)dt + \lambda x(t) \circ dW(t),\tag{2.1}$$

with the deterministic initial condition $x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. For $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ the solution of

$$x(t) = \exp(\lambda t + \mu W(t)),$$

is mean-square stable if and only if

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|x(t)|^2] = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu^2 < 0.\tag{2.2}$$

By applying the stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type method (1.2) to the linear test equation in (2.1) the approximate solution for methods (1.2) can be written in the follow form

$$y_{n+1} = (1 + K_1 + K_2)y_n,\tag{2.3}$$

where

$$K_1 = \frac{a_1 \lambda h + b_1 \mu \sqrt{h} \xi}{1 - \gamma \lambda h}, \quad K_2 = \frac{a_2(1 + a_{21}K_1)\lambda h + b_2(1 + b_{21}K_1)\mu \sqrt{h} \xi}{1 - \gamma \lambda h}.$$

By squaring both sides of equation (2.3) and taking its expectation, equation (2.3) can be written in the form of $\mathbb{E}[y_{n+1}^2] = D(h, \lambda, \mu)\mathbb{E}[y_n^2]$. Then, by applying the changes of variables of $u = \lambda h$ and $v = \mu^2 h$ to the $D(h, \lambda, \mu)$ the stability function for our method is

$$\mathcal{D}(u, v) = A^2 + (B^2 + 2AC)v + 3C^2v^2, \quad (2.4)$$

where $A = 1 + \frac{1}{1-\gamma u} + \frac{\frac{1}{2}-\gamma}{(1-\gamma u)^2}u^2$, $B = \frac{1}{1-\gamma u} + \frac{b_1 a_2 a_{21} + a_1 b_2 b_{21}}{(1-\gamma u)^2}u$, $C = \frac{1}{2(1-\gamma u)^2}$. Figure 1

FIGURE 1. Comparison of stability regions of the method (1.2) (shaded areas) with the stability region of the problem (squared triangle).

gives the MS-stability regions of the method (1.2), for some free parameters. The squared triangle shows the MS-stability region of the linear test equation (2.1) and the shaded areas shows the MS-stability regions of the our method. Comparison of the illustrated regions in Figure 1 shows that the method (1.2) have big regions of MS-stability, when $\gamma \rightarrow 1$.

3. NUMERICAL RESULTS

This section gives some numerical experiments to illustrate our theoretical results.

Example 3.1. Consider the nonlinear SDE

$$dx(t) = -\alpha(1 - x^2(t))dt + \beta(1 - x^2(t)) \circ dW(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

with exact solution

$$x(t) = \frac{(1 + x_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + x_0 - 1}{(1 + x_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) - x_0 + 1}.$$

Let $x_0 = 0$ and $h = 10^{-2} \times 2^{3-k}$, $k = 1, \dots, 5$ in turn. The numerical results for different

FIGURE 2. Strong MSE for nonlinear SDE (3.1).

values of α and β are shown in Figure 3.1. In this figure, MSE is the mean-square of error.

Example 3.2. For investigate the numerical stability of the our scheme (1.2), we consider the following scalar SDE

$$dx(t) = -2x(t)(1 + |x(t)|)dt + x(t) \circ dW(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 20]. \quad (3.2)$$

We test the stability of the methods Milstein and (1.2) with different stepsizes. We take $h = 1, 1/2, 1/4$ and generate 5000 sample paths for each numerical method. The mean-square stability of the numerical solution is plotted in Figure 3. Figure 3 shows that the

FIGURE 3. Computer simulation of $\mathbb{E}[|x(t)|^2]$ for methods Milstein and (1.2) with different stepsizes.

our method is all mean-square stable under the stepsizes $h = 1, 1/2, 1/4$.

REFERENCES

1. A. ABDULLE, S. CIRILLI, *S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations*, SIAM J. Sci. Comput., 30 (2008), pp. 997-1014.
2. S. AMIRI, S.M. HOSSEINI, *Stochastic Runge-Kutta Rosenbrock type methods for SDE systems*, Appl. Numer. Math., 115 (2017), pp. 1-15.
3. S. AMIRI, S.M. HOSSEINI, *A class of balanced stochastic Runge-Kutta methods for stiff SDE systems*, Numer. Algor., 69 (2015), pp. 531-552.
4. E. BUCKWAR, A. RÖSSLER AND R. WINKLER, *Stochastic Runge-Kutta methods for Itô SODEs with small noise*, SIAM J. Sci. Comput. 32(4) (2010), pp. 1789-1808.
5. K. BURRAGE, T.H. TIAN, *Stiffly accurate Runge Kutta methods for stiff stochastic differential equations*, Comput. Phys. Commun., 142 (2001), pp. 186-190.
6. F. COSTABILE, A. NAPOLI, *Economical Runge-Kutta methods with strong global order one for stochastic differential equations*, Appl. Numer. Math., 61 (2011), pp. 160-169.
7. K. DEBRABANT, A. RÖSSLER, *Families of efficient second order Runge-Kutta methods for the weak approximation of Itô stochastic differential equations*, Appl. Numer. Math., 59 (2009) pp. 582-594.
8. P.E. KLOEDEN, E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
9. Y. KOMORI, K. BURRAGE, *Strong first order S-ROCK methods for stochastic differential equations*, J. Comput. Appl. Math., 242 (2013), pp. 261-274.
10. Y. KOMORI, *Weak first-or second-order implicit Runge-Kutta methods for stochastic differential equations with a scalar Wiener process*, J. Comput. Appl. Math., 217 (2008), pp. 166-179.
11. A. RÖSSLER, *Runge-Kutta methods for Stratonovich stochastic differential equation systems with commutative noise*, J. Comput. Appl. Math., 164 (2004), pp. 613-627.
12. A. XIAO, X. TANG, *High strong order stochastic Runge-kutta method for stratonovich stochastic differential equations with scalar noise*, Numer. Algor., 72 (2016), pp. 259-296.

CONVERGENCE AND STABILITY OF IMPROVED EULER-MARUYAMA APPROXIMATION METHOD FOR STIFF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

KAZEM NOURI¹, HASSAN RANJBAR² AND LEILA TORKZADEH³

*Department of Mathematics, Faculty of Mathematics,
Statistics and Computer Sciences, Semnan University, P. O. Box 35195-363, Semnan, Iran.*
¹knouri@semnan.ac.ir, ²hranjbar@semnan.ac.ir, ³torkzadeh@semnan.ac.ir

ABSTRACT. Stiff stochastic differential equations are usually solved numerically by (semi-)implicit methods, and many numerical methods for solving of these case of stochastic differential equations have been designed. This paper presents a family of explicit improved Euler-Maruyama approximation method for solution of the stiff stochastic differential equations. We apply the linear growth bounds and Lipschitz conditions on the drift and diffusion coefficients for analytical study of the stochastic differential equation. One of the important points in the study of stochastic differential equations is the investigation of numerical solution behavior from the point of view of convergence. The strong mean-square convergence of our new method is analyzed. Another important issue for stiff stochastic differential equations is to check the stability of a numerical method. To study the mean-square stability property of our method, we consider a one-dimensional linear Itô test stochastic differential equation with a single noise term. A numerical example is given to illustrate the accuracy and efficiency of the proposed method.

Keywords: Stiff stochastic differential equation, Strong convergence, Mean-square stability.

MSC2010: 60H10, 41A25, 93E15.

1. INTRODUCTION

Consider the non-autonomous Itô stochastic differential equation (SDE)

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1.1)$$

where $W(t)$ is an one dimensional Wiener process, the functions f and g are assumed to satisfy the standard conditions to guarantee the existence of unique solution of the SDE (1.1). The (semi-)implicit methods will face a increase the computational cost when the SDE (1.1) is stiff [9]. Therefore, explicit schemes with extended stability regions could greatly help to solution of stiff SDEs, for example see [1, 3, 6].

