گزارش
همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول

به کوشش:

ارسلان شادمان

بسم‌الله الرحمن الرحیم

گزارش همایش ماهانه انجمن ریاضی ایران

جلد اول، زمستان ۸۱

اعضای کمیتهٔ همایش ماهانه:

علی آبکار (۸۱ـ۱۳۸۰)

غلامحسین اسلام‌زاده (۸۱ـ۱۳۷۹)

مسعود امینی (۱۳۷۸)

علی ایرانمنش (۸۱ـ۱۳۷۸)

حسین حاج‌ابوالحسن (۱۳۷۸)

آرش رستگار (۱۳۷۸)

شیوا زمانی (۱۳۷۸)

ارسلان شادمان (۸۱ـ۱۳۷۹)

مژگان محمودی (۸۱ـ۱۳۷۹)

سیامک یاسمی (۱۳۷۸)

حروفچینی: TEX-پارسی فریده صمدیان

چاپ و صحافی: با همکاری مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

نشانی:

تهران، صندوق پستی ۴۱۸ـ۱۳۱۴۵

انجمن ریاضی ایران

تلفن و نمابر: ۸۸۰۸۸۵۵، ۸۸۰۷۷۹۵، ۸۸۰۷۷۷۵

نشانی الکترونیک: iranmath@ims.ir

همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران به‌عنوان یکی از فعالیتهای مستمر انجمن از ۱۳۷۸ با اهداف زیر شروع شده است:

نقل از آیین‌نامهٔ مصوب ۷۸/۱/۲۶

- آشنایی جامعه ریاضی ایران با شاخه‌های مختلف ریاضیات.
- آشنایی دانشجویان تحصیلات تکمیلی علوم ریاضی با مسائل و زمینه‌های مختلف تحقیقاتی ریاضی در ایران.
- ایجاد ارتباط بین محققان و دانشجویان ریاضی کشور، به‌ویژه دانشجویان تحصیلات تکمیلی رشته‌های مختلف علوم ریاضی.
- کمک به شناخت توان تحقیقاتی کشور در ریاضیات.
- کمک به ایجاد جوّ مساعد برای رشد ریاضیات در ایران و باروری استعدادهای ریاضی.

مقاله‌های همایش معمولاً مروری تحقیقی هستند و به معرفی یک رشتهٔ فعال پژوهشی می‌پردازند. این مقالات توسط یکی از استادان مدعو داخل یا مقیم خارج ارائه می‌شوند. جهت تسریع در انتشار مقالات، کمیتهٔ همایش از ویرایش آنها معذور است. از این رو، درخواست می‌شود نویسنده مقاله را به شکل نهایی تحویل دهد. چاپ مقاله‌ها در مجلات علمی‌ـترویجی به همان شکل یا با اندکی تغییر بلامانع است. در این صورت توصیه می‌شود نویسندهٔ محترم به جلد و صفحات گزارش همایش ماهانه که مقاله در آن مندرج است اشاره فرماید.

از هر مقاله ۲۵ نسخه به مؤلف تقدیم می‌شود.

زمان برگزاری همایش معمولاً آخرین چهارشنبه هر ماه جز مرداد و اسفند و با رعایت ماه مبارک رمضان است.

فهرست مطالب:

---

* سخنران مدعو

پیشگفتار

زندگی علمی و اجتماعی انجمن ریاضی ایران از همایش ریاضیدانان در سال ۱۳۴۹ آغاز شده و رشد و تکامل آن با تشکیل و ادامهٔ همایش‌های گوناگون دمساز بوده است: کنفرانس سالانهٔ ریاضی ایران که سی و سومین آن امسال برگزار شد، سمینار هفتگی انجمن که چند سال نخست دایر بود و سمینارهای هفتگی دانشگاه‌ها جای آن را گرفت، چندین سمینار تخصصی که با سمینار جبر اهواز در دی‌ماه ۱۳۵۶ آغاز شد و هر از چند گاهی یک سمینار تخصصی نو ظاهر گشت. بدون شک با مشارکت در همایش‌ها امکان گفت و شنود و تبادل نظر در زمینه‌های مختلف فراهم و در همین اثنا بذرهایی کاشته می‌شوند که امید می‌رود در آینده درختان تنومندی در زمینهٔ اندیشهٔ ریاضی به بار آورند. از این نظر می‌توان صرف نیروی انسانی و منابع مالی در راه برگزاری همایش‌ها را توجیه کرد. اما اگر این افکار مدوّن و منتشر نشوند، دامنهٔ برد آنها از حیث زمان و مکان بسیار محدود خواهند ماند. متأسفانه راهی برای تدوین و نشر گفت و شنودهای جنبی کنفرانس متصور نیست مگر قسمت‌های بسیار اندکی که ممکن است در خاطرات بازتاب یابند. اما مباحث اصلی کنفرانس یعنی مقالات ارائه شده را نه تنها می‌توان، بلکه باید به هر قیمت و زحمتی پخش کرد.

به طور کلی انتشارات ادواری و غیر ادواری انجمن‌های علمی نیز جزء ارکان مهم فعالیت‌های آنها هستند. انجمن ریاضی ایران خوشبختانه علاوه بر گزارش کنفرانس‌های سالانه و سمینارهای تخصصی، چندین نشریهٔ ادواری دارد که هر یک دارای منشور و رسالت ویژهٔ خود است: بولتن انجمن ریاضی ایران ویژهٔ مقالات پژوهشی در سطح بین‌المللی به زبان انگلیسی، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی ویژهٔ مقالات مروری به زبان فارسی، خبرنامه و گزارش ویژهٔ اطلاع‌رسانی و اظهار نظرها.

از سال ۱۳۷۸ همایش‌های ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران تشکیل گردید که هدف آن آشنا ساختن پژوهشگران جوان با رشته‌های پژوهشی گوناگون است. شیوهٔ کار این همایش آن است که در کمیتهٔ همایش نسبت به دعوت از استادان مقیم داخل و خارج که در زمینه‌ای پیشرفت قابل ملاحظه‌ای داشته و کارهای پژوهشی را هدایت نموده باشند دعوت به عمل آید که مقاله‌ای مروری ارائه دهند و آن را به زبان فارسی یا انگلیسی در اختیار انجمن قرار دهند تا به شکل شایسته منتشر شود. کمیتهٔ اول در سال ۱۳۷۸ عمدتاً در شهر کتاب هفت همایش جالب برگزار کرد. کمیتهٔ دوم در سال ۱۳۷۹ همایش را در دانشگاه‌های مختلف، در سال ۱۳۸۰ آن را در تالار فرهنگسرای دانشجو و دانشگاه تهران، و در سال ۱۳۸۱ همه را در دانشگاه

تهران برگزار نمود.

از آنجا که ویرایش مقالات رسیدهٔ سال اول بیش از حد طول کشید و آخر سر هم امر ویرایش ناقص ماند، کمیته تصمیم گرفت در مسألهٔ ویرایش تجدید نظر کند و به اتکای آن که مقالات را استادان زبردست می‌نویسند، از ویرایش علمی و ادبی آنها به کلی صرف نظر نماید. بدین ترتیب، نویسندگانِ مقالات نهایت جدیت را مبذول فرمودند که مقاله به شکل نهاییِ و آمادهٔ تکثیر باشد. به علاوه، کمال مطلوب آن است که مقاله چندین روز پیش از برگزاری همایش به دست کمیته برسد تا به تعداد اندکی تکثیر شود و در اختیار شرکت کنندگان قرار گیرد. اگر این کمال مطلوب حاصل شود، در پایان هر سال مجلدی مشتمل بر مقالاتِ همان سال برای چاپ و انتشار آماده می‌شود و در اختیار عموم قرار می‌گیرد.

مجلد حاضر هشت مقاله را در بر می‌گیرد که به ترتیب الفباییِ نام خانوادگی سخنران، چیده شده‌اند. در بین آنها هم مقاله‌هایی مربوط به سال ۱۳۷۸ دیده می‌شود و هم مقاله‌هایی که در بهار ۱۳۸۱ ارائه شده‌اند. همزمان با این مجلّد، جلد دوم، چند مقالهٔ رسیده به زبان انگلیسی را در بر می‌گیرد که آن نیز حاوی مقالاتی از سال ۱۳۷۸ و همچنین بهار ۱۳۸۱ است.

از طرف خود و همکارانم در کمیتهٔ همایش، از استادان بزرگواری که دعوت ما را پذیرفتند و به نگارش و تحویل مقالهٔ خود پرداختند متواضعانه سپاسگزارم. همچنین لازم می‌دانم از حمایت‌های جناب آقای دکتر مهدی بهزاد استاد ارجمند و رئیس محترم انجمن ریاضی ایران و اعضای محترم شورای اجرایی و همکارانم در کمیتهٔ همایش ماهانهٔ انجمن خانم‌ها دکتر: شیوا زمانی و مژگان محمودی و آقایان دکتر: علی آبکار، غلامحسین اسلام‌زاده، علی ایرانمنش، حسین حاج‌ابوالحسن و سیامک یاسمی سپاسگزاری کنم.

اجرای مراحل مختلف همایش مدیون زحمات اعضای فعّال دبیرخانهٔ انجمن است. بدین وسیله از همهٔ این عزیزان به ویژه از تلاش‌های خانم افسانه بختیاری و آقای مرتضی عبدی‌زاده که ظرف چند سال گذشته در برگزاریِ همایش‌ها کمیته را یاری نمودند و خانم فریده صمدیان به خاطرِ حروف‌چینیِ بعضی مقالات و پردازش نهاییِ متن و یکنواختی آنها تشکر می‌کنم. سازماندهی و نظم کارهای دبیرخانه از زمان تصدی آقای منصور شکوهی به ریاست دبیرخانه در تحقّق این انتشار مفید و مؤثر بوده است. از حسن ادارهٔ ایشان قدرشناسی می‌کنم.

ارسلان شادمان

تهران، زمستان ۱۳۸۱

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۱ تا ۲۱

مروری بر نظریهٔ گرافها

مهدی بهزاد

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

پست الکترونیک: mbehzad@sharif.ac.ir

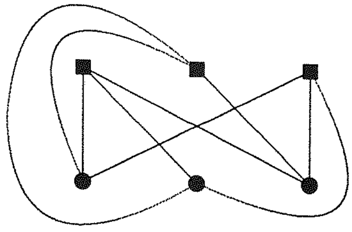
چکیده

این مقاله خود چکیده‌ای است که اساساً برای ارائه به مخاطبان همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران تدوین شده است. پس از اشاره به پیشینهٔ نظریهٔ گرافها و تعریف برخی از مفاهیم و معرّفی نمادهای مورد نیاز، شاخه‌های اکسترمال، احتمالاتی، جبری، شیمیایی، توپولوژیک و الگوریتمی این نظریه را معرّفی می‌کنیم و ضمن بیان پیشرفتهای نظری و کاربردی آن می‌کوشیم با طرح چند مسألهٔ باز چشم‌اندازی هر چند ناقص برای آیندهٔ این رشته به تصویر بکشیم.

۱. پیشینه

۱.۱. سال ۱۷۳۶. در این سال اویلر [21] مقاله‌ای دربارهٔ مسألهٔ پلهای کونیگسبرگ منتشر کرد و نوشت به هندسه‌ای دست یافته است که در آن اندازه مطرح نیست. بر این اساس بسیاری سال ۱۷۳۶ را سرآغاز توپولوژی و نظریهٔ گرافها می‌پندارند.

در نوجوانی از مرحوم پدرم شنیدم بهاءالدین محمد عاملی معروف به شیخ بهایی با طرح معمایی مسیرهایی هم سطح بین سه چاه و سه خانه را خواستار شده است که در میانه راه متلاقی نباشند. به شکل ۱ رجوع کنید. با توجه به اینکه شیخ حدود ۱۵۰ سال پیش از اویلر می‌زیسته است یافتن سندی معتبر در این باب را مهم می‌پندارم و حاضرم به نخستین فردی که آن را معرّفی کند یک میلیون ریال به عنوان جایزه بپردازم.



شکل۱

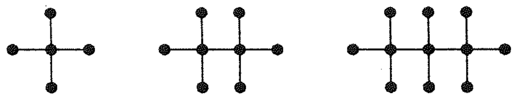
۱.۲. سال ۱۸۴۷. در این سال کرشهف [31] از مفهوم درخت برای حل یک دستگاه معادلات خطی استفاده کرد و شدّت جریان موجود در هر یک از شاخه‌های یک شبکهٔ الکتریکی را به دست آورد.

۱.۳. سال ۱۸۵۲. در ۲۳ اکتبر این سال دومورگان به همیلتن نامه نوشت و از او دربارهٔ حدس چهار رنگ اطلاع خواست. این حدس را مسألهٔ چهار رنگ و مرض چهار رنگ نیز نامیده‌اند. اطلاعات جامع مربوط به این مسأله را می‌توان از مرجع [35] به دست آورد.

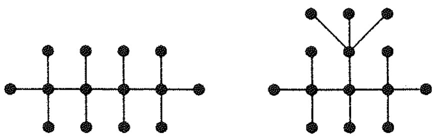
۱.۴. سال ۱۸۵۷. در این سال کیلی [15] ردهٔ مهمی ازگرافها موسوم به درختان راکشف کرد. همچنین چهارده سال بعد با شمارش نظری تعداد ایزومرهای مختلف چند هیدروکربور اشباع شدهٔ C_nH_{2n+2} بین علم شیمی و نظریهٔ گرافها پیوندی ناگسستنی پدید آورد و دربارهٔ وجود گونهٔ دیگری از بوتان که ناشناخته بود پیشگویی کرد. شکل ۲ را ببینید.

۱.۵. سال ۱۸۵۹. در این سال همیلتن با استفاده از دوازده‌وجهی منتظم اسباب بازی سفر به دور دنیا را معرفی کرد و اسباب ورشکستگی شرکت سازنده را فراهم ساخت! به همین دلیل ردهٔ خاصّی ازگرافها را گرافهای همیلتنی می‌نامند. گراف همیلتنی گرافی است که دوری فراگیر داشته باشد. در شکل ۳ (نمودار) گراف دوازده وجهی منتظم همراه با دور همیلتنی موجود در آن رسم شده است.

۱.۶. سال ۱۹۳۶. سال انتشار نخستین کتاب این رشته است که کونیگ [32] آن را به زبان آلمانی و با عنوان گرافهای متناهی و نامتناهی نوشت. در این کتاب اطلاعات پراکندهٔ گذشته به نظم در آمده و مطالعات مصادیق گوناگون، به صورت نظریه ارائه شده است. بدون شک کار بزرگانی چون هیود [28]، برکهف [12]، ویتنی [44] و کوراتوفسکی [33] زمینهٔ معرفی این نظریه را فراهم ساخته، و کونیگ در کار خود از این

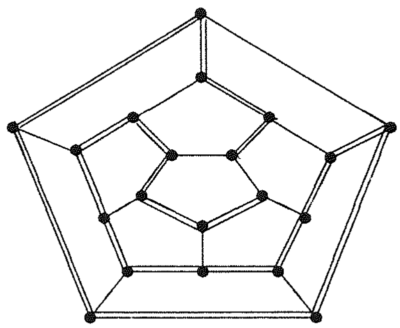


پروپان   اتان   متان



ایزوبوتان   بوتان

شکل۲



شکل۳

اطلاعات بهره جسته است.