For solving SDE (1.1), we consider an explicit improved Euler-Maruyama (EIM) method which defines an approximation process $Y_k \approx X(t_k)$ with $Y_0 = X_0$ and

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{hf(t_k, Y_k) + g(t_k, Y_k)\Delta W_k}{1 + h|\theta f'(t_k, Y_k) - \sigma g'^2(t_k, Y_k)|}, \quad \theta, \sigma \in [0, 1], \quad (1.2)$$

for $k = 0, 1, \dots, N$, and $N = 1, 2, \dots$, where $h = \frac{T-t_0}{N}$ and $\Delta W_k = W_{k+1} - W_k$. Further, f' and g' are is the Jacobian matrix of f and g , respectively. The choice $\theta = \sigma = 0$ gives the Euler-Maruyama method.

2. STRONG CONVERGENCE ANALYSIS

In this section, we prove the mean-square convergence of the EDEM method (1.2) by the following propositions and convergence lemma given in [7].

Proposition 2.1. *The functions f and g in SDE (1.1) satisfy Lipschitz conditions*

$$|f(t, x) - f(t, y)|^2 \vee |g(t, x) - g(t, y)|^2 \leq C_1 |x - y|^2, \quad (2.1)$$

and linear growth bounds

$$|f(t, x)|^2 \vee |g(t, x)|^2 \leq C_2 (1 + |x|^2), \quad (2.2)$$

where positive constants C_1 and C_2 are independent of variables $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 2.2. *Assume that the functions $f(t, X(t))$ and $g(t, X(t))$ in SDE (1.1) have continuously bounded derivatives up to the required order for the following analysis, and the coefficient functions in Itô-Taylor expansions (up to a sufficient order) are globally Lipschitz (2.1) and satisfy the linear growth (2.2) conditions.*

Lemma 2.3. *Assume for a one-step discrete time approximation Y that the local mean error and mean-square error for all $N = 1, 2, \dots$, and $k = 0, 1, \dots, N - 1$ satisfy the estimates*

$$|\mathbb{E}((Y_{k+1} - X(t_{k+1})) | Y_k = X(t_k))| \leq \mathcal{K}(1 + |Y_k|^2)^{1/2} h^{p_1}, \quad (2.3)$$

and

$$|\mathbb{E}(|Y_{k+1} - X(t_{k+1})|^2 | Y_k = X(t_k))|^{1/2} \leq \mathcal{K}(1 + |Y_k|^2)^{1/2} h^{p_2}, \quad (2.4)$$

when $p_2 \geq \frac{1}{2}$ and $p_1 \geq p_2 + \frac{1}{2}$. Then

$$|\mathbb{E}(|Y_n - X(t_n)|^2 | Y_0 = X(t_0))|^{1/2} \leq \mathcal{K}(1 + |Y_0|^2)^{1/2} h^{p_2 - 1/2},$$

holds for each $n = 0, 1, \dots, N$. Here $\mathcal{K}$ is independent of h but dependent on the length of the time interval $T - t_0$.

Theorem 2.4. *Let $0 < \theta, \sigma \leq 1$, than under the Propositions (2.1) and (2.2) the numerical solution produced by the method (1.2) converges to the exact solution of SDE (1.1) in the MS sense with strong order of convergence $\frac{1}{2}$.*

Proof. First, We will prove that the inequality holds for the EDEM method (1.2) with $p_1 = 2$. For this purpose, applying Euler-Maruyama approximation step

$$Y_{k+1}^{\text{EM}} = Y_k^{\text{EM}} + hf(t_k, Y_k^{\text{EM}}) + g(t_k, Y_k^{\text{EM}})\Delta W_k, \quad (2.5)$$

with the local mean and mean-square errors

$$\left| \mathbb{E} \left((Y_{k+1}^{\text{EM}} - X(t_{k+1})) \middle| Y_k^{\text{EM}} = X(t_k) \right) \right| = \mathcal{O}(h^2) \quad (2.6a)$$

$$\left| \mathbb{E} \left(|Y_{k+1}^{\text{EM}} - X(t_{k+1})|^2 \middle| Y_k^{\text{EM}} = X(t_k) \right) \right|^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(h), \quad (2.6b)$$

respectively. Then from (2.6a), we have

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left| \mathbb{E} \left[(Y_{k+1} - X(t_{k+1})) \middle| Y_k = X(t_k) \right] \right| \\ &\leq \left| \mathbb{E} \left[(Y_{k+1}^{\text{EM}} - X(t_{k+1})) \middle| Y_k^{\text{EM}} = X(t_k) \right] \right| + \left| \mathbb{E} \left[(Y_{k+1} - Y_{k+1}^{\text{EM}}) \middle| Y_k = Y_k^{\text{EM}} \right] \right| \\ &\leq \mathcal{O}(h^2) + \delta_2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Using linear growth bounds (2.2) and $\mathbb{E}[\Delta W_k] = 0$, one can derive that

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \left| \mathbb{E} \left[(Y_{k+1} - Y_{k+1}^{\text{EM}}) \middle| Y_k = Y_k^{\text{EM}} \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[h(hf(t_k, Y_k) + g(t_k, Y_k)\Delta W_k) \frac{|\theta f'(t_k, Y_k) - \sigma g'^2(t_k, Y_k)|}{1 + h|\theta f'(t_k, Y_k) - \sigma g'^2(t_k, Y_k)|} \right] \right| \\ &\leq h^2 \frac{\mathcal{L}|\theta - \sigma\mathcal{L}|}{1 + h\mathcal{L}|\theta - \sigma\mathcal{L}|} \sqrt{\mathcal{K}_2} (1 + |Y_k|^2)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Hence, from inequalities (2.7) and (2.8), we obtain $p_1 = 2$.

We prove that the inequality (2.4) with $p_2 = 1$ holds for the EIEM method. For this aim, using Euler-Maruyama approximation step (2.5) and inequality $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ we divide (2.4) into two parts as follows

$$\begin{aligned}\delta_3 &= \left| \mathbb{E} \left[|Y_{k+1} - X(t_{k+1})|^2 \middle| Y_k = X(t_k) \right] \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left| \mathbb{E} \left[|Y_{k+1}^{\text{EM}} - X(t_{k+1})|^2 \middle| Y_k^{\text{EM}} = X(t_k) \right] \right|^{\frac{1}{2}} + \left| \mathbb{E} \left[|Y_{k+1} - Y_{k+1}^{\text{EM}}|^2 \middle| Y_k = Y_k^{\text{EM}} \right] \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mathcal{O}(h) + \sqrt{\delta_4},\end{aligned}\quad (2.9)$$

Using linear growth bounds (2.2) and $\mathbb{E}[(\Delta W_k)^2] = 0$, we can write

$$\begin{aligned}\delta_4 &= \mathbb{E} \left[|Y_{k+1} - Y_{k+1}^{\text{EM}}|^2 \middle| Y_k = Y_k^{\text{EM}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left| h(hf(t_k, Y_k) + g(t_k, Y_k)\Delta W_k) \frac{|\theta f'(t_k, Y_k) - \sigma g'^2(t_k, Y_k)|}{1 + h|\theta f'(t_k, Y_k) - \sigma g'^2(t_k, Y_k)|} \right|^2 \right] \\ &\leq h^3 \frac{\mathcal{L}^2|\theta - \sigma\mathcal{L}|^2}{(1 + h\mathcal{L}|\theta - \sigma\mathcal{L}|)^2} \mathcal{K}_2 (1 + |Y_k|^2).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Thus the inequality (2.4) with $p_2 = 1$ holds for the EIEM method.

So, in Theorem 2.4 we can choose $p_2 = 1$ along with $p_1 = 2$ to establish strong order 1/2 of the EIEM method. $\square$

3. LINEAR MEAN SQUARE STABILITY PROPERTIES

For mean-square analysis of EIEM method (1.2), we take a one-dimensional linear Itô test SDE with a single noise term

$$X(t) = \mu X(t)dt + \lambda X(t)dW(t), \quad (3.1)$$

where the parameters $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. The zero solution of (3.1) is said to be mean-square (MS) stable if $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X(t)|^2 = 0$. It is well known [2] that the zero solution of (3.1) is MS-stable if and only if

$$|\mu|^2 + 2\lambda < 0.$$

Saito and Mitsui [10] introduce the following definition of MS-stability for a numerical scheme.

Definition 3.1. The numerical method is said to be MS-stable if

$$\overline{D}(\lambda, \mu, h) = \mathbb{E}[D^2(\lambda, \mu, h, \xi_k)] < 1, \quad \xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

where $\overline{D}(\lambda, \mu, h)$ is called MS-stability function and the set $\mathfrak{D}_{MS} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \overline{D}(\lambda, \mu, h) < 1\}$ is called the MS-stability domain of the numerical method.

Applying the EIEM method (1.2) to the linear test (3.1), we obtained

$$Y_{k+1} = D(\lambda, \mu, h, \xi_k)Y_k,$$

where

$$D(\lambda, \mu, h, \xi_k) = 1 + \frac{\lambda h + \mu \sqrt{h} \xi_k}{1 + h|\theta \lambda - \sigma \mu|}.$$

Now, using Definition 3.1 yields

$$\begin{aligned} \overline{D}(\lambda, \mu, h) &= \mathbb{E}[|D(\lambda, \mu, h, \xi_k)|^2] \\ &= \frac{(1 + h\lambda + h|\theta \lambda - \sigma \mu|)^2 + \mu^2 h}{(1 + h|\theta \lambda - \sigma \mu|)^2}, \end{aligned}$$

where used $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ and $\mathbb{E}[(\xi_k)^2] = 1$.

Figure 1 displays the MS-stability region of the EIEM method showing better stability properties of the test equation (3.1) when $\theta, \sigma \rightarrow 1$.

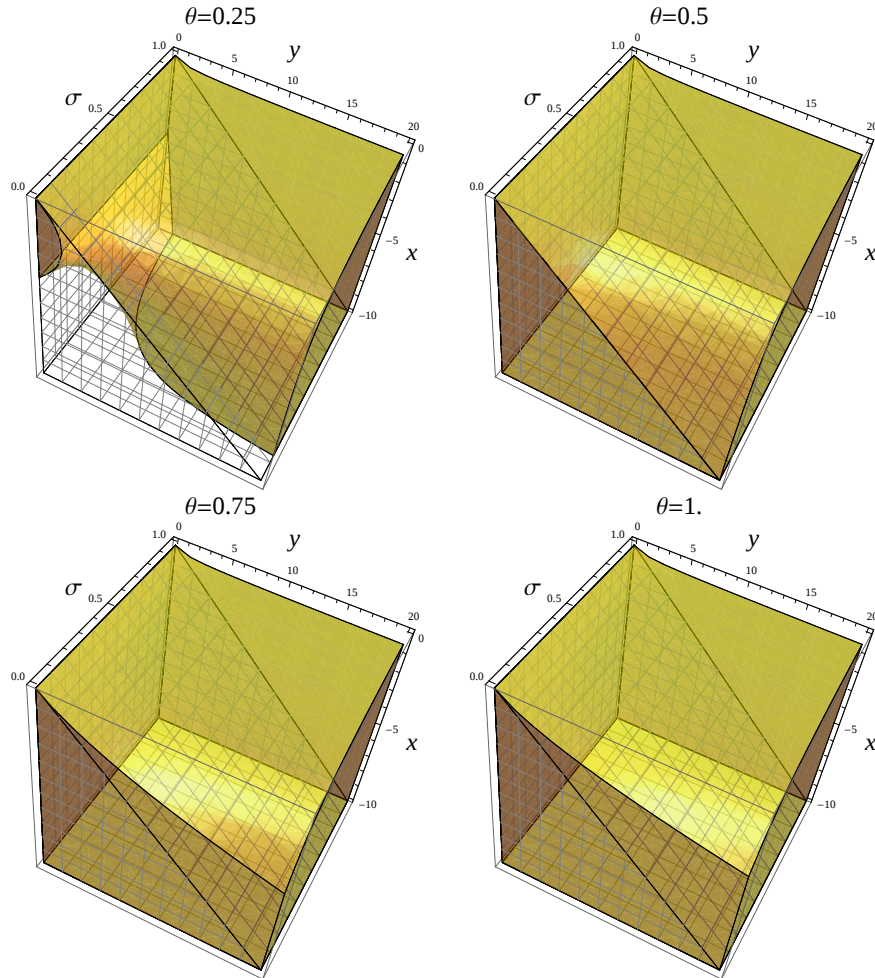


FIGURE 1. Comparison between the MS-stability region of the test equation (3.1) (gridded) and the stability regions of EIEM method (1.2).

4. NUMERICAL RESULTS

Example 4.1. Consider the following nonlinear SDE [5]

$$dX(t) = -(\alpha + \beta^2 X(t)) (1 - X^2(t)) dt + \beta (1 - X^2(t)) dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.1)$$

with exact solution

$$X(t) = \frac{(1 + X_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) + X_0 - 1}{(1 + X_0) \exp(-2\alpha t + 2\beta W(t)) - X_0 + 1}.$$

In Tabel 1 and Figure 2, we use the parameters different values of the stiffness parameters α and β to demonstrate the means-quare errors (MSE) of the EIEM (1.2), Tamed [4], (1.5)-sin [11] and (1.5)-tanh [11] methods at the terminal time $T = hN = 1$ and $X_0 = 0$.

TABLE 1. The MSE of the various methods for nonlinear SDE (4.1) with $\alpha = \beta = 1.0$.

Methods\h	50	100	200	400	800	1600	3200	6400
EIEM with $\theta = \sigma = 1$	0.0474	0.0338	0.0235	0.0166	0.0121	0.0084	0.0059	0.0041
Tamed	0.0498	0.0348	0.0238	0.0167	0.0122	0.0084	0.0059	0.0041
(1.5)-sin	0.0481	0.0341	0.0236	0.0166	0.0121	0.0084	0.0059	0.0041
(1.5)-tanh	0.0474	0.0339	0.0235	0.0166	0.0121	0.0084	0.0059	0.0041

FIGURE 2. Value of the mean-square errors (MSE) of the EIEM (1.2) with $\theta = \sigma = 0.5$, Tamed [4], (1.5)-sin [11] and (1.5)-tanh [11] methods for one dimensional nonlinear SDE (4.1) with $\alpha = -2.0$ and $\beta = 0.1$.

REFERENCES

1. A. ABDULLE, S. CIRILLI *S-ROCK: Chebyshev methods for stiff stochastic differential equations*, SIAM J. Sci. Comput., 30, (2008) pp. 997–1014.
2. T.C. GARD, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Dekker, New York, 1988.
3. A. HAGHIGHI, *New S-ROCK methods for stochastic differential equations with commutative noise*, Iran. J. Numer. Anal. Optim., 9(1), (2019), pp. 105–126
4. M. HUTZENTHALER, A. JENTZEN, *Numerical Approximations of Stochastic Differential Equations with Non-Globally Lipschitz Continuous Coefficients*, American Mathematical Society, Providence, 2015. Mem. Amer. Math. Soc., 236 (1112) (2015), v+99.
5. P.E. KLOEDEN, E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
6. Y. KOMORI, K. BURRAGE, *Strong first order s-ROCK methods for stochastic differential equations* J. Comput. Appl. Math., 242, (2013), 261–274.
7. G.N. MILSTEIN, M.V. TRETYAKOV, *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
8. K. NOURI, H. RANJBAR AND L. TORKZADEH, *Improved Euler-Maruyama method for numerical solution of the Itô stochastic differential systems by composite previous-current-step idea*, Mediterr. J. Math., 15(3), (2018), 140.
9. K. NOURI, H. RANJBAR AND L. TORKZADEH, *Study on split-step Rosenbrock type method for stiff stochastic differential systems*, Int. J. Comput. Math., 97(4), (2020), pp. 818–836.
10. Y. SAITO, T. MITSUI, *Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 33, (1996), pp. 551–560.
11. Z. ZHANG, H. MA, *Orde-preserving strong schemes for SDEs with locally Lipschitz coefficients*, Appl. Numer. Math., 112 (2017), pp. 1–16.

NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND STABILITY ANALYSIS

OMID FARKHONDEH ROUZ¹, DAVOOD AHMADIAN², RAMIN AZARI^{3*}

¹ *o.farkhonderooz@tabrizu.ac.ir*

² *d.ahmadian@tabrizu.ac.ir*

³ *raminazari107@gmail.com*

ABSTRACT. In this paper, we investigate the exponential mean square stability for both the solution of variable order fractional stochastic differential equations (FSDEs) with Poisson jump, as well for the compensated Milstein scheme implemented of the proposed model. First, we prove that the considered model has the property of exponential mean square stability. Moreover, it is shown that the compensated Milstein scheme can inherit the exponential mean square stability by using the variable order fractional stochastic differential equations with Poisson jump in the paper. Eventually, numerical solution are provided to show the effectiveness of the theoretical results. Also, by introducing the compensated Milstein scheme and by using some numerical integration technique as well approximating the integro part of the model by the simple trapezoidal rule, we obtain the same exponential mean square stability property for some restrictive stepsizes. Finally, we proved the exponential mean square stability by using the compensated Milstein method.

Keywords: Compensated Milstein methods, Mean-Square stability, Variable-order fractional stochastic, Poisson jump

Classification: 34K37, 34K50, 65L20.

1. INTRODUCTION

In special cases, fractional stochastic differential equations (FSDEs) with jump are a type of stochastic differential equations (SDEs), stochastic models have been used in many applications such as social sciences, physical sciences, finance, control engineering, mechanics, electricity and industry. Stability analysis of stochastic models is one of the most important research topics. In recent years, more and more researchers have been interested in studying fractional differential calculus. It can be said that integer calculus and conventional differential equations are no longer suitable tools for calculating many systems and processes, such as the viscoelastic system ([1], [2], [3] and [4]).

In this article we consider jump-diffusion Itô stochastic differential equations (FSDEs) of the form:

$$\begin{aligned} dx(t) = & \left(-\mu_0^r \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t^-) + f(x(t^-)) \right) dt \\ & + g(t, x(t^-)) dW(t) + h(t, x(t^-)) dN_\lambda(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.1)$$

* Speaker.

where $x(0) = x_0$, $t \in [0, T]$ and constants $\mu \geq 0$. Also Riemann-Liouville fractional differential operator ${}_0^r\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}$ which is defined as follows:

$${}_0^r\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}x(t) = \frac{d}{dt}({}_0\mathcal{I}_t^{1-\alpha(t)}x(t)), \quad (1.2)$$

where

$${}_0\mathcal{I}_t^{1-\alpha(t)}x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{\alpha(t)}} ds, \quad (1.3)$$

and $\alpha \in C^1[0, T]$, C^1 the space of continuously differentiable functions on $[0, T]$ with that $0 \leq \alpha(t) \leq \alpha^*$ for each $0 \leq \alpha^* \leq 1$, also $f(t, x(t^-)) : [0, T] \times \mathbb{R}$ is the drift coefficient, $g(t, x(t^-)) : [0, T] \times \mathbb{R}$ is the diffusion coefficient, $h(t, x(t^-)) : [0, T] \times \mathbb{R}$ is the jump coefficient. Respectively $W(t)$ and $N_\lambda(t)$ are a standard Wiener process and homogeneous Poisson process with jump intensity λ that are independent of each other and defined on an complete probability space $(\varphi, \mathcal{F}_t, P)$ with filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ that are increasing and right-continuous. x_0 be $\mathcal{F}_0$ -measurable and $(\mathcal{F}_0$ contains all $\mathbb{P}$ -null sets) independent of $W(t)$ and $N_\lambda(t)$ for all $t \in [0, T]$ and $\mathbb{E}|x_0|^2 < \infty$.

Assumption: Assume that there exists a symmetric, nonnegative constants $\beta_i, i = 1, 2, \dots, 8$ such that for all $x \in \mathbb{R}_n$ and $t > 0$:

$$\begin{aligned} 2xf(x) &\leq -\beta_1 x^2, \\ |f_\lambda(x)|^2 &\leq \beta_2 x^2, \\ |g(x)|^2 &\leq \beta_3 x^2, \\ |h(x)|^2 &\leq \beta_4 x^2, \\ |(L_{(1)}g)(x)|^2 &\leq \beta_5 x^2, \\ |(L_{(-1)}g)(x)|^2 &\leq \beta_6 x^2, \\ |(L_{(1)}h)(x)|^2 &\leq \beta_7 x^2, \\ |(L_{(-1)}h)(x)|^2 &\leq \beta_8 x^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Let

$$k(t, s) := \frac{-\mu}{\Gamma(1-\alpha(t))(t-s)^{\alpha(t)}}.$$

Now we get an integral from equation (1.1), introduce the compensated Poisson process $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ and $f_\lambda(x(s^-)) = f(x(s^-)) + \lambda h(x(s^-))$, we have:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t k(t, s)x(s^-)ds + \int_0^t f_\lambda(x(s^-))ds + \int_0^t g(x(s^-))dW(s) + \int_0^t h(x(s^-))d\tilde{N}_\lambda(t). \quad (1.5)$$

2. MEAN-SQUARE STABILITY

We first introduce the compensated Itô-Taylor expansion for the solution of jump-diffusion Itô FSDEs (2.1). Such stochastic expansion generalizes the deterministic Taylor formula and the Itô-Taylor expansion for diffusions to the case of FSDEs with Poisson jumps, and will be used to construct the compensated Milstein methods. We place $F_\lambda(x(t)) = k(t, s)x(s) + f(x(s))$. Let $u(t, x)$ be twice continuously differentiable in x and

once in t , and $X(t)$ be the solution of (2.1). It follows from the stochastic jump-diffusion chain rule that:

$$\begin{aligned} u(x(t)) &= u(x(0)) + \int_0^t L_{(\tilde{0})}u(s, x(s^-))ds + \int_0^t L_{(1)}u(s, x(s^-))dW(s) \\ &\quad + \int_0^t L_{(-1)}u(s, x(s^-))d\tilde{N}_\lambda(s), \end{aligned} \quad (2.1)$$

where

$$L_{(j)}u(t, x) = \begin{cases} u'_t(t, x) + F_\lambda(t, x)u'_x(t, x) + \frac{1}{2}g^2(t, x)u''_{xx}(t, x), & j = 0, \\ g(t, x)u'_x(t, x), & j = 1, \\ u(t, x + h(t, x)) - u(t, x), & j = -1, \end{cases} \quad (2.2)$$

We consider interval $[0, T]$ and discretize it $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ and also consider uniform stepsize $\Delta t = \frac{T}{N}$ for a fixed $N \in \mathcal{N}$. Let $t_n = n\Delta t$ and $x_n \approx x(t_n)$ for $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Let

$$b_{n+1,n} = -\frac{\mu(t_{n+1} - t_n)^{1-\alpha(t_{n+1})}}{\Gamma(1 - \alpha(t_{n+1}))(1 - \alpha(t_{n+1}))} = -\frac{\mu\Delta t^{1-\alpha(t_{n+1})}}{\Gamma(1 - \alpha(t_{n+1}))(1 - \alpha(t_{n+1}))}. \quad (2.3)$$

The Milstein method for the solution of $\{X_n\}$ relation (1.1) is retain as follows:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + b_{n+1,n}x_n + f_\lambda(x_n)\Delta t + g(x_n)\Delta W_n + h(x_n)\Delta\tilde{N}_{\lambda,n} + (L_{(1)}g)(x_n)(\Delta W_n^2 - \Delta t) \\ &\quad + (L_{(-1)}g)(x_n)D_n + (L_{(1)}h)(x_n)D'_n + (L_{(-1)}h)(x_n)(\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}^2 - \Delta N_n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

where

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{i=N_\lambda(t_n)+1}^{N_\lambda(t_{n+1})} [W(\Gamma(i)) - W(t_n)] - \lambda \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(s)ds + \lambda W(t_n)\Delta t \\ D'_n &= \Delta W_n \Delta\tilde{N}_{\lambda,n} - D_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

and $\Gamma(i)$ is the instant of the $i - th$ jump of the Poisson process.