۱.۷. سال ۱۹۵۸. تاریخ انتشار دومین کتاب این رشته است که برژ[10] آن را به زبان فرانسه تألیف کرد.

۱.۸. سال ۱۹۶۲. سومین کتاب این رشته به قلم اور [34] در این سال به زبان انگلیسی منتشر شد و از این تاریخ نظریهٔ گرافها به سرعت رشد پیدا کرد. شاید بتوان این رشد را مدیون زبان انگلیسی، پیشرفت روز افزون کامپیوترهای الکترونیک و حتی پروژهٔ اِسپتنیک دانست.

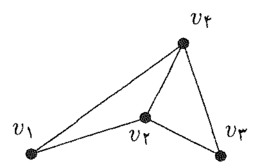
۱.۹. سال ۱۹۷۶. در این سال اپل و هاکن [2] با تکیه بر مطالعات نظری پیشینیان و استفاده از حدود ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از کامپیوترهای پیشرفتهٔ زمان درست بودن حدس چهار رنگ را «اثبات» کردند. با قرارگرفتن این اثباتِ به اصطلاح کامپیوتری در برابر اثباتهای سنتی، جدال جالبی بین برخی از ریاضیدانان درگرفت که هنوز هم ادامه دارد. بعد ازگذشت حدود ۱۵۰ سال مرض چهار رنگ ریشه‌کن نشده وگهگاه مقاله‌ای در این باب منتشر می‌شود.

۱.۱۰. سال ۱۹۷۷. در این سال بنگاه انتشاراتی جان وایلی نخستین شمارهٔ مجلّهٔ نظریهٔ گرافها را منتشر کرد. بدین ترتیب قدم اساسی دیگری در راه توسعهٔ این رشته برداشته شد و به قولی نظریهٔ گرافها همچون شیری خفته به پا خاست.

۲. مفاهیم و نمادهای اولیه

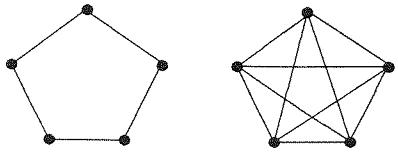
در این بخش به اختصار به معرّفی چند مفهوم می‌پردازیم. برای کسب اطلاع بیشتر می‌توان به [5] یا [14] رجوع کرد.

گراف G زوجی مرتب چون (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای ناتهی و متناهی موسوم به **مجموعهٔ رأسها** و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V به نام **مجموعهٔ یالهای** G است. نموداری ازگراف G با $V(G) = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\}$ و $E(G) = \{v_۱v_۲, v_۱v_۴, v_۲v_۳, v_۲v_۴, v_۳v_۴\}$ را در شکل ۴ نمایش می‌دهیم. برای سادگی یال $\{u, v\}$ را به صورت uv نوشته‌ایم.



شکل ۴

مرتبه و **اندازهٔ** G به ترتیب $|V|$و $|E|$هستند که غالباً با p و q نمایش داده می‌شوند. **گراف کامل** با نماد K_p مرتبهٔ p و اندازهٔ $p(p-۱)/۲$ دارد. نمودارهای گراف کامل $K_۵$ و **دور** $C_۵$ را در شکل ۵ نمایش داده‌ایم. گراف مربوط به شکل ۱ را با نماد $K_{۳,۳}$ نمایش می‌دهند:



$C_۵$ $K_۵$

شکل۵

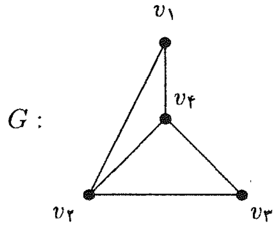
درجهٔ رأس v از گراف G تعداد یالهای مارّ بر رأس v است. بزرگترین مقدار در بین درجه‌های تمام رأسهای G را **ماکسیمم درجهٔ** G می‌نامیم و آن را $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم. **مکمل گراف** G که با $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود گرافی است با $V(\overline{G}) = V(G)$ که در آن دو رأس مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. مکمل گراف موجود در شکل ۴ چهار رأس و یک یال دارد. واضح است که مرتبه و اندازهٔ $\overline{K_p}$ به ترتیب p و۰ است. مکمل دور $C_۵$ با خود $C_۵$ برابر است ـ به عبارت دیگر، گرافهای $C_۵$ و $\overline{C}_۵$ با هم یکریخت‌اند.

عدد خوشه‌ای گراف G که با $\omega(G)$ نمایش داده می‌شود بیشترین تعداد رأسهایی از G است که دو به دو مجاور هستند. **عدد جدایی** گراف G بیشترین تعداد رأسهایی از G است که هیچ دوتایی مجاور نیستند ـ این عدد را با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال $\omega(K_p) = p$ و $\alpha(K_p) = ۱$، حال آنکه $\omega(\overline{K_p}) = ۱$ و $\alpha(\overline{K_p}) = p$.

یکی از پارامترهای مهم نظریهٔ گرافها عددرنگی (رأسی) گراف G است که با $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود. این عدد کمترین تعداد اعضای توابعی چون $f : V(G) \to \mathbb{N}$ است که با شرط $uv \in E(G)$ داشته باشیم $f(u) \neq f(v)$. به عبارت دیگر، $\chi(G)$ کمترین تعداد رنگهای لازم برای نسبت دادن به رأسهای G با این شرط است که به هر دو رأس مجاور رنگهای متفاوت تعلق گیرند. این مفهوم ریشه در مسألهٔ چهار رنگ دارد. در حالت کلی تعیین مقدار دقیق $\chi(G)$ آسان نیست. کرانهای موجود نیز غالباً با مقدار دقیق آن فاصله دارند. تاکنون دهها نوع عدد رنگی مختلف به هر گراف نسبت داده شده‌اند که جالب‌اند و کاربرد دارند. در بخش آخر این مقاله به نمونه‌هایی اشاره خواهیم کرد.

به هر گراف ماتریسهای متفاوتی نیز نسبت می‌دهند. **ماتریس مجاورت** گراف G با مجموعه رأسهای $\{v_۱, v_۲, \dots, v_p\}$ ماتریس متقارن $p \times p$ با درایه‌های ۰ یا ۱، $۰, ۱ \in \mathbb{R}$، است که در آن تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی ۰ هستند. روش انتخاب درایه‌ها را با ارائه یک مثال طبق شکل ۶ روشن می‌کنیم.

واضح است یک گراف از مرتبهٔ p چیزی جز یک ماتریس متقارن $p \times p$ با درایه‌های ۰ یا ۱ نیست



$$M(G): \begin{array}{c|cccc} & v_۱ & v_۲ & v_۳ & v_۴ \\ \hline v_۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ v_۲ & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ v_۳ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ v_۴ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{array}$$

شکل۶

که در آن تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی ۰ باشند. این مطلب مبیّن رابطهٔ نزدیک دو مبحث گراف و جبر خطی است که در بخشهای بعد نیز به آن اشاره خواهیم کرد.

۳. نظریه اکسترمال گرافها

هر چند توران [41] را واضع نظریهٔ اکسترمال گرافها می‌دانند، امّا قبل از توران، رمزی [36] در سال ۱۹۳۰ مقاله‌ای با عنوان مسأله‌ای در منطق نوشت که به این شاخه تعلق دارد. مسألهٔ رمزی به صورتهای گوناگون گسترش یافته و کتابی هم دربارهٔ آن نگاشته شده است [27].

معمّای مهمانی شش نفری به این صورت مطرح می‌شود: در هر مهمانی شش نفری دست کم سه نفر دو به دو یکدیگر را می‌شناسند و یا سه نفر دو به دو با هم بیگانه‌اند، ولی اگر شش را به پنج تقلیل دهیم این حکم برقرار نیست. این معمّا را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$. کوچکترین عدد صحیح و مثبتی چون p را بیابید که در مورد هر گراف G از مرتبهٔ p داشته باشیم $\omega(G) \geq m$ و یا $\alpha(G) \geq n$. این عدد را **عدد رمزی (رأسی)** با پارامترهای m و n می‌نامند و آن را با $R(m, n)$ نمایش می‌دهند. در مورد این تابع دو متغیره می‌دانیم:

$$R(m, n) = R(n, m) \leq \binom{m+n-۲}{n-۱}$$

واضح است که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $R(۱, n) = ۱$، $R(۲, n) = n$ و $R(۳, ۳) = ۶$. شگفت‌انگیز است که بجز این موارد، تعداد مقادیر شناخته شده برای تابع R از تعداد انگشتان دو دست بیشتر نیست! جالب اینکه $R(۳, ۸)$ در سال ۱۹۹۲ و $R(۴, ۵)$ در سال ۱۹۹۵ مشخص شده‌اند. جدول صفحهٔ بعد مقادیر شناخته شده برای R را نمایش می‌دهد.

m / n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۳	۶	۹	۱۴	۱۸	۲۳	۲۸	۳۶
۴		۱۸	۲۵				

پال اردیش خطاب به زمینیان می‌گوید: اگر موجودات سماوی حاضر شوند در قبال دریافت جواب دقیق $R(۵,۵)$ از انهدام زمین صرفنظر کنند فوراً دست به کار شوید و تمام کامپیوترهای موجود را به کار گیرید؛ اما، اگر مقدار دقیق $R(۶,۶)$ را مطالبه کردند بلافاصله کرهٔ زمین را ترک کنید.

صورتهای یالی و کلّی عدد رمزی نیز درخور توجه‌اند. در اینجا تنها عدد رمزی کلّی $R''(m,n)$، $m,n\in\mathbb{N}$، را معرفی می‌کنیم. هر عضو مجموعهٔ $V\cup E$ از گراف $G=(V,E)$ **عنصری** از G نام دارد. دو عنصر G را **مرتبط** نامیم هرگاه دو رأس یا دو یال مجاور گراف G باشند و یا یکی رأس و دیگری یالی مارّ بر آن رأس باشد. کوچکترین عدد صحیح و مثبتی چون p را که هر گراف همبند از مرتبهٔ p دارای m عنصر دو به دو مرتبط و یا n عنصر دو به دو نامرتبط باشد با $R''(m,n)$ نمایش می‌دهیم و آن را **عدد رمزی کلّی** با پارامترهای m و n می‌نامیم. در مقایسه با R عجیب است که مقدار دقیق R'' را در بخش عظیمی از حوزهٔ تعریفش می‌شناسیم!

قضیه [7] مقادیر R'' به ازای تمام (m,n)های خارج از ناحیهٔ $\{(m,n)|m>۴, n>m^۲-۵m+۸\}$ برابرند با:

$$\begin{aligned}
&R''(۱,n)=R''(m,۱)=۱ && \forall m,n\in\mathbb{N}\\
&R''(۲,n)=R''(۳,n)=۲ && \forall n\geq ۲\\
&R''(m,۲)=۳ && \forall m\geq ۴\\
&R''(۴,n)=\lfloor(۳n+۱)/۲\rfloor && \forall n\geq ۲\\
&R''(m,n)=۲n-۱ && \forall ۲<n<m\\
&R''(m,n)=۲n-۲ && \forall ۴\leq n\leq m^۲-۵m+۸.
\end{aligned}$$

۴. نظریهٔ احتمالاتی گرافها

در سال ۱۹۴۷ اردیش برای اثبات قضیه‌ای از روش احتمالاتی استفاده کرد. این روش گرافهای تصادفی و شاخه‌ای موسوم به نظریهٔ احتمالاتی گرافها را در پی داشت و به تألیف چند کتاب منجر شد [1]. برای درک روشن اثبات احتمالاتی قضیهٔ زیر را ارائه می‌کنیم و یادآور می‌شویم هر چند اردیش ابداع‌کنندهٔ روش احتمالاتی محسوب می‌شود؛ اما، قبل از وی نیز از این روش استفاده شده است. به مقالهٔ ملوی در مرجع [25] رجوع کنید.

قضیه [20] فرض کنید $n,p\in\mathbb{N}$ و $n\leq p$. اگر $\binom{p}{n}۲^{۱-\binom{n}{۲}}<۱$، آنگاه $R(n,n)>p$.

اثبات کافی است نشان دهیم با این شرط گرافی از مرتبه p وجود دارد که $\omega(G) < n$ و $\alpha(G) < n$. مجموعهٔ $V = \{1, \ldots, p\}$ را به عنوان مجموعه رأسهای گرافی در نظر می‌گیریم و هر یال را به طور مستقل با احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم تا مدل احتمالاتی E به‌دست آید. نشان می‌دهیم احتمال وجود گرافی چون $G = (V, E)$ با شرط $\omega(G) < n$ و $\alpha(G) < n$ مثبت است. تعداد یالهای هر خوشهٔ از مرتبهٔ n برابر با $\binom{n}{2}$ و در نتیجه احتمال تشکیل چنین خوشه‌ای $2^{-\binom{n}{2}}$ است. پس احتمال تشکیل دست کم یک خوشهٔ از مرتبه n برابر با $\binom{p}{n} 2^{-\binom{n}{2}}$ است. به‌همین ترتیب احتمال تشکیل یک مجموعهٔ مستقل n رأسی برابر با $\binom{p}{n} 2^{-\binom{n}{2}}$ است. پس احتمال اینکه در G، n رأس دو به دو مجاور و یا n رأس مستقل وجود داشته باشند برابر است با $\binom{p}{n} 2^{1-\binom{n}{2}}$، و چون $1 - \binom{p}{n} 2^{1-\binom{n}{2}}$ مثبت است نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.□

اردیش با استفاده از این قضیه و فرمول استرلینگ برای محاسبه فاکتوریلها، کرانی پایین برای $R(n, n)$ برحسب n به‌دست آورد. نظریهٔ گرافهای تصادفی راه را برای استفاده از ابزار احتمالاتی در سایر رشته‌های علوم ریاضی باز کرده است. در بخش ۹ به استفاده از روشهای پیشرفته‌تر احتمالاتی نظیر استدلالهای مارتینگلی، اشاره خواهیم کرد.

۵. نظریهٔ جبری گرافها

به هر گراف G چند ماتریس می‌توان نسبت داد. در بخش ۲ گفتیم که یکی از اینها را ماتریس مجاورت می‌نامند و آن را با $A(G)$ نمایش می‌دهند. ماتریس متقارن $p \times p$ با درایه‌های صفر یا یک با این شرط که تمام درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند خود معرّف گراف است. به هر گراف G چندجمله‌ایهای متعددی نیز می‌توان نسبت داد که در اینجا به پنج نمونه اشاره می‌کنیم.

۵.۱. چندجمله‌ای مشخصهٔ گراف G از مرتبهٔ p را با $\varphi(G; x)$ نمایش می‌دهند و آن را برابر با دترمینان $|xI - A|$ می‌گیرند. در اینجا A ماتریس مجاورت G و I ماتریس یکهٔ $p \times p$ است. ویژه‌مقدارهای G حقیقی‌اند. بزرگترین ویژه‌مقدار G را با $\lambda(G)$ نمایش می‌دهند. اثبات شده است که $\lambda(G) + 1$ کرانی بالا برای $\chi(G)$ است. مطالعهٔ [18,19] تحت عنوان طیف گرافها را به علاقه‌مندان توصیه می‌کنیم.