Theorem Let (1.4) hold. Then, there exists a step-size bound Δt^* , such that for any $\Delta t \in (0, \Delta t^*)$ we have:

$$\mathbb{E}|x_n|^2 \leq e^{-\eta^*T}C(\psi), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1}|^2 &= |x_n|^2 + |b_{n+1,n}x_n|^2 + |f_\lambda(x_n)\Delta t|^2 + |g(x_n)\Delta W_n|^2 + |h(x_n)\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}|^2 \\ &\quad + \left|\frac{1}{2}(L_{(1)}g)(x_n)(\Delta W_n^2 - \Delta t)\right|^2 + |(L_{(-1)}g)(x_n)D_n|^2 \\ &\quad + \left|(L_{(1)}h)(x_n)(\Delta W_n \Delta\tilde{N}_{\lambda,n} - D_n)\right|^2 + \left|\frac{1}{2}(L_{(-1)}h)(x_n)(\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}^2 - \Delta N_n)\right|^2 \\ &\quad + 2b_{n+1,n}x_n^2 + 2x_nf_\lambda(x_n)\Delta t + 2b_{n+1,n}x_nf_\lambda(x_n)\Delta t + m_n. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notice that ΔW_i , $\Delta\tilde{N}_{\lambda,i}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$ are independent and:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\Delta W_n| &= 0, \quad \mathbb{E}|\Delta W_n^2| = \Delta t, \quad \mathbb{E}|\Delta W_n^4| = 3(\Delta t)^2 \\ \mathbb{E}|\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}| &= 0, \quad \mathbb{E}|\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}^2| = \lambda\Delta t, \quad \mathbb{E}|\Delta\tilde{N}_{\lambda,n}^4| = \lambda\Delta t(1 + 3\lambda\Delta t). \end{aligned}$$

We take expected from the sides of the equation (2.7) and we obtain $\mathbb{E}|m_n| = 0$, therefore due to (1.4), we calculate:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|x_{n+1}|^2 &\leq \mathbb{E}|x_n|^2 + 4\mathbb{E}|b_{n+1,n}x_n|^2 + 2\Delta t^2\beta_2\mathbb{E}|x_n^2| + \Delta t\beta_3\mathbb{E}|x_n^2| + \lambda\Delta t\beta_4\mathbb{E}|x_n^2| \\
&\quad + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta_5\mathbb{E}|x_n^2| + C\Delta t^2\beta_6\mathbb{E}|x_n^2| + C\Delta t^2\beta_7\mathbb{E}|x_n^2| \\
&\quad + \frac{1}{2}\lambda\Delta t(1 + \lambda\Delta t)\beta_8\mathbb{E}|x_n^2| - \Delta t\beta_1\mathbb{E}|x_n^2|,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

multiplying both sides of (2.8) times $M^{\Delta t}$ and add $-\mathbb{E}|x_n|^2$ to both sides of equation (2.6) and let M denotes any real number such that $M \geq 1$. By multiplying both sides of (2.8) times $M^{n\Delta t}$ and summing up from $i = 0$ to $i = k$ yields, now by Cauchy-Schwarz inequality, we have:

$$\begin{aligned}
M^{(n+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_{n+1}|^2 &\leq \mathbb{E}|x_0|^2 + \frac{(1 - M^{-\Delta t})}{\Delta t}\Delta t \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i|^2 + 4M_\mu\Delta t \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}(x_i)^2 \\
&\quad + \Delta t^2\beta_2 2 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| + \Delta t\beta_3 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| \\
&\quad + \lambda\Delta t\beta_4 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta_5 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| \\
&\quad + C\Delta t^2\beta_6 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| + C\Delta t^2\beta_7 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| \\
&\quad + \frac{1}{2}\lambda\Delta t(1 + \lambda\Delta t)\beta_8 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| - \Delta t\beta_1 \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2| \\
&\leq \mathbb{E}|x_0|^2 + h(M) \sum_{i=0}^n M^{(i+1)\Delta t}\mathbb{E}|x_i^2|,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

where

$$h(M) = \left(\frac{(1 - M^{-\Delta t})}{\Delta t} + 4M_\mu + 2\Delta t\beta_2 + \beta_3 + \lambda\beta_4 + \frac{1}{2}\Delta t\beta_5 + C\Delta t\beta_6 + C\Delta t\beta_7 - \beta_1 \right) \Delta t.$$

Then, for any time step $\Delta t < \Delta t^*$, we have:

$$h(1) = (4M_\mu + 2\Delta t\beta_2 + \beta_3 + \lambda\beta_4 + \frac{1}{2}\Delta t\beta_5 + C\Delta t\beta_6 + C\Delta t\beta_7 - \beta_1)\Delta t \leq 0, \tag{2.10}$$

therefore

$$\begin{aligned}
h(1) &= (4M_\mu + 2\Delta t\beta_2 + \beta_3 + \lambda\beta_4 + \frac{1}{2}\Delta t\beta_5 + C\Delta t\beta_6 + C\Delta t\beta_7 - \beta_1)\Delta t \\
&= (\Delta t(2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_5 + C(\beta_6 + C\beta_7)) + 4M_\mu + \beta_3 + \lambda\beta_4 - \beta_1)\Delta t \leq 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

so for $\Delta t \leq \frac{\beta_1 - 4M_\mu - \beta_3 - \lambda\beta_4}{2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_5 + C(\beta_6 + C\beta_7)}$, $h(1) \leq 0$.

We have $h(\underline{M}) > 0$ (meaning that $\lim_{m \rightarrow +\infty} h(M) > 0$ if $M = \infty$), $h'(M) > 0$ for any $M > 1$:

$$\frac{dh(M)}{dM} = \left(\frac{(1 + \Delta t M^{-1-\Delta t})}{\Delta t} \right) \Delta t = 1 + \Delta t M^{-1-\Delta t} \geq 0. \tag{2.12}$$

So for any time step $\Delta t < \Delta t^*$, there is a unique positive constant η^* such that $\eta^* \in (1, \underline{M})$ and $h(e^{\eta^*}) = 0$, taking $M = e^{\eta^*}$ in (2.9) yields:

$$e^{\eta^*(n+1)\Delta t} \mathbb{E}|x_{n+1}|^2 \leq \mathbb{E}|x_0|^2 = C(\boldsymbol{\psi}), \quad (2.13)$$

therefore we obtain:

$$\mathbb{E}|x_n|^2 \leq e^{-\eta^*T} C(\boldsymbol{\psi}). \quad (2.14)$$

REFERENCES

1. RL. BAGLEY, RA. CALICO, *Fractional order state equations for the control of viscoelastic structures*, J.Guid.Control Dyn , 14(2) (1991), 304-311.
2. D. AHMADIAN, O. FARKHONDEH ROUZ , *Exponential mean-square stability of numerical solutions for stochastic delay integro-differential equations with Poisson jump*, j.inequalities and applications. , 186 (2020), 304-311.
3. RC. KOELLER, *Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*, J. Appl. Mech., 51 (1984), 299–307 .
4. PE. KLOEDEN , E. PLATEN, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Berlin: Springer, 1992.

EVALUATION OF A VARIABLE ANNUITY PORTFOLIO WITH DEATH BENEFIT USING MACHINE LEARNING METHODS

MOHAMMAD HOSSEIN AGHABOZORG AFJEH¹, MOHAMMAD JELODARI MAMAGHANI²,
MORTEZA AALABAF-SABAGHI^{3*}

¹ address of first author.

mh.afjeh@gmail.com

² address of second author.

j_mamaghani@atu.ac.ir

³ address of third author.

aalabaf@atu.ac.ir

ABSTRACT. Equity-linked insurance, also known as Variable annuities (VA), are modern life insurance contracts geared with investment vehicles. Although these contracts are not fully introduced in the insurance market of Iran, according to their significant popularity among developed countries, it is expected that these contracts may have a considerable market share in the future. Due to the nature of these contracts, the area of research on VAs is an interdisciplinary area of actuarial science and mathematical finance, while the most important objective is to evaluate options included in VAs. In this research, our main purpose is to study and elaborate various applications of data clustering and machine learning on the estimation of the risk charge of a large portfolio of VAs with guaranteed minimum death benefits. The results of this research indicate that by applying machine learning algorithms, we reach the estimated risk charge of the portfolio in considerably shorter time while the difference between estimated value and calculated value by Monte Carlo simulation is not significant. This will enable us to modify its application for the Iranian Insurance industry.

Keywords: Variable Annuities, Equity-linked Insurance, Machine Learning, Monte Carlo Simulation.

Classification: C15, C45, G22.

1. INTRODUCTION

Variable annuity (VA) with embedded guarantees which are also known as guaranteed investment fund, unit-linked life insurance, or equity-linked life insurance has become popular around the world in recent years [1]. There are certain guarantees that are included in these policies by insurers, such as guaranteed minimum death benefit (GMDB), guaranteed minimum accumulation benefit (GMAB), guaranteed minimum income benefit (GMIB) and guaranteed minimum withdrawal benefit (GMWB) as riders. An annuity rider is a provision you can add to your annuity contract to ensure it meets your financial needs. Stochastic simulation and option pricing are two common approaches that have been used for valuation of VA guarantees [3]. Researchers have extensively studied on how to evaluate and price VAs over the past decades. Among these research, the focus of most of these studies is the evaluation of a single contract. As an example, a general method for evaluating guarantees embeded in variable annuities proposed by Bauer

* Speaker.

et al.(2008) [2]. The complex structure of VA products and computational complexity of their accurate evaluation have compelled insurance companies to adopt Monte Carlo (MC) simulations to evaluate their large portfolios of VA products. Because the MC simulations are computationally demanding, insurance companies need more efficient valuation techniques [4]. However, machine learning models are useful for this purpose which provide methods to solve this problem. Since the valuation of a large variable annuity portfolio using traditional methods is very complicated and does not lead to a closed-form formula, machine learning methods are appropriate tools for evaluation of these portfolios with high accuracy and efficiency [7]. Here a stochastic model i.e., Black-Scholes model is used to simulate future performance of the fund and generate a sample of accumulated premiums of a VA contract at maturity. In practice, the Monte Carlo method is used to evaluate VA contracts. This paper is going to use machine learning techniques which do not require Monte Carlo method to calculate the risk-charge for every VA contract in large portfolios. As a result, this method is able to reduce the computing time significantly while the estimation is accurate enough. In this paper, the evaluation of a large VA portfolio is a four-step process while our focus is on a portfolio of VA contracts with guaranteed minimum death benefits. In addition, for the convenience of further computations on next levels, it is assumed that portfolios contain only male policyholders, the premium is single rather than an annuity, and that all contracts only hold death benefit riders. The first step is to generate a synthetic portfolio of VA contracts with death benefit riders based on the numerical attributes of the contract such as age of the policyholder, amount of the premium, and time to maturity of the contract. The second step after generating the portfolio is to classify the data set into groups so that we can find representatives of each group. The representatives are the records in the data set which have the minimum distance to other records of their group. For achieving this purpose, we use an unsupervised learning algorithm named K-means clustering that is appropriate for clustering data sets with numerical attributes as in our portfolio [5]. The representatives of clusters are provided after applying the K-means clustering on the synthetic portfolio. In the third stage, we use the Monte Carlo method in order to calculate the risk charge of each representative of clusters. It is required to find the risk charge of the portfolio after computing the risk charges of representatives. To reach this aim, the Kriging machine learning algorithm known as Gaussian Process is used for interpolation [?]. Based on the fact that each record in the data set is located in a distinct cluster, we use Euclidian distance function to calculate the distances between each record and the representatives of clusters and also the distances between representatives. The matrices of the distances help us find the matrix of weights which is used to estimate the risk charge of each contract. Finally, the risk charge of the portfolio is the sum of risk charges of all contracts.

2. MAIN RESULTS

The final output of the prior methods is illustrated in Table 1 As it is shown, we proceeded the three steps of VA portfolio valuation with different numbers of clusters. In each mode, we estimated the value of a large portfolio of VA contracts and we calculated the total time consumed for evaluation. The estimated values are given in the second row of the table. We also evaluated the generated portfolio by Monte Carlo that is presented in the third row of the table, and we calculated the time spent for Monte Carlo simulation and evaluation which was 44.76 minutes. As we can see, the amounts of time consumed for our method, presented in the fifth row, are considerably smaller than the

time spent by Monte Carlo simulation. This outcome indicates the fact that using Monte Carlo simulation is computationally demanding while the insurers need to update the status of their portfolio frequently. Although they can deal with this problem by providing stronger hardware, it seems it is more economic to change their method of evaluation. It is shown in this paper that Monte Carlo simulation is considerably time consuming and by using the proposed three step method, we reach the desirable result in significantly shorter time while we can ignore the little difference between estimated value and the actual value calculated by only MC simulation.

TABLE 1. The comparison of final results in terms of accuracy and speed between MC simulation individually and our proposed three step method.

Number of Clusters	6	10	15
Estimated Values	345031.3	340625.6	361463.4
MC Values	336412.1	336412.1	336412.1
Differences	2.5%	1.2%	7%
MC Time Consumend	44.76 min	44.76 min	44.76 min
Estimation Time Consumed	34.88 sec	56.89 sec	1.19 min

Another significant outcome of comparing the provided result of using MC simulation for calculating the risk charge of the portfolio and using the introduced method in this article for estimating the risk charge is the amount of difference between estimated value by our method and the calculated value by Monte Carlo simulation. It is shown in the fourth row of the Table 1 that the differences are 2.5, 1.2, and 7 percent for 6, 10, and 15 number of clusters respectively. Considering the fact that our algorithm is much faster than the conventional method, we can claim that this amount of difference is negligible for the insurance companies while they need to update their portfolio financial position frequently.

REFERENCES

1. M. J. ARMSTRONG, *The reset decision for segregated fund maturity guarantees*, Insurance: Mathematics and Economics 29, no. 2 (2001): 257-269.
2. D. BAUER, A. KLING, AND J. RUSS, *A universal pricing framework for guaranteed minimum benefits in variable annuities.*, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA 38, no. 2 (2008): 621-651.
3. P. P. BOYLE, M. R. HARDY, *Reserving for maturity guarantees: Two approaches.*, Insurance: Mathematics and Economics 21, no. 2 (1997): 113-127.
4. G. GAN, *Application of data clustering and machine learning in variable annuity valuation.*, Insurance: Mathematics and Economics, 53(3), 795-801.
5. L. KAUFMAN, P. J. ROUSSEUW, *Finding groups in data: an introduction to cluster analysis (Vol. 344)*, John Wiley Sons.
6. H. WACKERNAGEL, *Multivariate geostatistics: an introduction with applications*, Springer Science Business Media, 2013.
7. X. CHENG, W. LUO, G. GAN, AND G. LI, *Fast valuation of large portfolios of variable annuities via transfer learning.*, In Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence, pp. 716-728. Springer, Cham, 2019.