۵.۲. چند جمله‌ای رنگی. در سال ۱۹۱۲ برکهف [12] چندجمله‌ای رنگی گرافها را به این امید معرفی کرد که مسألهٔ چهاررنگ را حل کند. رأسهای G را با $v_1, \ldots, v_p$ مشخص می‌کنیم و λ رنگ، $1, \ldots, \lambda$ را برای رنگ‌آمیزی رأسها در نظر می‌گیریم. تعداد راههای متفاوت رنگ‌آمیزی مناسب رأسهای G را با $P(G; \lambda)$ نمایش می‌دهیم. دو رنگ‌آمیزی را متفاوت تلقی می‌کنیم هرگاه به رأسی چون v_i، $1 \leq i \leq p$، دو رنگ متفاوت اختصاص داده باشیم. شاید واضح باشد که این تابع یک چندجمله‌ای از درجهٔ p است. لذا می‌نویسیم

$$P(G; \lambda) = a_1 \lambda^p + a_2 \lambda^{p-1} + \cdots + a_k \lambda^k \qquad *$$

و آن را **چندجمله‌ای رنگی گراف** G می‌نامیم. کوچکترین توان λ در بین جمله‌های ناصفر این چندجمله‌ای را که با k نمایش داده‌ایم برابر با تعداد مؤلفه‌های گراف G است. روشن است که $a_1 = 1$ و a_2 برابر با اندازهٔ

G است. کوچکترین عدد طبیعی x با شرط $P(G;x) > ۰$ برابر با عدد رنگی (رأسی) G است. برای اثبات درستی حدس چهاررنگ کافی است نشان دهیم به ازای هرگراف مسطح G داریم $P(G;۴) > ۰$.

اگر عدد زرّین $(۱ + \sqrt{۵})/۲$ را با τ نمایش دهیم، آنگاه $\tau + ۲ < ۳/۶۱۸$. تات [42] تساوی زیبایی مرسوم به تساوی زرّین ارائه کرده و با کمک آن نشان داده است که به‌ازای هرگراف مسطح و ماکسیمال G داریم $P(G;\tau + ۲) > ۰$!

از مسائل باز این زمینه تنها به یک مورد اشاره می‌کنیم. حدسی قدیمی حاکی است که قدرمطلقهای ضرایب $P(G;\lambda)$ وقتی به صورت متعارف * نوشته شود ابتدا اکیداً صعود و سپس تا آخر اکیداً نزول می‌کنند. در مورد گراف شکل ۴ ضرایب عبارت‌اند از: $a_۱ = ۱$، $a_۲ = -۵$، $a_۳ = ۸$ و $a_۴ = -۴$. اعداد مذکور درستی این حدس را تأیید می‌کنند.

۵.۳. چندجمله‌ای تطابقها. این چندجمله‌ای را می‌توان با دو متغیر x و y تعریف کرد [24]. در اینجا برای سادگی y را برابر با -۱ می‌گیریم. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. یک **تطابق** n **یالی** از گراف G با رأسهای $v_۱$، . . . ، v_p تطابقی چون M است که $|M| = n$. **تطابق** زیرمجموعه‌ای مستقل از مجموعه یالهای G است. تعداد تطابقهای n یالی G را با $\mu(G;n)$ نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\mu(G;۰) = ۱$. بنابه تعریف می‌نویسیم

$$\mu(G;x) = \sum_{n\geq ۰}(-۱)^n \mu(G;n)x^{p-۲n}$$

و آن را **چندجمله‌ای تطابقهای گراف** G می‌نامیم. به عنوان مثال اگر G گراف شکل ۴ باشد داریم

$$\mu(G;x) = x^۴ - ۵x^۲ + ۲.$$

ارتباط بین $\mu(G;x)$ و $\varphi(G;x)$ جالب است. می‌توان ثابت کرد که اگر G دور نداشته باشد، آنگاه $\varphi(G;x) = \mu(G;x)$ و نیز می‌توان ثابت کرد که تمام صفرهای $\mu(G;x)$ حقیقی‌اند و اگر $\Delta(G) > ۱$، تمام صفرهای $\mu(G;x)$ حول مبداء به صورت قرینه قرار می‌گیرند و به بازهٔ $(-۲\sqrt{\Delta - ۱}, ۲\sqrt{\Delta - ۱})$ تعلق دارند. از نظر تاریخی تاکنون سه بار چندجمله‌ای تطابقها به طور مستقل مطرح شده‌اند. یک بار در ترکیبیات، یک بار در فیزیک آماری [29] و یک بار در شیمی نظری.

یادآور می‌شویم هیچ‌یک از الگوریتمهای موجود برای یافتن چندجمله‌ای تطابقها زمان چندجمله‌ای ندارند. چون دترمینان را می‌توان در زمان چندجمله‌ای محاسبه کرد گرافهایی را بررسی کرده‌اند که چندجمله‌ای تطابقهایشان را بتوان به صورت دترمینان نوشت. در این ارتباط [22] را توصیه می‌کنیم.

۵.۴. گروهها و گرافها. مفهوم گروه گراف قبل از سال ۱۹۳۲ مطرح شده است. گروه (رأسی) گراف G که با $\Gamma(G)$ نمایش داده می‌شود گروه تمام جایگشتهای رأسهای G است که مجاورت و عدم مجاورت رأسها را محفوظ نگه دارند. واضح است که $\Gamma(K_p) \simeq S_p$. به طریق مشابه $\Gamma'(G)$ و $\Gamma''(G)$ نیز معرفی شده‌اند. گروه تمام جایگشتهای عناصر G را که حافظ ارتباط و عدم ارتباط عناصر باشند **گروه کلی گراف** G می‌نامند و آن را با $\Gamma''(G)$ نمایش می‌دهند. بافرض $G \neq K_۱$ ثابت شده است که $\Gamma''(G) \simeq \Gamma(G)$

اگر و تنها اگر هیچ مؤلّفه‌ای از G نه کامل باشد و نه دور [6]. نتیجه‌ای از این مطلب را در بخش ۹ ذکر خواهیم کرد. نظریهٔ گرافها در نظریهٔ گروهها کاربرد فراوان دارد. برای کسب اطلاع بیشتر به [11,24] رجوع کنید.

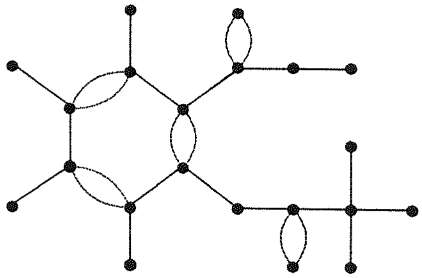
۵.۵. کاربرد نظریهٔ گرافها در جبر مجرد. فرض کنید R یک حلقه و $P(x_1, \ldots, x_n)$ یک چندجمله‌ای روی R باشد. اگر به ازای هر $a_1, \ldots, a_n \in R$ داشته باشیم $P(a_1, \ldots, a_n) = 0$ می‌گوییم R در اتحاد $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ صدق می‌کند. حلقه‌ای را که در یک اتحاد نابدیهی صدق کند یک **حلقهٔ اتحاد چندجمله‌ای** یا به طور خلاصه یک حلقهٔ PI می‌نامند. در جبر، اعم از خطی، جابجایی یا ناجابجایی حلقه‌های PI جایگاهی خاص دارند. ساده‌ترین آنها حلقه‌های ماتریسی $M_n(F)$اند که در آن F هیأت است.

یافتن اتحادهای چندجمله‌ای روی حلقه‌های، مختلف به‌ویژه روی حلقه‌های ماتریسی از مباحث مهم نظریهٔ حلقه‌های PI است. با استفاده ازگرافهای جهتدار اویلری می‌توان ردهٔ جدیدی از اتحادهای چندجمله‌ای برای حلقه‌های ماتریسی $M_n(R)$ که در آن R یک حلقهٔ جابجایی یکّه‌دار است به‌دست آورد.

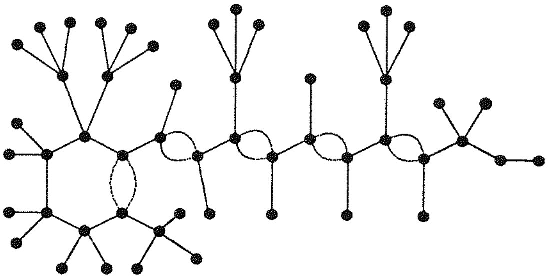
۶. نظریهٔ شیمیایی گرافها

در بخش ۱ به کار کیلی در کشف درختان و شمارش تعداد ایزومرها اشاره کردیم. وی در سال ۱۸۷۴ مقاله‌ای با عنوان «نظریهٔ ریاضی ایزومرها» نوشت [16] و راهی را گشود که به تألیف کتابی در دو مجلّد با نام «نظریهٔ شیمیایی گرافها» انجامید [40]. کلاً نمایش ملکول به وسیلهٔ گراف کار ساده‌ای است ـ اتمها را به عنوان رأسها و پیوندهای شیمیایی را به عنوان یالها در نظر می‌گیریم. اما وجود همبستگی قوی بین ویژگیهای شیمیایی ملکول و مفاهیم و پارامترهای مشخصی از گراف متناظر با آن شگفت‌آور است. یکی از این پارامترها مجموع قدرمطلقهای صفرهای چندجمله‌ای تطابقهای گراف مربوط به هر هیدروکربن معطر (آروماتیک) است که با رایحهٔ آن ارتباط نزدیک دارد! در شکل ۷ نمودارهای مربوط به گرافهای آسپرین و ویتامین A را رسم کرده‌ایم.

یکی از پژوهشهای جاری مطالعهٔ باکیبال است. باکیبال ملکولی متشکل از ۶۰ اتم کربن است که به توپ فوتبال شباهت زیادی دارد ـ شکل ۸ را ببینید. اهمیت باکیبال در این است که با مواد جدیدی موسوم به ابررساناهای دمای بالا، که در سالهای نزدیک به ۱۹۹۰ کشف شدند و در صنعت کاربرد فراوان دارند، ویژگیهای مشترک دارد. این ملکول به قول سیپرا [17] بسیاری از شیمیدانها، فیزیکدانها و متخصصان علم مواد را مثل موریانه به دور خود جمع کرده است. بعداً چند ریاضیدان از جمله یک متخصص نظریهٔ گرافها و یک متخصص نظریهٔ نمایش گروهها نیز به این جمع پیوسته‌اند. در شمارهٔ ۱۷ فرهنگ و اندیشه ریاضی مطلبی در این باره نوشته شده است.

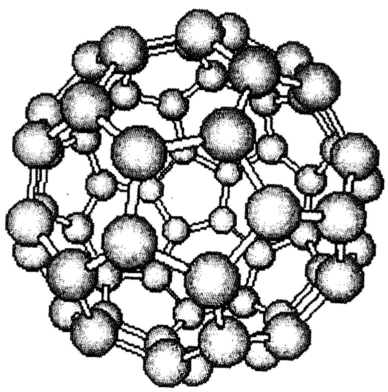


$C_9H_8O_4$ آسپرین



$C_{20}H_{30}O$ ویتامین A

شکل۷



شکل۸

۷. نظریهٔ توپولوژیک گرافها

مسألهٔ سه چاه و سه خانهٔ شیخ بهایی را به خاطر دارید. بر صفحه (یا کره) نمی‌توان نموداری برای $K_{۳,۳}$ و $K_۵$ چنان رسم کرد که هیچ دو یالی، مگر احتمالاً در نقطهٔ متناظر با رأس مشترکشان، یکدیگر را قطع نکنند. اما گراف $K_۴$ و هر یک از «مشتقهای» آن، طبق شکل ۹، واجد این ویژگی است.

شکل۹

هر گراف را به عنوان **مشتق صفر** خودش می‌پذیریم. **مشتق اول** گرافی ناتهی چون G گرافی است که از حذف یالی چون uv از G و افزودن رأسی جدید مانند w همراه با یالهای uw و vw به‌دست می‌آید. گراف هفت رأسی شکل ۹ مشتق سوم گراف $K_۴$ است. گرافهایی چون $K_۴$ یا هر یک از مشتقهای $K_۴$ را یک **گراف مسطح (هامنی)** می‌نامند. کوراتوفسکی در سال ۱۹۳۰ ثابت کرده است که

قضیه [33] گراف مسطح است اگر و تنها اگر زیرگرافی نداشته باشد که مشتقی از $K_{۳,۳}$ یا $K_۵$ باشد.

گرافهای $K_{۳,۳}$ و $K_۵$ را **گرافچه‌های** صفحه (کره) می‌نامند. اردیش بزرگترین مسأله پرداز تمام اعصار پس از مشاهدهٔ این قضیه مسألهٔ بررسی گرافچه‌های سایر رویه‌ها را مطرح کرد.

فرض کنید $\sum$ یک رویه (۲ـ خمینهٔ فشردهٔ جهت‌پذیر یا جهت‌ناپذیر) باشد و فرض کنید $T(\sum)$ مجموعهٔ تمام گرافهای نایکریختی را نشان دهد که هر عضو آن نتواند بر $\sum$ به طور مناسب رسم شود و هیچ کدام مشتق دیگری نباشد. اگر $\sum$ صفحه باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ کوراتوفسکی $T(\sum)$ تنها دو عضو $K_{۳,۳}$ و $K_۵$ دارد. متناهی بودن یا نبودن $T(\sum)$ در حالت کلی یکی از مسائل موردنظر اردیش بود.

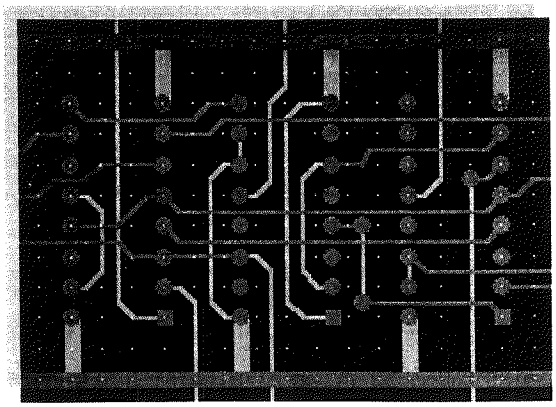
نخستین پاسخ در سال ۱۹۷۹ ارائه شد و آن اینکه اگر $\sum$ صفحهٔ تصویری باشد، آنگاه $T(\sum)$ دقیقاً ۱۰۳ عضو دارد. در سال ۱۹۸۰ متناهی بودن $T(\sum)$ برای تمام رویه‌های جهت‌ناپذیر ثابت شد. سرانجام، اثبات متناهی بودن $T(\sum)$ در مورد هر رویهٔ جهت‌پذیر، با استفاده از یک سلسله مقاله که با نام گرافچه منتشر شده بودند، توسط رابرتسن و سیمور [37] تکمیل شد.