STABILITY AND CONVERGENCE ANALYSIS OF A NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MEHRAN NAMJOO^{1*}, MEHRAN AMINIAN², MAHDI KARAMI³, ALI MOHEBBIAN⁴

^{1,2,3,4}Department of Mathematics, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran.

namjoo@vru.ac.ir

mehran.aminian@vru.ac.ir

m.karami@vru.ac.ir

a.mohebbiyan@stu.vru.ac.ir

ABSTRACT. In this paper, a nonstandard finite difference (NSFD) scheme is implemented to study the dynamic behaviours stochastic partial differential equations (SPDEs). Afterwards, the consistency, stability and convergence analysis of the stochastic NSFD scheme is discussed in detail. Numerical results show that the stochastic scheme is effective when applied to SPDEs.

Keywords: Nonstandard finite difference scheme, Stochastic partial differential equation, Stability, Convergence.

Classification: MSC2010: 60H15, 65M12.

1. INTRODUCTION

Stochastic partial differential equations are applied in modeling many phenomena which arise in different sciences such as mathematical finance, biology, medical and social sciences. Since analytical solution can be obtained for few SPDEs, hence many researchers have gone to solve these SPDEs by numerical methods. Whenever solution a SPDE has been converted into discrete case, the properties of exact solution is not transferred fully to the discrete scheme in the case of large stepsize in the discrete model. However, if we use the NSFD scheme, the properties of the analytical solution can be preserved into its discrete scheme. This paper is devoted to the construct a NSFD scheme for solving SPDE as follows.

$$u_t(x, t) = \gamma u_{xx}(x, t) + \sigma u(x, t) \dot{W}(t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

subject to the initial and boundary conditions $u(x, 0) = u_0(x)$ and $u(0, t) = f_1(t)$, where γ and σ are the positive parameters. Here $W(t)$ is a one-dimensional standard Wiener process such that the white noise $\dot{W}(t)$ is a Gaussian distribution with zero mean [1].

2. NONSTANDARD FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR SPDES

The initial foundation of NSFD schemes came from the exact finite difference schemes. The NSFD schemes are different to standard finite difference (SFD) schemes. NSFD schemes where they depend on the two rules. First, the denominator function should be replaced by $0 < \Phi(h) < 1$, where $\Phi(h) = h + O(h^2)$. Second, the stochastic term

* Speaker.

is approximated in a nonlocal way [3]. NSFD use fixed and equidistant grid points to convert differential operators into discrete ones using neighboring points. Considering a uniform space grid Δx and time grid Δt in the time-space lattice, we can estimate the solution of the SPDE at the points of this lattice. The value of the approximation solution at the point $(k\Delta x, n\Delta t)$ will be denoted by u_k^n . Here the time and space derivatives in the SPDE are approximated by replacements $u_t(k\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$ and $u_{xx}(k\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2}$. Also the function $u(x, t)$ in stochastic part can be approximately in the form $u(k\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{1}{2}(u_k^n + u_{k+1}^n)$. Therefore, the NSFD scheme approximates the SPDE is given by

$$u_k^{n+1} = ru_{k-1}^n + (1 - 2r)u_k^n + ru_{k+1}^n + \frac{\sigma}{2}(u_k^n + u_{k+1}^n)\Delta W_n, \quad (2.1)$$

where $r = \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, such that $\Delta W_n = W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)$ and ΔW_n is a Gaussian distribution with mean 0 and variance Δt . Here we assume that the increments of Wiener's process are independent of the state u_k^n .

3. CONSISTENCY AND STABILITY ANALYSIS OF THE STOCHASTIC NSFD SCHEME

Consider the SPDE (1.1). This equation can be rewritten as $u(x, t) - u(x, 0) - \gamma \int_0^t u_{xx}(x, s) ds - \sigma \int_0^t u(x, s) dw(s) = 0$, where the stochastic integral is the Itô integral with respect to an $\mathbb{R}$ -valued Wiener process $(W(t), F_t)_{t \in [0, 1]}$ defined on a complete probability space (Ω, F, P) adapted to standard filtration $(F_t)_{t \in [0, 1]}$. Consistency, stability and convergence are important properties for the NSFD schemes. Consider a SPDE in the form $Lv = G$, where L denotes the differential operator and G is called source term. Let $L_k^n u_k^n = G_k^n$ denote the stochastic NSFD scheme, where G_k^n is the approximation of the source term. In order to investigate consistency and stability properties, it is necessary that define a norm. Hence, for a sequence $\{u_k^n\}_{k=1}^M$, we define $\|u^n\| = \sqrt{\sup_{1 \leq k \leq M} |u_k^n|^2}$. We refer the reader to [2], for the consistency, stability and convergence definitions of a stochastic NSFD scheme.

Definition 3.1. A NSFD scheme $L_k^n u_k^n = G_k^n$ is consistent with the SPDE $Lv = G$ at point (x, t) , if for any continuously differentiable function $\Phi(x, t)$ in the sense of mean square we have $\mathbb{E}\|u^{n+1} - v^{n+1}\| \rightarrow 0$, for $t = (n+1)\Delta t$ and $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, where the vectors u^{n+1} and v^{n+1} are defined by $u^{n+1} = (u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, \dots, u_M^{n+1})$ and $v^{n+1} = (v_0^{n+1}, v_1^{n+1}, \dots, v_M^{n+1})$.

Theorem 3.2. The stochastic difference scheme (2.1) is consistent in the sense of mean square.

Proof. Let $\Phi(x, t)$ be a smooth function, then we have

$$\begin{aligned} L(\Phi)|_k^n &= \Phi(k\Delta x, (n+1)\Delta t) - \Phi(k\Delta x, n\Delta t) \\ &\quad - \gamma \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Phi_{xx}(k\Delta x, s) ds - \sigma \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Phi(k\Delta x, s) dW(s), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} L_k^n \Phi &= \Phi(k\Delta x, (n+1)\Delta t) - \Phi(k\Delta x, n\Delta t) \\ &\quad - \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\Phi((k+1)\Delta x, n\Delta t) - 2\Phi(k\Delta x, n\Delta t) + \Phi((k-1)\Delta x, n\Delta t) \right) \\ &\quad - \frac{\sigma}{2} (\Phi(k\Delta x, n\Delta t) + \Phi((k+1)\Delta x, n\Delta t)) (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \end{aligned}$$

Therefore, if we use the square property of Itô integral, then we obtain

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|L(\Phi)|_k^n - L_k^n \Phi|^2 \\ & \leq 2\gamma^2 \mathbb{E} \left| \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(\Phi_{xx}(k\Delta x, s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{\Delta x^2} \left(\Phi((k+1)\Delta x, n\Delta t) - 2\Phi(k\Delta x, n\Delta t) + \Phi((k-1)\Delta x, n\Delta t) \right) ds \right|^2 \\ & \quad + 2\sigma^2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathbb{E} \left| \Phi(k\Delta x, s) - \frac{1}{2}(\Phi(k\Delta x, n\Delta t) + \Phi((k+1)\Delta x, n\Delta t)) \right|^2 ds. \end{aligned}$$

Since $\Phi(x, t)$ is a deterministic function, hence $\mathbb{E}|L(\Phi)|_k^n - L_k^n \Phi|^2 \rightarrow 0$, as $n, k \rightarrow \infty$. $\square$

Definition 3.3. A stochastic NSFD scheme is said to be stable in the sense of mean square, if there exist some positive constants $\overline{\Delta x_0}$ and $\overline{\Delta t_0}$ and nonnegative constants K and β such that $\mathbb{E}\|u^{n+1}\|^2 \leq Ke^{\beta t} \mathbb{E}\|u^0\|^2$, for all $t = (n+1)\Delta t$, $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, and $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$.

Theorem 3.4. The stochastic difference scheme (2.1) with $t = (n+1)\Delta t$ and $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ is stable with respect to $\|\cdot\| = \sqrt{\sup_k |\cdot|^2}$.