مفهومی که در مهندسی برق و الکترونیک کاربرد دارد **ضخامت گراف** G با نماد $\theta(G)$ است. این پارامتر کمترین تعداد زیرگرافهای فراگیر و مسطح G است که هر یال G به یکی و تنها یکی از این زیرگرافها تعلق داشته باشد. روشن است که $\theta(G) = ۱$ اگر و تنها اگر G مسطح باشد. در حالت کلی تعیین $\theta(G)$ مسأله‌ای بس دشوار است و تاکنون ضخامت تنها چند ردهٔ خاص از گرافها را محاسبه کرده‌اند. از جمله

ثابت شده است که [8]

$$\theta(K_p) = \begin{cases} \lfloor \frac{p+7}{6} \rfloor, & p \neq 9, 10 \\ 3 & p = 9, 10. \end{cases}$$

تعمیم این مفهوم، یعنی تعیین $\theta_n(G)$، $n \in \mathbb{N}$، به معنای کمترین تعداد زیرگرافهای فراگیری از G که هر یک را بتوان بر کره‌ای با n حفره نشاند باز، جالب و مشکل است و کاربرد دارد. در شکل ۱۰ گراف مسطحی به صورت مدار چاپی رسم شده است. دربارهٔ مدارهای چاپی مرجع [38] را ببینید.



شکل ۱۰

۸. نظریهٔ الگوریتمی گرافها

در ریاضیات، پاسخ مثبت بسیاری از مسائل بله یا خیر یا به صورت وجودی ارائه می‌شوند یا به صورت ساختاری. نمونه‌های زیادی از هر دوگونه پاسخ در دست‌اند. پاسخهای ساختاری را الگوریتمی نیز می‌نامند و در عمل مفیدترند. اجمالاً الگوریتم را فرایند عمومی و گام به گامی می‌دانیم که برای حل یک مسأله به کار می‌رود و در هر گام دستورالعمل معین و مشخصی اجرا می‌شود. تاکنون در نظریهٔ گرافها چند کتاب تحت عنوان «نظریهٔ الگوریتمی گرافها» نگاشته شده‌اند.

آیا به‌ازای هر گراف G نابرابری $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ درست است؟ استقراء بر p مثبت بودن پاسخ را نشان می‌دهد. ولی آیا الگوریتمی هم وجود دارد که با استفاده از آن بتوان رأسهای G را با $1 + \Delta(G)$ رنگ به طور مناسب رنگ کرد؟ با فرض وجود، استفاده از این الگوریتم تا چه حد «ساده» است؟

در این مختصر که حتی معرفی مفاهیم و نمادهای ابتدایی مبحث پیچیدگی محاسبات مقدور نیست خواننده را به [23] ارجاع می‌دهیم و می‌کوشیم به اجمال به ذکر چند نکته بپردازیم. ممکن است بتوان یک مسأله را با چند الگوریتم متفاوت حل کرد. لذا مقایسهٔ الگوریتمها و تعیین «بهترین» الگوریتم مطرح است. به بیانی، الگوریتمی را بهترین می‌دانیم که «کامپیوتر» با «کمترین» زمان ممکن مسأله را حل کند. پس مبحث

علم کامپیوتر و ارائه «مصداقی» از مسأله به کامپیوتر با «الفبایی» مناسب مطرح می‌شود. در تعیین مدت زمان حل مسأله، هم نوع کامپیوتر دخیل است و هم برنامهٔ کامپیوتری مربوط. و لذا در علم نظری کامپیوتر مفاهیم ماشینهای تورینگ قطعی و غیرقطعی و همچنین «زبان» تعریف می‌شوند. کلاً یک ماشین تورینگ غیرقطعی، کامپیوتری فرضی است که می‌تواند به طور همزمان بینهایت عمل محاسباتی مستقل انجام دهد.

به هر الگوریتم A کمیتی نسبت می‌دهند که به نوعی معرف پیچیدگی زمانی یا درجهٔ سختی آن باشد. این کمیت تابعی از مصداق مسأله است. مثلاً پیچیدگی زمانی الگوریتم مربوط به رنگ‌آمیزی رأسهای گراف G تابعی از p، تعداد رأسهای G، است. به‌طور کلی این تابع را که پیچیدگی زمانی الگوریتم مفروض A می‌نامند با $f(A,p)$ یا به طور خلاصه با $f(p)$ نمایش می‌دهند. الگوریتم A را سریع یا با تابع چندجمله‌ای می‌نامند، هرگاه تابعی چندجمله‌ای چون $P(p)$، بر حسب p، وجود داشته باشد که به ازای pهای به قدر کافی بزرگ $f(p) \leq P(p)$. مسأله‌ای را که الگوریتم سریع داشته باشد **مسأله‌ای از نوع P** می‌نامند و ردهٔ P را به اینگونه مسائل تخصیص می‌دهند. سایر الگوریتمها، با زمانِ نمایی نام دارند. هر دو مسألهٔ: آیا گراف مفروض G اویلری است و آیا گراف مفروض G همبند است از نوع P هستند. این مسأله که گراف مفروض G همیلتنی است یا نه در حال حاضر به ردهٔ P تعلق ندارد؛ اما، از ویژگی جالبی برخوردار است. اگر شخصی جایگشتی چون $(v_1, \dots, v_p)$ از رأسهای یک گراف G را ارائه و ادعا کند دوری همیلتنی برای G به دست می‌دهد، با زمان چندجمله‌ای می‌توان درستی یا نادرستی ادعا را ثابت کرد و چون یک ماشین تورینگ غیرقطعی تمام جایگشتهای مجموعهٔ رأسهای G را همزمان به‌دست می‌دهد می‌گوییم این مسأله از نوع NP است. ردهٔ NP به اینگونه مسائل اختصاص دارد. آیا گراف G زیرگراف K_n، $n \in \mathbb{N}$، دارد؟ این مسأله هم از نوع NP است. به‌طور خلاصه NP ردهٔ تمام مسائلی است که در مورد هر یک برای آزمایش درستی هر پاسخ ارائه شده الگوریتمی سریع وجود داشته باشد. درستی $P \subseteq NP$ واضح است، ولی آیا $NP \subseteq P$؟ این مسأله یکی از مسائل حل نشده است و بسیاری عقیده دارند که $NP \neq P$.

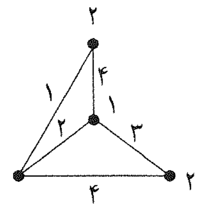
برخی از مسائل NP را از نوع NPC می‌نامند و ردهٔ NPC را متشکل از مسائلی می‌دانند که به صورت زیر تعریف می‌شوند: می‌گوییم مسأله π به صورت چندجمله‌ای به مسأله π' قابل تحویل است هرگاه بتوانیم هر مصداق M' از π' را در زمان چندجمله‌ای به یک مصداق M از π چنان تبدیل کنیم که M و M' پاسخی یکسان داشته باشند. لذا هر الگوریتم برای حل π با اندک زمان اضافی می‌تواند π' را نیز حل کند. مسأله‌ای از نوع NP را عضوی از NPC تلقی می‌کنیم که هر مسأله دیگر از نوع NP در زمان چندجمله‌ای به آن قابل تحویل باشد. لذا اگر π عضو NPC باشد و اگر بتوان برای π الگوریتمی سریع پیدا کرد، آنگاه الگوریتمی سریع برای تمام مسائل NP پیدا خواهد شد. به‌عکس، اگر بتوان ثابت کرد برای مسأله‌ای از نوع NP الگوریتمی سریع وجود ندارد، آنگاه هیچ مسأله‌ای از NPC نمی‌تواند به P تعلق داشته باشد. کوک در سال ۱۹۷۱ با معرفی مسأله‌ای در منطق نشان داد NPC تهی نیست. در حال حاضر این رده بیش از هزار عضو دارد که بسیاری به نظریهٔ گرافها تعلق دارند. دامنهٔ NPC به سرعت در حال رشد است. به عنوان مثال یافتن $\chi(G)$ از نوع NPC است. جالب است توجه کنیم که مسأله یکریخت بودن یا یکریخت نبودن دو گراف که مسلماً از نوع NP است هنوز معلوم نیست به P تعلق دارد

و نیز هنوز معلوم نیست از نوع NPC است! حدس این است که این مسأله نه از نوع P است و نه از نوع NPC.

۹. اعداد رنگی

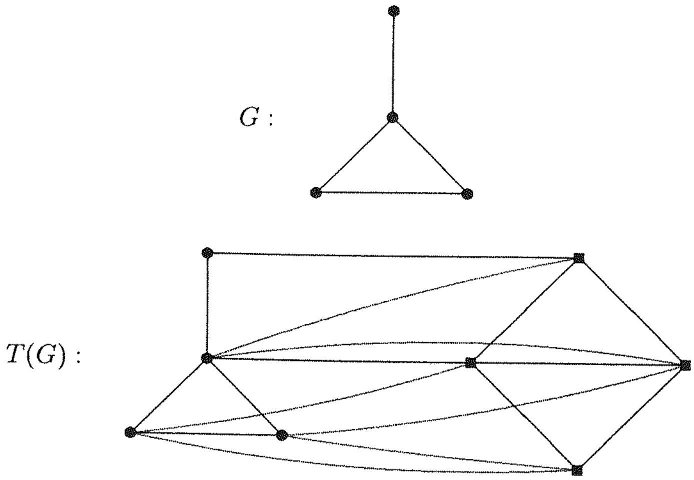
گفتیم که به هر گراف اعداد رنگی متفاوتی نسبت داده‌اند. در مرجع [30] با عنوان مسأله‌های رنگ‌آمیزی گرافها دویست مسأله باز ارائه شده است که همگی از چند ویژگی برخوردارند. یکی از این ویژگیها ساده بودن بیان این مسأله‌ها است. عدد رنگی (رأسی) $\chi(G)$ از گراف G را بیش و پیش از همه بررسی کرده‌اند. پارامتر $\chi'(G)$ صورت یالی همین مسأله است. در این بخش به اختصار عدد رنگی کلی را معرفی می‌کنیم و با اشاره به عدد رنگی دوری بخش را به پایان می‌بریم.

۹.۱. عدد رنگی کلی. در بخش ۳ عنصر و دو عنصر مرتبط را تعریف کردیم. به هر عنصر گراف G رنگی چنان نسبت می‌دهیم که رنگهای هر دو عنصر مرتبط متفاوت باشند. کمترین تعداد رنگهای لازم برای انجام این کار را با $\chi''(G)$ نمایش می‌دهیم و آن را **عدد رنگی کلی** G می‌نامیم. شکل ۱۱ نشان می‌دهد که عدد رنگی کلی گراف شکل ۴ برابر با ۴ است. واضح است که $\chi''(G) \geq ۱ + \Delta(G)$. **حدس رنگ‌آمیزی کلی** که به پیش از سال ۱۹۶۵ بر می‌گردد [3] حاکی است که $\chi''(G) \leq ۲ + \Delta(G)$. در مورد این حدس بیش از ۲۰۰ مقاله و یک کتاب [45] منتشر شده است. قبل از سال ۱۹۹۸ کرانهای بالای بسیاری از جمله $\Delta + ۲\sqrt{\Delta}$ و $\Delta + ۱۸\Delta^{\frac{۱}{۴}}\mathrm{Log}(۳\Delta)$ برای χ'' ارائه شده بودند. در این سال با استفاده از استدلالهای مارتینگلی، مُلوی و رید اثبات کردند که اگر $\Delta(G)$ به قدر کافی بزرگ باشد $\chi''(G) \leq \Delta(G) + ۵۰۰$. این مطلب دست‌آورد بزرگی در مورد حدس رنگ‌آمیزی کلی محسوب می‌شود [25].



شکل۱۱

به هر گراف G گرافی موسوم به **گراف کلی** G نسبت می‌دهیم و آن را با $T(G)$ نمایش می‌دهیم [3]. در شکل ۱۲ با یک مثال روش به دست آوردن نمودار گراف $T(G)$ با کمک نمودار G را نمایش داده‌ایم. واضح است که $\chi''(G) = \chi(T(G))$. لذا اگر حدس رنگ‌آمیزی کلی درست باشد $\chi(T(G))$



شکل۱۲

یکی از دو عدد مشخص است. این مطلب به تنهایی معرفی مفاهیم کلی را توجیه می‌کند و اهمیتشان را نشان می‌دهد. گرافهای کلی مشخص‌سازی شده [4] و بر اساس آن الگوریتمی جهت تعیین G از $T(G)$ ارائه شده است. علاوه براین، با استفاده از گروه کلی گراف که در بخش ۵ معرفی شد ثابت شده است که یکریختی دو گراف شرط لازم و کافی برای یکریخت بودن گرافهای کلی آنها است. برای مشاهدهٔ کاربردی دیگر از گرافهای کلی به [46] رجوع کنید.

در ارتباط با عدد رنگی کلی نتایج جالب دیگری هم به دست آمده‌اند. در این جا به ذکر صورت سه قضیه بسنده می‌کنیم.

ـــ مسألهٔ رنگ‌آمیزی کلی مسأله‌ای از نوع NPC است.

ـــ احتمال اینکه حدس رنگ‌آمیزی کلی درست باشد «تقریباً» یک است.

ـــ احتمال اینکه عدد رنگی کلی یک گراف تصادفی $\Delta(G) + ۱$ باشد «تقریباً» یک است.

۹.۲. عدد رنگی دوری مفهومی نسبتاً تازه و پلی بین ریاضیات گسسته و پیوسته است. این مفهوم را می‌توان به چندین روش معادل تعریف کرد. در اینجا نخستین تعریف به نام **عدد رنگی ستاره‌ای** را ارائه می‌کنیم که از آنِ وینس [43] است. یادآور می‌شویم با اینکه تنها ۱۴ سال از معرفی این مفهوم می‌گذرد حجم مطلب در این باره بسیار زیاد است. علاقمندان را به [26] و [47] ارجاع می‌دهیم.

به‌ازای دو عدد صحیح d و k، $۱ \leq d \leq k$، یک(k,d)ـ**رنگ‌آمیزی** گرافی چون G یک رنگ‌آمیزی c از رأسهای G به رنگهای ۰، ۱، ...، $k - ۱$ است که اگر $uv \in E(G)$ داشته باشیم:

$k-d$ ≥ $|c(u)-c(v)| \leq k-d$. **عدد رنگی دوری** G، با نماد $\chi_c(G)$، برابر است با:

$$\chi_c(G) = \inf\{k/d \mid \text{یک } (k,d)\text{-رنگ‌آمیزی برای } G \text{ وجود داشته باشد}\}.$$

توجه کنید که به ازای هر عدد طبیعی k، یک $(k-۱)$-رنگ‌آمیزی گراف G همان رنگ‌آمیزی رأسهای G با k رنگ است.

۱۰. ارتباط نظریهٔ گرافها با آنالیز

• در پایان بخش قبل اشاره کردیم که مفهوم عدد رنگی دوری یک گراف ارتباطی نزدیک بین نظریهٔ گرافها و آنالیز ریاضی ایجاد کرده است.

• قضیهٔ نقطه ثابت براور برای دو بعد را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر تابع پیوسته از یک ناحیهٔ مثلثی T به خودش لزوماً نقطه‌ای ثابت دارد. امکان ارائه اثبات سادهٔ این قضیه با استفاده از مفهوم گراف شگفت‌آور است.

• با این شرط که $\mu(G;x)$ چندجمله‌ای تطابقهای گراف G و $pm(G)$ تعداد تطابقهای تام (فراگیر) آن باشد، داریم [24]:

$$pm(\overline{G}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^۲/۲}\mu(G;x)dx.$$

• در بخش ۵ به مفهوم چندجمله‌ای رنگی $P(G;\lambda)$ گراف G اشاره کردیم. ثابت شده است که اگر G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد، تمام ریشه‌های $P(G;z)$ در صفحهٔ مختلط به ناحیه‌های بستهٔ زیر تعلق دارند [39]:

اجتماع قرصهای مستدیر $|z-q| \leq q$ و $|z| \leq q-۱$.

اجتماع قرصهای مستدیر $|z-q+p-۲| \leq q$ و $|z-۱| \leq q-۱$، یا

اجتماع قرص مستدیر $|z-۱| \leq q-۱$ و خاگی کاسینی $|z-q+p-۲|.|z-۱| \leq q(q-۱)$.

این مطالب به ارتباط بین نظریهٔ گرافها و آنالیز اشاره دارند و بررسی آنها باید در دستور کار قرار گیرد. مبحث گرافهای نامتناهی و ارتباط نزدیک آن با نظریهٔ اپراتورها نیز جالب و درخور بررسی است. برخی از ریاضیدانان، قرن بیستم را قرن ریاضیات و فیزیک و قرن حاضر را قرن ریاضیات و زیست‌شناسی می‌پندارند. در این راستا گراف مدل مناسبی برای مطالعهٔ مغز موجودات است. مغز انسان گرافی است با حدود $۱۰^{۱۰}$ رأس (نرون) و $۱۰^{۱۴}$ یال (سیناپس)!

در پایان از پیشنهادهای سازندهٔ همکاران گرامی آقایان دکتر: روزبه تویسرکانی، حسین حاج‌ابوالحسن و منوچهر ذاکر سپاسگزارم. از استاد گرانمایه آقای دکتر ارسلان شادمان که مرا به نوشتن واداشتند ممنونم و زحمت خانم پروانه بختیاری (زارع‌نهندی) در تایپ مقاله را ارج می‌نهم.

مراجع

[1] Alon N. & Spencer J.H., *The Probabilistic Method*, Wiley (1992).

[2] Appel K., & Haken W., Every planar map is four colorable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **82** (1976), 711-712.

[3] Behzad M., *Graphs and their Chromatic Numbers*, Ph.D. Thesis, Michigan State University (1965).

[4] Behzad M., A characterization of total graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **26** (1970) 383-389.

[5] Behzad M., Chartrand G.,& Lesniak-Foster L., *Graphs and Digraphs*, Wadsworth, Belmont CA. (1979).

[6] Behzad M. & Radjavi H., The total group of a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968) 158-163.

[7] Behzad M. & Radjavi H., Another analog of Ramsey numbers, *Math. Ann.*, **186** (1970) 228-232.

[8] Beineke L.W., The decomposition of complete graphs into planar subgraphs, *Graph Theory & Theoretical Physics* (F. Harary ed.) Academic Press, London (1967) 139-154.

[9] Bellman R., Cooke K.L. Lockett J. *Algorithms, Graphs, and Computers*, Academic Press (1970).

[10] Berge C. *Theorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris (1958).

[11] Biggs N., *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press (1974) 2nd ed. 1993.

[12] Birkhoff G.D., A determinantal formula for the number of ways of coloring a map, *Ann. of Math.* **14** (1912) 42-46.

[13] Bollobas B., *Random Graphs*, Academic Press (1985).

[14] * Bondy J.A.,& Murty U.S.R. *Graph Theory with Applications*, North

* تقریباً نصف مراجع کتاب‌اند. در این میان تنها مرجع ۱۴ را آقای دکتر دارا معظمی به فارسی برگردانده و مرکز نشر دانشگاهی آن را منتشر کرده است.

Holland, New York (1976).

[15] Cayley A., On the theory of the analytical forms called trees, *Philos. Mag.*, **13** (1857) 19-30.

[16] Cayley A., On the mathematical theory of isomers, *Philos. Mag.* **67** (1874) 444-446.

[17] Cipra B., Map-coloring theorists look at new worlds, *What's Happening in the Mathematical Science* (1995) 43-47.

[18] Cvetkovic D.M., Doob M.,& Sachs H., *Spectra of Graphs,* Academic Press (1980).

[19] Cvetkovic D.M., Doob M., Gutman I., & Torgasev A., *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*, North-Holland, Amesterdam (1987).

[20] Erdos P., Some remarks on the theory of graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947) 292-294.

[21] Euler L., Solutio problematis od geometriam situs pertinentis, *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae,* **8** (1736) 128-140.

[22] Farrell E.J., & Wahid S.A., An introduction to graphs whose matching polynomials are determinants of matrices, *Bulleten of the Institute of Combinatorics and its Applications,* **15** (1995).

[23] Garey J.M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability,* W.H. Freeman & Company (1980).

[24] Godsil C.D., *Algebraic Combinatorics,* Chapman and Hall, London (1993).

[25] Habib M., et.al. (Eds.) *Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics*, Springer (1998).

[26] Hajiabolhassan H. & Zhu X., Circular chromatic number of Kneser graphs, submitted (2002).

[27] Graham R.L., Rothschild B. L. & Spencer J.H., *Ramsey Theory,* Wiley (1980) 2nd ed. 1990.

[28] Heawood P.J., On the four-colour map theorem *Q.J. Math.* **29** (1898) 270-285.

[29] Heilman O.J. & Lieb E.H., Theory of monomer-dimer systems, *Commun. Math. Physics*,**25** (1972) 190-232.

[30] Jensen J.R.,& Toft B., *Graph Coloring Problems*, Wiley (1995).

[31] Kirchhoff G., Uber die auflosung der gleichungen ... *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847) 497-508.

[32] Konig D. *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig (1936).

[33] Kuratowski K., Sur le probleme des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930) 271-283.

[34] Ore O., *Theory of Graphs*, Amer. Math. Soc. Collog. Publ. **38** (1962).

[35] Ore O., *The Four-Color Problem*, Academic Press (1967).

[36] Ramsey F., On a problem of formal lagic, *Proc. London Math. Soc.*, **30** (1930) 264-286.

[37] Robertson N.,& Seymeour P.D., Several papers under the common title "Graph Minors".

[38] Seshu S., & Read M.B., *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley (1961).

[39] Thier V., Graphen ünd Polynome, Diploma Thesis, TU München (1983).

[40] Trinajstic N., *Chemical Graph Theory*, Vols. I & II, CRC Press Inc. Boca Raton, Florida (1983).

[41] Turan P., Eine extremalaufgabe aus der graphen theorie, *Math. Fiz. Lapok*, **48** (1941) 436-452.

[42] Tutte W.T., On chromatic polynomials and the golden ratio, *J. Comb. Theory*, **9** (1970) 289-296.

[43] Vince A. Star chromatic number, *J. Graph Theory*, **12** (1988) 551-559.

[44] Whitney H., A theorem on graphs, *Ann. of Math.* **32** (1931) 378-390.

[45] Yap H.P., *Total Colorings of Graphs*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.

[46] Zaker M., NP-completeness of Grundy numbers, submitted (2002).

[47] Zhu X., Circular chromatic number, a survey, *Discrete Math.* **229** (2001) 371-410.

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۲۳ تا ۴۳

یک بررسی اجمالی از بعضی مباحث در آنالیز تابعی غیرخطی

بهزاد جعفری روحانی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

پست الکترونیک: b-rohani@cc.sbu.ac.ir

۱. مقدمه

آنالیز تابعی غیرخطی، یا بهتر بگوییم نه لزوماً خطی، اکنون به شکل یک شاخهٔ بسیار گسترده و فعال با کاربردهای بسیار وسیع در رشته‌های مختلف از جمله فیزیک، مهندسی، آمار، اقتصاد، علوم اجتماعی، پزشکی و غیره در ریاضیات امروز در دنیا مطرح است، به طوری که مشاهده می‌کنیم در اغلب دانشگاههای معتبر دنیا مراکز تحقیقاتی با این نام یا مشابه آن وابسته به دانشکده‌های مختلف دانشگاه که به بخش ریاضی محدود نمی‌شوند و حتی در بعضی موارد به دانشکده‌های اقتصاد و پزشکی وابسته هستند، تأسیس شده است.

متأسفانه در میهن ما تاکنون توجه زیادی به این موضوع نشده است که امید است در آینده توجه بیشتری به این امر مبذول گردد.

با توجه به وسعت مباحث مختلف در آنالیز تابعی غیرخطی، به اختصار می‌توان از شاخه‌های زیر نام برد:

- نظریهٔ نقطهٔ ثابت.
- اپراتورهای یکنوا (خطی و غیرخطی)؛ نظریهٔ نیم گروهها و معادلات تحوّلی.
- روشهای تغییراتی و مسائل بهینه‌یابی.

که برای بررسی عمقی هریک از آنها نیاز به چندین درس در دوره‌های تحصیلات تکمیلی است. لذا با توجه به محدودیت زمانی در این سخنرانی، به شاخهٔ خاصّ نظریهٔ نقطهٔ ثابت می‌پردازیم که پس از یک بررسی اجمالی، تأکید را بر زیرشاخهٔ نگاشتهای انقباضی می‌گذاریم و سعی می‌کنیم تحولات مهمی را که از بدو پیدایش این شاخه تاکنون انجام گرفته است به‌طور اجمالی بررسی کنیم.

برای استفادهٔ دانشجویان، کتب مرجع [1,4,10,11,14,26,27,31,42] را توصیه می‌کنیم و برای تعمیق مطالب تخصصی، دانشجو می‌تواند به مقالات ارجاع داده شده رجوع کند.

۲. نظریهٔ نقطهٔ ثابت

به اختصار می‌توان نظریهٔ نقطهٔ ثابت را به چهار شاخهٔ زیر تقسیم کرد که در اینجا یک بررسی اجمالی از آنها انجام می‌دهیم:

۲.۱ نظریهٔ توپولوژیک.

۲.۲ نظریهٔ ترتیبی.

۲.۳ نظریهٔ متریک.

۲.۴ نظریهٔ هندسی ـ توپولوژیک.

۲.۱ نظریهٔ نقطهٔ ثابت توپولوژیک

الف ـ قضیهٔ Brouwer

قضیهٔ ۲.۱.۱ (Brouwer). فرض کنیم B گوی واحد بستهٔ R^n باشد و $f : B \to B$ یک نگاشت پیوسته. در این صورت f دارای یک نقطهٔ ثابت است (یعنی $x \in B$ موجود است به‌طوری که $f(x) = x$).

توضیحات ۲.۱.۲

۱ـ حالت $n = ۱$ مستقیماً از قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته نتیجه می‌شود. درواقع حالت $n = ۱$ به Bolzano (1781-1848) (ریاضیدان چک) برمی‌گردد. اگر $f : [a, b] \to [a, b]$ پیوسته باشد و اگر $f(a)f(b) < ۰$ در این صورت $x \in (a, b)$ موجود است به‌طوری که $f(x) = ۰$.

۲ـ Brouwer قضیهٔ خود را در سال 1908 اعلام کرد و یک اثبات در حالت $n = ۳$ در سال 1909 برای آن ارائه داد.

۳ـ Hadamard در سال 1910 یک اثبات دیگر با استفاده از نظریهٔ اندیس ارائه داد.

۴ـ در سال 1912، Brouwer یک اثبات کلی با استفاده از نظریهٔ درجهٔ Brouwer ارائه داد.

۵ـ در سال 1929 Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (KKM)، اثباتی دیگر پایه‌گذاری شده بر لم ترکیبیاتی Sperner ارائه دادند.

۶ـ J.Milnor[34] در سال 1978 یک اثبات کاملاً تحلیلی و ساده برای آن ارائه داد.

ب- قضیهٔ Bohl (1904)

قضیهٔ ۲.۱.۳ (Bohl). فرض کنیم $T : B \to R^n$ یک نگاشت پیوسته باشد و $Tx \neq ۰$ برای هر $x \in B$. در این صورت $x \in \partial B$ و عدد $\mu < ۰$ موجود هستند به‌طوری که $Tx = \mu x$.

از قضیهٔ Bohl، قضیهٔ زیر را نتیجه می‌گیریم:

قضیهٔ ۲.۱.۴. فرض کنیم $f : B \to R^n$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوری که:

$$\forall x \in \partial B, \quad \forall \lambda > ۱, \quad f(x) \neq \lambda x$$

در این صورت $x \in B$ موجود است به‌طوری که $f(x) = x$.

اثبات: قرار دهیم $T = I - f$. در غیر این صورت $\forall x \in B, \quad f(x) \neq x$. یعنی $Tx \neq ۰$ برای هر $x \in B$. از قضیهٔ Bohl نتیجه می‌شود که $x \in \partial B$ و عدد $\mu < ۰$ موجود هستند به طوری که $Tx = \mu x$ یعنی: $f(x) = x - Tx = (۱ - \mu)x$ بنابر این $x \in \partial B$ و عدد $\mu < ۰$ موجود هستند به طوری که $f(x) = (۱ - \mu)x = \lambda x$ که در اینجا $۱ - \mu > ۱ = \lambda$. پس نشان دادیم که با فرض عدم وجود نقطهٔ ثابت، $x \in \partial B$ و عدد $\lambda > ۱$ موجود هستند به طوری که $f(x) = \lambda x$ و بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

نتیجهٔ ۲.۱.۵. قضیهٔ Brouwer از قضیهٔ Bohl نتیجه می‌شود.

اثبات: زیرا در حالت خاص $f : B \to B$ (که در قضیهٔ Brouwer داریم) شرط قضیهٔ بالا برقرار است (یعنی داریم: $\forall x \in \partial B, \forall \lambda > ۱, f(x) \neq \lambda x$). پس قضیهٔ Brouwer بدست می‌آید، یعنی $x \in B$ موجود است به طوری که $f(x) = x$.

توضیح ۲.۱.۶. به این دلیل، قضیهٔBrouwer را قضیهٔ Brouwer-Bohl نیز می‌نامند.

ج- قضیهٔ Schauder (1930)

قضیهٔ ۲.۱.۷ (Schauder). اگر K یک زیرمجموعهٔ فشرده و محدب و ناتهی در یک فضای باناخ باشد و اگر $T : K \to K$ یک نگاشت پیوسته باشد، در این صورت T دارای یک نقطهٔ ثابت است.

د- قضیهٔ Schauder-Tychonov

این قضیه، قضیهٔ Schauder را به فضاهای برداری توپولوژیک هسدورف و به طور موضعی محدب تعمیم می‌دهد.