Proof. Applying $\mathbb{E}|\cdot|^2$ in (2.1) and using the independence of the Wiener process increments, we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|u_k^{n+1}|^2 &= \mathbb{E} \left| ru_{k-1}^n + (1-2r)u_k^n + ru_{k+1}^n + \frac{\sigma}{2}(u_k^n + u_{k+1}^n)\Delta W_n \right|^2 \\ &= \mathbb{E} |ru_{k-1}^n + (1-2r)u_k^n + ru_{k+1}^n|^2 + \frac{\sigma^2}{4}\Delta t \mathbb{E}|u_k^n + u_{k+1}^n|^2 \\ &\leq (|r| + |1-2r| + |r|)^2 \sup_k \mathbb{E}|u_k^n|^2 + \sigma^2 \Delta t \sup_k \mathbb{E}|u_k^n|^2 = ((|r| + |1-2r| + |r|)^2 + \sigma^2 \Delta t) \sup_k \mathbb{E}|u_k^n|^2. \end{aligned}$$

This holds for all k , now with $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, we get $\sup_k \mathbb{E}|u_k^{n+1}|^2 \leq (1 + \sigma^2 \Delta t) \sup_k \mathbb{E}|u_k^n|^2$, and by substituting Δt with $\frac{t}{n+1}$, $\mathbb{E}\|u^{n+1}\|^2 \leq (1 + \frac{\sigma^2 t}{n+1})^{n+1} \mathbb{E}\|u^0\|^2 \leq e^{\sigma^2 t} \mathbb{E}\|u^0\|^2$. So, the stochastic difference scheme (2.1) is stable for $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, according to Definition 3.3, with $K = 1$ and $\beta = \sigma^2$. $\square$

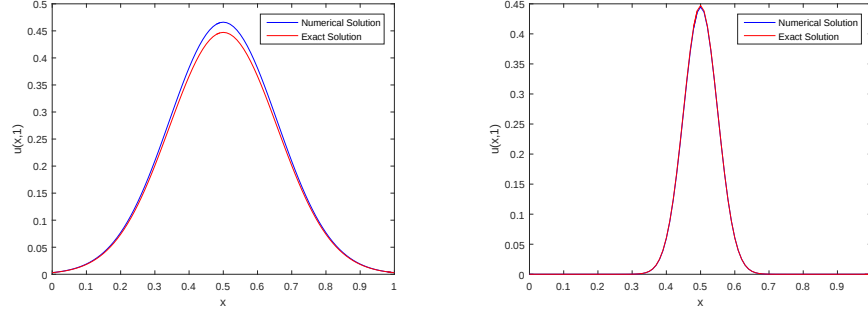
Definition 3.5. A stochastic difference scheme $L_k^n u_k^n = G_k^n$ approximating the SPDE $Lv = G$ is convergent in the sense of mean square at time t , if $\mathbb{E}\|u^{n+1} - v^{n+1}\|^2 \rightarrow 0$, for $t = (n+1)\Delta t$, $\Delta x \rightarrow 0$ and $\Delta t \rightarrow 0$.

Theorem 3.6. The stochastic difference scheme (2.1) for the SPDE (1.1) is convergent in the sense of mean square with respect to the $\|\cdot\| = \sqrt{\sup_k |\cdot|^2}$ with $t = (n+1)\Delta t$.

Proof. By stochastic version of the Lax–Richtmyer Theorem the convergence of the stochastic NSFD scheme (2.1) is also concluded. $\square$

4. NUMERICAL RESULTS

Analytical studies always remain incomplete without numerical verification of the results. In this section, numerical results from the implementation of stochastic difference scheme (2.1) are presented. Also, the convergence and stability of the stochastic difference scheme (2.1) is numerically investigated.



(a) $\gamma = 0.01$, $\sigma = 2$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.001$. (b) $\gamma = 0.001$, $\sigma = 1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.02$.

FIGURE 1. Comparison between deterministic and stochastic numerical solution of (4.1) using the NSFD scheme $\gamma = 0.01$, $\sigma = 2$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ and $\gamma = 0.001$, $\sigma = 1$, $\Delta x = 0.01$ and $\Delta t = 0.02$.

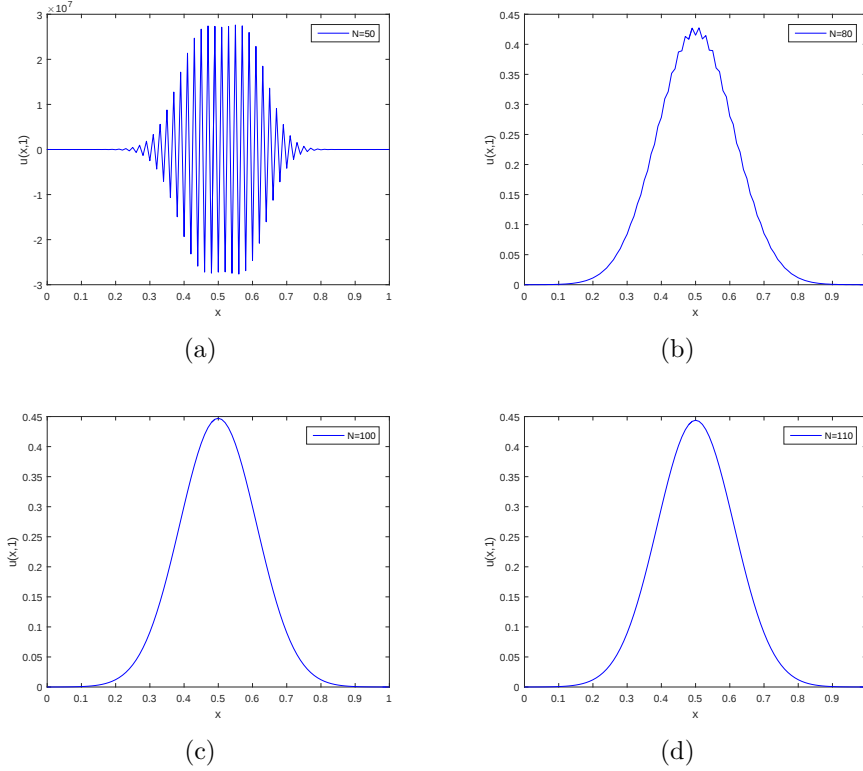


FIGURE 2. Representation of conditional convergence, $u(x, 1)$ for different values of N .

Example 4.1. Consider the SPDE

$$u_t(x, t) = \gamma u_{xx}(x, t) + \sigma u(x, t) \dot{W}(t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1], \quad (4.1)$$

subject to the following initial condition $u(x, 0) = \exp(-\frac{(x-0.5)^2}{\gamma})$ for $x \in [0, 1]$, with the boundary conditions $u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp(-\frac{0.25}{\gamma(4t+1)})$ and $u(1, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp(-\frac{0.25}{\gamma(4t+1)})$ for

$t \in [0, 1]$. It is easy to verify that in the absence of the noise term, the exact solution is $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{\gamma(4t+1)}\right)$. In Figure 1 the approximated solution of the stochastic advection diffusion equation (4.1) using the stochastic scheme is represented for $\gamma = 0.01$, $\sigma = 2$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.001$ and $\gamma = 0.001$, $\sigma = 1$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.02$.

Let M and N be the total number of grid points for the space and time discretizations, respectively. The Proposed NSFD scheme is conditionally stable for $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$. Therefore, if $M = 100$, then for the stability (or convergence) condition, we must have $N \geq 100$. The convergence of the scheme at the end of time interval $t = 1$, for the fixed space grid points $M = 100$ and various time grid points $N = 50, 80, 100, 110$ is considered. Note that the proposed scheme is unstable for $N = 50$.

5. CONCLUSION

This paper has provided a stochastic NSFD scheme for the numerical solution of SPDEs. Consistency and stability of the NSFD scheme is established. Convergence condition of the proposed stochastic difference scheme are given. Some numerical results are included to show the efficiency of the scheme.

REFERENCES

1. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer, Berlin, 1995.
2. C. Roth, *Difference methods for stochastic partial differential equations*, Z. Angew. Math. Mech., 82 (2002), 821–830.
3. M. Namjoo, S. Zibaei, *A NSFD Scheme for the Solving Fractional-Order Competitive Prey-Predator System*, Thai J. Math., 18 (2020), 1933–1945.