توضیحات ۲.۱.۸

۱ـ S. Kakutani قضیهٔ Brouwer را به نگاشتهای چندمقداری تعمیم داد.

۲ـ K. Fan و F.E. Browder قضیهٔ Schauder-Tychonov را به نگاشتهای چند مقداری تعمیم دادند و E. Tarafdar معادل بودن آن را با اصل FKKM نشان داد. همچنین یک تعمیم و نیز کاربرد آن در نامساویهای تغییراتی توسط مؤلف [22]ارائه گردید.

هـ ـ یک کاربرد سادهٔ نگاشتهای چند مقداری: قضیهٔ ازدواج

قضیهٔ ۲.۱.۹ (قضیهٔ ازدواج). فرض کنیم W یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی باشد و M یک مجموعهٔ ناتهی و $F : W \to ۲^M$ یک نگاشت چند مقداری روی W. در این صورت F دارای یک انتخاب تک مقداری و یک به یک $m : W \to M$ (یعنی یک نگاشت تک مقداری و یک به یک $m : W \to M$ به طوری که $m(w) \in F(w)$ برای هر $w \in W$) است اگر و فقط اگر

$$|S| \leq |F(S)| \quad \forall S \subset W \qquad (۱)$$

(که در اینجا $|S| := card\ S$ و $|F(S)| = \infty$ نیز مجاز است).

کاربرد ۲.۱.۱۰. فرض کنیم W مجموعهٔ متناهی تعدادی خانم باشد و M یک مجموعهٔ ناتهی مردان. فرض کنیم نگاشت $F : W \to ۲^M$ که نگاشت دوستی می‌نامیم، به هر خانم w، مجموعهٔ دوستان مرد او، یعنی $F(w)$ را نسبت دهد. هدف این است که برای هر خانم یک شوهر بهینه (یا شبه بهینه) پیدا کنیم.

شرط (۱) در قضیهٔ ازدواج بیان می‌کند که برای هیچ زیرمجموعه از خانم‌ها، تعداد آنها از تعداد دوستان مرد آنها بیشتر نیست. به طور مثال با این شرط، دو خانم نمی‌توانند تنها یک دوست مرد مشترک داشته باشند.

اکنون می‌خواهیم یک نگاشت تک مقداری $m : W \to M$ که آن را نگاشت ازدواج می‌نامیم، با دو خاصیت زیر پیدا کنیم:

(i) m یک انتخاب F است، یعنی هر خانم دقیقاً با یک مرد از میان دوستان خودش ازدواج می‌کند. (اصل شوهر شبه بهینه).

(ii) m یک به یک است، یعنی دو خانم شوهرهای متفاوت دارند. (اصل مونوگامی)

همانطوری که در قضیهٔ ازدواج دیدیم، اگر شرط (۱) برقرار باشد، در این صورت مسأله دارای جواب است.

۲.۲ نظریهٔ نقطهٔ ثابت ترتیبی

الف‌ـ قضیهٔ Zermelo

۲.۲.۱ (Zermelo). فرض کنیم $(S, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب (جزئی) باشد به طوری که هر زنجیر در S دارای یک کوچکترین کران بالا باشد. فرض کنیم $f : S \to S$ نگاشتی با خاصیت $f(x) \geq x$ برای

هر $x \in S$ باشد. دراین صورت f دارای یک نقطهٔ ثابت است.

توضیح ۲.۲.۲. با استفاده از لم Zorn، اثبات قضیه خیلی ساده است. بدون استفاده از لم Zorn (که تنها حوالی سالهای 1940 پیدا شد) اثبات کمی دشوارتر است.

ب- قضیهٔ Tarski

تعاریف ۲.۲.۳. فرض کنیم $(S, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی باشد. می‌گوییم S یک شبکه (lattice) است هرگاه برای هر $x, y \in S$، $\sup\{x, y\}$ و $\inf\{x, y\}$ موجود باشند. می‌گوییم S کامل است هرگاه برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی $N \subset S$، $\sup N$ و $\inf N$ موجود باشند. می‌گوییم نگاشت $f : S \to S$ یکنوا است هرگاه:$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

قضیهٔ ۲.۲.۴ (Tarski). فرض کنیم S یک شبکهٔ کامل باشد. در این صورت هر نگاشت یکنوای $f : S \to S$ دارای یک کوچکترین و یک بزرگترین نقطهٔ ثابت است.

۲.۳ نظریهٔ نقطهٔ ثابت متریک

الف- روش تقریبهای متوالی که به Cauchy (1884) برمی‌گردد.

ب- قضیهٔ Banach (1920)

قضیهٔ ۲.۳.۱ (Banach). فرض کنیم (M, d) یک فضای متریک کامل باشد و $T : M \to M$ یک نگاشت اکیداً انقباضی یعنی:

$$\forall x, y \in M \quad d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \quad \text{با} \quad k < ۱$$

در این صورت یک نقطهٔ یکتای $x_\circ \in M$ موجود است به‌طوری که:

(i) $Tx_\circ = x_\circ$

(ii) $\forall x \in M, \lim_{n\to\infty} T^n x = x_\circ$

(iii) برآورد خطا: $\forall x \in M, \forall n \geq \circ, d(T^n x, x_\circ) \leq k^n d(x, x_\circ)$

ج- یک تعمیم جالب: قضیهٔ Caristi (1976)

قضیهٔ ۲.۳.۲ (Caristi). فرض کنیم (M, d) یک فضای متریک کامل باشد و $\varphi : M \to R^+$ یک نگاشت شبه پیوستهٔ پایینی وکراندار از پایین. فرض کنیم $f : M \to M$ در شرط زیر صدق کند:

$$d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x)) \quad \forall x \in M.$$

در این صورت f دارای یک نقطهٔ ثابت است.

توضیحات ۲.۳.۳

۱ـ جالب است که در قضیهٔ بالا f دلخواه است و هیچ فرض پیوستگی روی f نداریم.

۲ـ از قضیهٔ بالا، قضیهٔ Banach نتیجه می‌شود زیرا:

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\le kd(x,y) \Rightarrow d(Tx,T^2x) \le kd(x,Tx) \Rightarrow \\ &d(x,Tx) - kd(x,Tx) = (1-k)d(x,Tx) \le d(x,Tx) - d(Tx,T^2x) \Rightarrow \\ &d(x,Tx) \le \tfrac{1}{1-k}[d(x,Tx) - d(Tx,T^2)] \end{aligned}$$

پس با قراردادن $\varphi(x) = \frac{1}{1-k}d(x,Tx)$ داریم: $d(x,Tx) \le \varphi(x) - \varphi(Tx)$.

۳ـ W.A. Kirk با استفاده از لم Zorn و C. S. Wong (1976) با استفاده از استقراء ماوراء متناهی (transfinite induction) اثباتهای سادهٔ دیگری برای این قضیه ارائه دادند و F. E. Browder نیز یک اثبات سازنده برای این قضیه ارائه داد.

دـ اصل Ekeland (1974)

قضیهٔ ۲.۳.۴ (Ekeland). فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک کامل باشد و $\varphi : M \to R^+$ یک نگاشت شبه‌پیوستهٔ پایینی و کراندار از پایین. روی M رابطهٔ ترتیب جزئی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$x \le y \Leftrightarrow d(x,y) \le \varphi(x) - \varphi(y)$$

در این صورت برای هر $x_\circ \in M$، $(M,\le)$ دارای یک عضو ماکزیمال x^* است به طوری که $x_\circ \le x^*$.

توضیح ۲.۳.۵. اصل Ekeland با قضیهٔ Caristi معادل است.

۲.۴ نظریهٔ نقطهٔ ثابت هندسی-توپولوژیک

این موضوع با مسئلهٔ نمایش پذیری متناهی مرتبط می‌شود و به دلیل کثرت مطالب از پرداختن به آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۳. بررسی نظریهٔ متریک-توپولوژیک برای نگاشتهای انقباضی

در این بخش یک بررسی اجمالی در مورد سیزده تحول مهم که از بدو پیدایش این شاخه تاکنون انجام گرفته است، به عمل می‌آوریم. لازم به تذکر است که این تعداد به هیچ وجه اشباع شده نیست و انتخاب آنها تنها برحسب علایق شخصی و کارهای تحقیقاتی مؤلف بوده است. یادآوری می‌کنیم که اگر (M,d) یک فضای متریک باشد و $N \subset M$، می‌گوییم نگاشت $T : N \to M$ انقباضی است هرگاه:

$$d(Tx,Ty) \le d(x,y) \quad \forall x,y \in N.$$

۳.۱ قضیهٔ Browder-Göhde-Kirk (1965)

این قضیه در سال 1965 توسط این سه نفر به طور مستقل و همزمان اثبات شد. برای بیان قضیهٔ اول تعاریف لازم را عنوان می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ است.

تعاریف ۳.۱.۱

۱ـ می‌گوییم X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است اگر هر زیرمجموعهٔ بسته، محدب، کراندار و ناتهی در X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت برای نگاشتهای انقباضی از این مجموعه به خودش باشد.

۲ـ می‌گوییم X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت ضعیف (weak-FPP) است اگر هر زیرمجموعهٔ محدب، ناتهی، و به طور ضعیف فشرده در X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت برای نگاشتهای انقباضی از این مجموعه به خودش باشد.

۳ـ می‌گوییم X دارای ساختار نرمال است اگر هر زیرمجموعهٔ محدب و کراندار S در X که شامل حداقل دو نقطه است، دارای یک نقطهٔ غیر قطری (یعنی نقطه‌ای مانند $x \in S$ به طوری که $\sup_{y\in S}||x-y|| < diam\ S$) باشد.

توضیح ۳.۱.۲. اگر X انعکاسی باشد، FPP و weak-FPPبا یکدیگر معادلند.

قضیهٔ ۳.۱.۳ (Browder-Göhde-Kirk [29]). فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی و دارای ساختار نرمال باشد. در این صورت X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است.

مسألهٔ باز ۳.۱.۴

۱ـ آیا یک فضای باناخ انعکاسی دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است؟

۲ـ برعکس، اگر X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت باشد، آیا X انعکاسی است؟

۳.۲ اصل نیم بستگی F.E.Browder (1967)

تعریف ۳.۲.۱. می‌گوییم نگاشت $f : K \to X$ نیم بسته است اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\} \subset K$، داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{r} f(x_n) \rightharpoonup w \\ x_n \rightharpoonup y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y \in K \\ f(y) = w \end{array}\right. \quad و$$

(یادآوری می‌کنیم که نمادگذاری $\rightharpoonup$ همگرایی ضعیف را نشان می‌دهد).

تعریف ۳.۲.۲. می‌گوییم فضای باناخ X به طور یکنواخت محدب است اگر:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \ni \begin{cases} \forall x, y \in X \\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta \\ \|x - y\| \geq \epsilon \end{cases}$$

قضیهٔ ۳.۲.۳ (F.E.Browder [11]). فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب و ناتهی در یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد. اگر $T : K \to X$ یک نگاشت انقباضی باشد، در این صورت نگاشت $f = I - T$ روی K نیم بسته است.

نتیجهٔ ۳.۲.۴. در قضیهٔ بالا اگر بعلاوه K کراندار باشد، و اگر $\inf_{x \in K} \|x - Tx\| = 0$ در این صورت T دارای یک نقطهٔ ثابت است.

اثبات: دنبالهٔ $\{x_n\}$ را طوری انتخاب کنیم که $\|x_n - Tx_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. چون K به طور ضعیف فشرده است، پس $\{x_n\}$ دارای یک زیردنبالهٔ به طور ضعیف همگرای $\{x_{n_k}\}$ است؛ مثلاً $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} y$. پس با توجه به نیم بستگی $I - T$ داریم:

$$\left. \begin{array}{c} x_{n_k} - Tx_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y \in K \\ y - Ty = 0 \end{cases} \text{و}$$

تعریف ۳.۲.۵. می‌گوییم X دارای شرط Opial است اگر:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n - x\| < \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n - y\|, \forall y \neq x.$$

توضیح ۳.۲.۶. اصل نیم‌بستگی همچنین برای فضاهای باناخ با شرط Opial صادق است.

تعریف ۳.۲.۷. می‌گوییم X (به طور ضعیف) موضعاً به طور یکنواخت محدب است اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ با $\|x_n\| = 1$ و هر نقطهٔ $x_0 \in X$ با $\|x_0\| = 1$ به طوری که $\|\frac{x_n + x_0}{2}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ داشته باشیم $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ (به ترتیب $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x_0$).

یادآوری می‌کنیم که اگر X^* موضعاً به طور یکنواخت محدب باشد، در این صورت نرم X، Fréchet_دیفرانسیل‌پذیر است.

مسألهٔ باز ۳.۲.۸. آیا اصل نیم بستگی برای فضاهای باناخ موضعاً به طور یکنواخت محدب برقرار است؟

۳.۳ قضیهٔ ساختاری (توکشی) R.E. Bruck (1974)

قضیهٔ ۳.۳.۱ (Bruck [12]). فرض کنیم فضای باناخ X جداپذیر یا انعکاسی باشد، و فرض کنیم X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) باشد. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ محدب، ناتهی و به طور

ضعیف فشرده در X باشد و $T : K \to K$ یک نگاشت انقباضی. فرض کنیم $F(T)$مجموعهٔ نقاط ثابت T در K باشد. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$ و یک نگاشت توکشی انقباضی $R : K \to F(T)$ (nonexpansive retraction) وجود دارد (یعنی R انقباضی است و $\forall x \in K, R^۲(x) = R(x)$).

توضیح ۳.۳.۲. اگر X اکیداً محدب باشد، در این صورت $F(T)$ محدب است. این قضیه دارای کاربردهای زیادی است که ناشی از محدب متریک بودن $F(T)$ است. فرض کنیم:

$$x, y \in F(T); \quad m = R(\lambda x + (۱ - \lambda)y), \quad ۰ < \lambda < ۱$$

در این صورت:

$$R\text{انقباضی} \Rightarrow \begin{cases} \|m - x\| \leq (۱ - \lambda)\|x - y\| \\ \|m - y\| \leq \lambda\|x - y\| \end{cases}$$

پس نگاشت R تمام پاره‌خط جبری $[x, y]$ را به روی یک پاره‌خط متریک تصویر می‌کند. بنابراین $F(T)$ همیشه همبند است.

۳.۴ قضیهٔ ارگودیک میانگینی J.B. Baillon, R.E. Bruck, S. Reich (1974-79)

قضیهٔ ۳.۴.۱. فرض کنیم X به طور یکنواخت محدب با نرم Fréchet- دیفرانسیل‌پذیر باشد و K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب و کراندار و ناتهی در X و $T : K \to K$ یک نگاشت انقباضی. در این صورت برای هر $x \in K$، دنبالهٔ

$$\frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱} T^k x$$

به طور ضعیف به سمت یک نقطهٔ ثابت T همگرا است.

توضیح ۳.۴.۲. بررسی نظریهٔ ارگودیک غیرخطی خود بحثی جالب و مفصل است که با توجه به ذیق وقت خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مراجع [5,13,15-21]و مراجع مذکور در آنها مراجعه کند.

۳.۵ فرایند S. Ishikawa (1976)

در سال ۱۹۵۲، Krasnoselskii ایدهٔ زیر را عنوان کرد: فرض کنیم X به طور یکنواخت محدب باشد و $K \subset X$ محدب و بسته و کراندار و ناتهی باشد و $T : K \to K$ انقباضی. قرار دهیم $f = \frac{I+T}{۲}$. او ثابت کرد که $\forall x \in K; \|f^n(x) - f^{n+۱}(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ۰$. پس اگر K فشرده باشد، در این صورت:

$$\forall x \in K, f^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \in F(T).$$

قضیهٔ ۳.۵.۱ (Krasnoselskii). فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ محدب و فشرده و ناتهی در فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدب X باشد و $T: K \to K$ یک نگاشت انقباضی. قرار دهیم $f = \frac{I+T}{۲}$. در این صورت برای هر $x \in K$، دنبالهٔ $\{f^n(x)\}$ به طور قوی به سمتِ یک نقطهٔ ثابت T همگرا است.

M. Edelstein شرط به طور یکنواخت محدب بودن را به شرط اکیداً محدب بودن تقلیل داد؛ سپس S. Ishikawa قضیه را برای یک فضای باناخ کلی ثابت کرد.

قضیهٔ ۳.۵.۲ (Ishikawa [28]). فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب و کراندار و ناتهی در یک فضای باناخ باشد و $T: K \to K$ یک نگاشت انقباضی. فرض کنیم $۰ < \lambda < ۱$ و قرار دهیم $f_\lambda := (۱-\lambda)I + \lambda T$.
در این صورت:

$$\forall x \in K, \quad \|f_\lambda^n(x) - f_\lambda^{n+۱}(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ۰$$

در سال 1978، Edelstein-O'Brien [25] ثابت کردند که در قضیهٔ بالا، همگرایی روی K یکنواخت است.

سپس، Goebel-Kirk نشان دادند که همگرایی در فرآیند Ishikawa (نه نسبت به K) بلکه نسبت به تمام نگاشتهای انقباضی $T: K \to K$ یکنواخت است.

قضیهٔ ۳.۵.۳ (Goebel-Kirk). فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب و ناتهی و کراندار در یک فضای باناخ باشد و $۰ < \lambda < ۱$. در این صورت برای هر $\epsilon > ۰$، عدد صحیح N موجود است به طوری که برای هر $x \in K$، هر نگاشت انقباضی $T: K \to K$ و برای $f_\lambda = (۱-\lambda)I + \lambda T$ داریم:

$$n \geq N \Rightarrow \| f_\lambda^n(x) - f_\lambda^{n+۱}(x) \| < \epsilon.$$

توضیح ۳.۵.۴. یک اثبات سادهٔ این قضیه نیز جدیداً توسط W.A. Kirk ارائه شده است.

۳.۶ فضاهای L^∞ (Sine [38], Soardi [39], 1979)

تعاریف ۳.۶.۱

۱ـ می‌گوییم فضای متریک (M,d) ابر محدب (hyperconvex) است اگر برای هر خانوادهٔ نقاط $\{x_\alpha\} \subset M$ و اعداد $\{r_\alpha\} \subset R^+$ به طوری که $d(x_\alpha, x_\beta) \subset r_\alpha + r_\beta, \forall \alpha, \beta$ داشته باشیم: $\underset{\alpha}{\cap} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset$.

۲ـ می‌گوییم فضای متریک M تداخلی (injective) است اگر برای هر فضاهای متریک X و Y به طوری که $Y \subset X$ و برای هر نگاشت انقباضی $f: Y \to M$، f دارای یک توسعهٔ انقباضی $\tilde{f}: X \to M$ باشد.

قضیهٔ ۳.۶.۲ (Aronszajn-Panitchpakdi [3])(1954). فضای متریک M تداخلی است اگر و فقط اگر M ابر محدب باشد.

نتیجهٔ ۳.۶.۳ اگر M یک فضای متریک ابرمحدب باشد و M یک زیرفضایِ فضای متریک N، در این صورت یک نگاشت توکشی انقباضی (nonexpansive retraction) از N به روی M وجود دارد.

اثبات: کافی است بگیریم $M = Y$ و $f = Id$.

توضیحات ۳.۶.۴

۱ـ هر فضای متریک ابر محدب کامل است.

۲ـ فضاهای L^∞ (از جمله $(R^n, \|\ \|_\infty)$) ابر محدب هستند.

۳ـ هر اشتراک گویهای بسته در L^∞، ابر محدب است.

قضیهٔ ۳.۶.۵ (Baillon [6]). اگر M یک فضای متریک ابر محدب و کراندار باشد، در این صورت هر نگاشت انقباضی $T : M \to M$ دارای یک نقطهٔ ثابت است.

مسألهٔ باز ۳.۶.۶ آیا قضیهٔ بالا برای نگاشتهای مجانباً انقباضی برقرار است؟

توضیحات ۳.۶.۷

۱ـ اگر M یک فضای متریک ابر محدب و کراندار باشد، در این صورت M با یک زیرمجموعهٔ بسته و کراندار یک فضای باناخ ایزومتریک است.

۲ـ هر فاصلهٔ متریک (metric segment) R در هر فضای متریک M، یک توکش انقباضی M است (زیرا R ابرمحدب است).

۳.۷ نتایج Maurey (1981)

مثال ۳.۷.۱ (Alspach [2]). یک زیرمجموعهٔ محدب و به‌طور ضعیف فشرده در فضای L^1 موجود است که دارای خاصیت نقطهٔ ثابت برای نگاشتهای انقباضی نیست.

نتایج ۳.۷.۲ (Maurey [33]). Maurey روشهای بسیار قوی و مفیدی، از جمله روش‌های فراتوانی (ultrapower methods) و روش‌های احتمالی، ابداع کرد که با استفاده از این روش‌ها نتایج زیر حاصل می‌شوند:

۱ـ زیرفضاهای انعکاسی فضای L^1 دارای خاصیت نقطهٔ ثابت هستند.

۲ـ زیرمجموعه‌های محدب و به‌طور ضعیف فشردهٔ فضای c_0 دارای خاصیت نقطهٔ ثابت هستند.

۳ـ زیرمجموعه‌های بسته و محدب و کراندار فضاهای باناخ سوپر انعکاسی (یعنی دارای یک نُرم معادل به‌طور یکنواخت محدب) دارای خاصیت نقطهٔ ثابت برای ایزومتری‌ها هستند.

۴ـ فضای هاردی H^{1} دارای خاصیت نقطهٔ ثابت ضعیف (weak-FPP) است.

یادآوری: اگر $H(U)$ فضای توابع تحلیلی در U باشد، در این صورت داریم:

$$H^{1}(U) = \{f \in H(U);\ \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta < +\infty\}.$$

مسائل باز ۳.۷.۳

۱ـ آیا یک فضای باناخ سوپر انعکاسی دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است؟

۲ـ آیا خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) برای X توسط تعویض نرم با یک نرم معادل پایا است؟

۳ـ اگر X انعکاسی باشد، آیا X دارای یک نرمِ معادل با خاصیت (FPP) است؟

۴ـ برعکس، اگر X دارای یک نرم معادل با خاصیت (FPP) باشد، آیا X انعکاسی است؟

۳.۸ قضیهٔ Turett (1982)

تعریف ۳.۸.۱. مدول همواری یک فضای باناخ X چنین تعریف می‌شود:

$$\forall \tau > 0, \rho_X(\tau) = \sup_{\substack{x,y \in X \\ \|x\|=\|y\|=1}} \left\{ \frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2}{2} \right\}$$

می‌گوییم X به‌طور یکنواخت هموار است اگر:

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$$

قضیهٔ ۳.۸.۲ (Baillon) (1979). اگر X انعکاسی باشد و اگر

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} < \frac{1}{2}$$

در این صورت X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است.

قضیهٔ ۳.۸.۳ ((Turett[41])(1982)). اگر

$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{t} < \frac{1}{2}$$

در این صورت X و X^* هر دو سوپر انعکاسی هستند و دارای ساختار نرمال نیز هستند.

۳.۹ نتیجهٔ P.K. Lin (1985)

تعاریف ۳.۹.۱

۱ـ می‌گوییم دنبالهٔ $\{x_n\}$ یک پایهٔ Schauder (یا یک پایه) برای فضای باناخ X است هرگاه برای هر $x \in X$، یک دنبالهٔ یکتای اعداد $\{a_n\}$ موجود باشد به طوری که

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

۲ـ می‌گوییم پایهٔ Schauder $\{e_n\}$ غیرشرطی است اگر هرگاه سری $\sum_i a_i e_i$ همگرا باشد، این سری به طور غیرشرطی همگرا باشد، یعنی سری $\sum_i a_{\pi(i)} e_{\pi(i)}$ برای هر جایگشت π روی اعداد طبیعی همگرا باشد.

توضیح و تعریف ۳.۹.۲. با استفاده از اصل کرانداری یکنواخت، ثابت می‌شود که $\{e_n\}$ یک پایهٔ غیرشرطی برای X است اگر و فقط اگر ثابت $1 \leq \lambda$ موجود باشد به طوری که برای هر سری همگرای $\sum_i a_i e_i$ و هر دنبالهٔ علامتهای $\{\epsilon_n\}$، $(\epsilon_n = \pm 1)$، سری $\sum_i a_i \epsilon_i e_i$ همگرا باشد و داشته باشیم $\|\sum a_i \epsilon_i e_i\| \leq \lambda \|\sum a_i e_i\|$. طبق تعریف، کوچکترین ثابت λ که در این نامساوی صدق می‌کند را ثابت غیرشرطی پایهٔ $\{e_n\}$ می‌نامیم. در این صورت می‌گوییم پایهٔ $\{e_n\}$، λـغیرشرطی است.

قضیهٔ ۳.۹.۳ (P.K.Lin [32]) (1985). اگر فضای باناخ X دارای یک پایهٔ شاودر ۱ـغیرشرطی باشد، در این صورت X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت ضعیف است. برای اثبات قضیه، Lin از روشهای فراوانی استفاده کرد.

مثال و کاربرد ۳.۹.۴. در سال 1968، R.C.James فضای زیر را معرفی کرد: $X_\beta = (l^2, \|\ \|_\beta)$، $\beta > 0$ که در اینجا $\|x\|_\beta = \max\{\|x\|_2, \beta\|x\|_\infty\}$. برای هر $\beta > 0$، X_β انعکاسی است. X_β دارای ساختار نرمال است اگر و فقط اگر $\beta < \sqrt{2}$. در سال 1981، Baillon & Schönberg [8] نشان دادند که $X_{\sqrt{2}}$ دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است، (اگرچه $X_{\sqrt{2}}$ دارای ساختار نرمال نیست).

تعریف ۳.۹.۵. می‌گوییم فضای باناخ X دارای ساختار نرمال مجانبی است، (اگر برای هر زیرمجموعهٔ بسته و محدب وکراندار K در X با قطر اکیداً مثبت، و برای هر دنبالهٔ نقاط $\{x_n\}$ در K به طوری که $\|x_{n+1} - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$، نقطهٔ $x \in K$ موجود باشد به طوری که

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < diam\ K$$

توضیح ۳.۹.۶

۱ـ واضح است که اگر X دارای ساختار نرمال باشد، X دارای ساختار نرمال مجانبی نیز هست، ولی برعکس صحیح نیست.

۲ـ قضیهٔ نقطهٔ ثابت Browder-Göhde-Kirk (1965) که در بخش ۳.۱ گفته شد، در حالتی که X دارای ساختار نرمال مجانبی باشد نیز برقرار است.

قضیهٔ ۳.۹.۷ (Baillon & Schönberg)(1981). X_β دارای ساختار نرمال مجانبی است اگر و فقط اگر $\beta < ۲$. پس برای $۰ < \beta < ۲$، X_β دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است.

از طرف دیگر، $X_۲$ دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است، ولی دارای ساختار نرمال مجانبی نیست.

درواقع، برای هر $\beta > ۰$، X_β انعکاسی است و دارای یک پایهٔ ۱ـغیرشرطی است. پس با استفاده از قضیهٔ P.K.Lin، می‌توان نتیجهٔ کلی زیر را بدست آورد:

نتیجهٔ قضیهٔ P.K.Lin. برای هر $\beta > ۰$، X_β دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) است.

۳.۱۰ توصیف S.Reich & I.Shafrir (1983-1990) برای انعکاسی بودن

تعریف ۳.۱۰.۱. می‌گوییم زیرمجموعهٔ K در یک فضای باناخ دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی (AFPP)است، اگر برای هر نگاشت انقباضی $T : K \to K$ داشته باشیم: $\inf\limits_{x\in K}||x - Tx|| = ۰$.

توضیح ۳.۱۰.۲. هر زیرمجموعهٔ محدب وکراندار K در X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی است.

اثبات: چون T انقباضی است پس لیپشیتز است، T را می‌توان به طور یکتا به $\bar{K}$ توسعه داد. پس بدون کاستن از تعمیم، می‌توان فرض کرد K بسته است.

$z \in K$ را ثابت بگیریم و برای $۰ < t < ۱$ قرار دهیم: $T_t x = (۱ - t)z + tTx, \forall x \in K$.

در این صورت $T_t : K \to K$ یک نگاشت اکیداً انقباضی است، پس با استفاده از قضیهٔ نقطهٔ ثابت Banach، T_t دارای یک نقطهٔ ثابت یکتای $x_t \in K$ است. در این صورت داریم:

$$||x_t - Tx_t|| = ||T_t x_t - Tx_t|| = (۱ - t)||z - Tx_t|| \leq (۱ - t)diam\ K \underset{t\to ۱^-}{\longrightarrow} ۰.$$

قضیهٔ ۳.۱۰.۳ (Reich). فرض کنیم X به طور یکنواخت هموار باشد و K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب وکراندار در X و $T : K \to K$ یک نگاشت انقباضی. نقطهٔ $z \in K$ را ثابت اختیارکنیم و فرض کنیم برای $۰ < t < ۱$، x_t نقطهٔ ثابت یکتای نگاشت اکیداً انقباضی $T_t x = (۱ - t)z + tTx$ از K به K باشد. در این صورت وقتی $t \to ۱^-$، x_t به طور قوی به سمت یک نقطهٔ ثابت T همگرا است.

تعریف ۳.۱۰.۴. می‌گوییم زیرمجموعهٔ K در X به طور خطی کراندار است اگر اشتراک K با هر خط در X کراندار باشد.

مثال ۳.۱۰.۵. مجموعه نقاط $x_n = (۰, ۰, \ldots, n, ۰, \ldots)$ برای $n \geq ۱$ در $l^۲$ به طور خطی کراندار است، ولی کراندار نیست.

قضیه ۳.۱۰.۶ ([36] S. Reich) (1983). فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی باشد. دراین

صورت یک زیر مجموعهٔ بسته و محدب Kدر X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی (AFPP) است اگر و فقط اگر K بطور خطی کراندار باشد.

تعریف ۳.۱۰.۷. یک منحنی امتدادی (directional curve) در یک فضای باناخ X عبارت است از یک منحنی (نگاشت پیوسته) $\gamma : [\circ, \infty[\to X$ به طوری که عدد حقیقی $b \geq \circ$ موجود باشد به طوری که:

$$t - s - b \leq ||\gamma(s) - \gamma(t)|| \leq t - s, \forall t \geq s \geq \circ$$

مثال ۳.۱۰.۸. یک شعاع (نیم خط)، یک منحنی امتدادی با $b = \circ$ است.

تعریف ۳.۱۰.۹. می‌گوییم زیرمجموعهٔ محدب K در X به طور امتدادی کراندار است (directionally bounded) اگر K شامل هیچ منحنی امتدادی نباشد. واضح است که اگر K به‌طور امتدادی کراندار باشد، در این صورت K به‌طور خطی کراندار است.

قضیهٔ ۳.۱۰.۱۰ ([37] I. Shafrir)(1990). زیر مجموعهٔ بسته و محدب K در یک فضای باناخ X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی (AFPP) است اگر و فقط اگر K به طور امتدادی کراندار باشد. وبعلاوه: X انعکاسی است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ محدب و به‌طور خطی کراندار در X، به‌طور امتدادی کراندار باشد.

نتیجهٔ ۳.۱۰.۱۱ (توصیف انعکاسی بودن [37] Reich & Shafrir) (1990). فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر هر زیرمجموعهٔ محدب و به‌طور خطی کراندار K در X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی (AFPP) باشد.

اثبات: اول فرض کنیم X انعکاسی باشد و K یک زیرمجموعهٔ محدب و به‌طور خطی کراندار در X. در این صورت با استفاده از قضیهٔ Reich، K دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی است. برعکس فرض کنیم هر زیرمجموعهٔ محدب و به‌طور خطی کراندار K در X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی باشد. در این صورت طبق قسمت اول قضیهٔ Shafrir، Kبه طور امتدادی کراندار است. پس با استفاده از قسمت دوم قضیهٔ Shafrir، X انعکاسی است.

تعریف ۳.۱۰.۱۲. فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ محدب در X باشد. می‌گوییم نگاشت $T : K \to K$ به‌طور امتدادی انقباضی (directionally nonexpansive) است اگر برای هر $x \in K$ و هر m متعلق به پاره‌خط $[x, Tx]$ داشته باشیم: $||Tx - Tm|| \leq ||x - m||$.

توضیح ۳.۱۰.۱۳. هر نگاشت انقباضی، به‌طور امتدادی انقباضی است. از طرف دیگر اگر K بسته و محدب و کراندار باشد و $T : K \to K$ به‌طور امتدادی انقباضی باشد، در این صورت باز هم داریم: $\inf_{x \in K} ||x - Tx|| = \circ$.

مسألهٔ باز ۳.۱۰.۱۴. آیا قضیهٔ Shafrir برای نگاشت‌های به‌طور امتدادی انقباضی صادق است؟ یعنی اگر K به‌طور امتدادی کراندار باشد، آیا K دارای خاصیت نقطهٔ ثابت تقریبی برای نگاشت‌های به‌طور امتدادی انقباضی است؟

۳.۱۱ نرخ همگرایی برای نگاشت‌های میانگینی (1995)(J. B. Baillon & R. E. Bruck)

فرض کنیم K یک زیرمجموعهٔ بسته و محدب و کراندار در فضای باناخ X باشد و $T : K \to K$ یک نگاشت انقباضی. قرار دهیم $f = \frac{I+T}{۲}$. f را یک نگاشت میانگینی (averaged mapping) می‌نامیم. طبق قضیهٔ Ishikawa (Edelstein-O'Brien) (به بخش ۳.۵ رجوع کنید) می‌دانیم که $||f^n(x) - f^{n+۱}(x)|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ۰$ به طور یکنواخت روی K.

قضیهٔ ۳.۱۱.۱ ([7] Baillon & Bruck) (1995). نرخ همگرایی $O(\frac{۱}{\sqrt{n}})$ است. یعنی:

$$||f^n(x) - f^{n+۱}(x)|| = O(\frac{۱}{\sqrt{n}})$$

۳.۱۲ معرفی فضاهای باناخ به طور یکنواخت بدون چین (UNC) توسط (1996) S.Prus

فرض کنیم B_X و S_X به ترتیب نمایانگر گوی واحد بسته و کرهٔ واحد X باشند. برای هر $x^*, y^* \in S_{X^*}$ و $۰ \leq \delta \leq ۱$ قرار دهیم: $S(x^*, \delta) = \{x \in B_X ; x^*(x) \geq ۱ - \delta\}$ و

$$S(x^*, y^*, \delta) = S(x^*, \delta) \cap S(y^*, \delta)$$

تعریف ۳.۱۲.۱. می‌گوییم S_X دارای یک چین (crease) است هرگاه $x^*, y^* \in S_{X^*}$ با $x^* \neq y^*$ موجود باشند به طوری که $diam\ S(x^*, y^*, ۰) > ۰$. این بدان معنی است که کرهٔ واحد S_X، یک پاره‌خط با طول اکیداً مثبت، که در دو ابرصفحهٔ متفاوت که B_X را متحمّل می‌شوند قرار دارد را در بر دارد.

تعریف ۳.۱۲.۲. می‌گوییم X بدون چین است (Noncreasy) است، اگر S_X دارای چین نباشد. واضح است که اگر $\dim X \leq ۲$، X به طور بدیهی بدون چین است. همچنین اگر X اکیداً محدب یا هموار باشد، X بدون چین است.

تعریف ۳.۱۲.۳. می‌گوییم X به طور یکنواخت بدون چین (UNC)(Uniformly Noncreasy) است هرگاه برای هر $\epsilon > ۰$، عدد $\delta > ۰$ موجود باشد به طوری که برای هر $x^*, y^* \in S_{X^*}$ با $||x^* - y^*|| \geq \epsilon$ داشته باشیم: $diam\ S(x^*, y^*, \delta) \leq \epsilon$.

توضیح ۳.۱۲.۴. اگر $\dim X < \infty$، در این صورت X به طور یکنواخت بدون چین است اگر و فقط اگر X بدون چین باشد.

قضیهٔ ۳.۱۲.۵ (S.Prus [35]) (1996)

۱ـ Xبه طور یکنواخت محدب $\Leftarrow$ X به طور یکنواخت بدون چین

۲ـ Xبه طور یکنواخت هموار $\Leftarrow$ X به طور یکنواخت بدون چین

۳ـ Xبه طور یکنواخت بدون چین $\Leftrightarrow$ X^* به طور یکنواخت بدون چین

۴ـ Xبه طور یکنواخت بدون چین $\Leftarrow$ X سوپر انعکاسی

۵ـ Xبه طور یکنواخت بدون چین $\Leftarrow$ X دارای خاصیت نقطهٔ ثابت است.

۳.۱۳ قضیهٔ Dowling-Lennard-Turett (1997)

قبلاً (رجوع کنید به بخش ۳.۷ قسمت اول) دیدیم که Maurey ثابت کرده بود که زیرفضاهای انعکاسی فضای L^1 دارای خاصیت نقطهٔ ثابت هستند. Dowling-Lennard-Turett [23-24](1997) ثابت کردند که زیرفضاهای غیرانعکاسی فضای L^1 دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) نیستند. پس قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۳.۱۳.۱. یک زیرفضای برداری فضای L^1 انعکاسی است اگر و فقط اگر دارای خاصیت نقطهٔ ثابت (FPP) باشد.

مراجع

[1] A. G. Aksoy and M. A. Khamsi, Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, Berlin, (1990).

[2] D. E. Alspach, A fixed point free nonexpansive map, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 423-424.

[3] N. Aronszajn and P.Panitchpakdi, Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, Pacific J. Math. 6(1956), 405-439.

[4] J. P. Aubin and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis, Wiley-Interscience, New York, (1984).

[5] J. B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 280 (1975), 1511-1514.

[6] J. B. Baillon, Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces, in Fixed Point Theory and its applications (R. F. Brown, ed.), Contemporary Math. Vol 72, Amer. Math. Soc., Providence, (1988), pp. 11-19.

[7] J. B. Baillon and R. E. Bruck, The rate of asymptotic regularity is $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, in Theory and Applications of Nonlinear operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos, ed.), Dekker, New York, (1996), pp.51-81.

[8] J. B. Baillon and R. Schönberg, Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 257-264.

[9] J. Borwein, S. Reich and I. Shafrir, Krasnoselski-Mann iterations in normed spaces, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 21-28.

[10] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications Masson, Paris, 1983.

(ترجمهٔ این کتاب به فارسی توسط مؤلف مقاله در دو جلد توسط انتشارات علمی دانشگاه آزاد اسلامی منتشر شده است.)

[11] F. E. Browder, Nonlinear operators and Nonlinear Equations of Evolution, Proc. Symp. Pure Math. vol 18, Amer. Math. Soc., Providence, (1976).

[12] R. E. Bruck, Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 179(1973), 251-262.

[13] R. E. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math. 32 (1979), 107-116.

[14] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1985.

[15] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behaviour of quasi-autonomous dissipative systems in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 147 (1990), 465-476.

[16] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behaviour of almost nonexpansive sequences in a Hilbert space, J. Math. Anal. Appl. 151 (1990), 226-235.

[17] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behaviour of unbounded nonexpansive sequences in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 951-956.

[18] B. Djafari Rouhani, Asymptotic behaviour of firmly nonexpansive sequences, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 771-777.

[19] B. Djafari Rouhani, On the fixed point property for nonexpansive mappings and semigroups, Nonlinear Anal. 30 (1997), 389-396.

[20] B. Djafari Rouhani, Ergodic theorems for nonexpansive curves defined on general semigroups in a Hilbert space, Nonlinear Anal. 44(2001), 627-643.

[21] B. Djafari Rouhani and W. A. Kirk, Asymptotic properties of Nonexpansive iterations in Reflexive spaces, J. Math. Anal. Appl. 236 (1999), 281-289.

[22] B. Djafari Rouhani, E. Tarafdar and P. J. Watson, Fixed point theorems, Coincidence theorems, and Variational Inequalities, Proc. 6th International Symp. Generalized Convexity / Monotonicity, Samos, Greece (1999); in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 502, Springer-Verlag, New York, Berlin, (2001), pp. 183-188.

[23] P. N. Dowling and C. J. Lennard, Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 443-446.

[24] P. N. Dowling, C. J. Lennard, and B. Turett, Reflexivity and the fixed point property for nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 200 (1996), 653-662.

[25] M. Edelstein and R. C. O'Brien, Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations, J. London Math. Soc. 17 (1978), 547-554.

[26] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1990).

[27] K. Goebel and S. Reich, Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings, Dekker, New York, (1984).

[28] S. Ishikawa, Fixed points and interation of a nonexpansive mapping in a Banach space, Proc. Amer. Math. Soc. 59(1976), 65-71.

[29] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly 72(1965), 1004-1006.

[30] W. A. Kirk, Krasnoselskii's interation process in hyperbolic space, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 4 (1981/82), 371-381.

[31] W. A. Kirk, An introduction to Metric spaces and Fixed Point Theory, (A book to appear).

[32] P. K. Lin, Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings, Pacific J. Math. 116 (1985), 69-76.

[33] B. Maurey, Points fixes des contractions sur un convexe fermé de L_1, in Séminaire d' Analyse Fonctionnelle, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1980-1981).

[34] J. Milnor, Analytic proof of the 'Hairy Ball Theorem' and the Brouwer Fixed Point Theorem, Amer. Math. Monthly 85 (1978), 521-524.

[35] S. Prus, Banach spaces which are uniformly noncreasy, Nonlinear Anal. 30 (1997), 2317-2324.

[36] S. Reich, The almost fixed point property for nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 44-46.

[37] I. Shafrir, The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces, Israel J. Math. 71 (1990), 211-223.

[38] R. Sine, On nonlinear contractions in sup norm spaces, Nonlinear Anal. 3 (1979), 885-890.

[39] P. Soardi, Existence of fixed points of nonexpansive mappings in certain Banach lattices, Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), 25-29.

[40] E. Tarafdar, A fixed point theorem equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem, J. Math. Anal. Appl. 128 (1987), 475-479.

[41] B. Turett, A dual view of a theorem of Baillon, Nonlinear Analysis and Applications(S. P. Singh and J. H. Burry, eds.), Lec. Notes in Pure and Appl. Math., Vol 80, Dekker, New York, (1982), pp. 279-286.

[42] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, 5 Vols., Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, (1986-1988).

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۴۵ تا ۵۱

ناوردایی عدد پایه و خواص وابسته

احمد حقانی

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

پست الکترونیک: aghagh@cc.iut.ac.ir

چکیده

در این سخنرانی شرایط متنوعی از قبیل ناوردایی عدد پایه، تناهی پایدار و شرط رتبه در مورد حلقه‌ها ارائه می‌شود. در مقدمه، نتایج قدیمی در باب این موضوعات بیان و سپس برخی از نتایج تازه بدست آمده خود و K. Varadarajan را در مورد ناوردایی عدد پایه و تناهی پایدار یک حاصلضرب حلقه‌ها ارائه خواهیم نمود.

انگیزه اصلی در بررسی مفهوم عدد پایه و ناوردایی آن از واقعیات مقدماتی نظریه فضاهای برداری ناشی می‌شود. اگر V یک فضای برداری بر میدان F باشد، آنگاه

الف- V دارای پایه‌ای چون B است لذا $V = \sum_{b\in B} \oplus Fb$.

ب- اگر B' پایه دیگری از V باشد آنگاه B و B' دارای عدد اصلی یکسان هستند.

نظریه مادیول‌ها تعمیم‌های طبیعی مفاهیم فضای برداری و گروههای آبلی را در بر دارد. در این نظریه یک حلقه انجمنی (ناصفر و عموماً دارای عضو واحد) بجای F بکار برده می‌شود و مادیول آزاد بر روی R که در واقع یک حاصل‌جمع مستقیم از کپی‌های R است بجای V مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این وضعیت شرط الف برای مادیول آزاد $R^{\Delta} := \sum \oplus R_\lambda$ که $R_\lambda = R$ برای هر $\lambda \in \Delta$ ، تعمیم می‌یابد. این مادیول دارای پایه است. اما شرط ب در حالت کلی برای مادیول‌های آزاد برقرار نمی‌ماند. یکی از اولین مثال‌ها در مورد عدم وجود شرط ب برای یک مادیول آزاد توسط P.M. Cohn در [1] ارائه شده است. وی یک

فضای برداری چپ V بر میدان F را که دارای بعد نامتناهی است در نظر گرفته، که البته یکریختی

$$V \oplus V \simeq V$$

به عنوان فضاهای برداری برای آن برقرار است. سپس R را حلقه F درونریختی‌های V فرض کرده و ملاحظه نمود

$$R = \mathrm{End}V \simeq \mathrm{Hom}(V \oplus V, V) \simeq \mathrm{Hom}(V, V) \oplus \mathrm{Hom}(V, V).$$

یکریختی‌های فوق جملگی به عنوان مادیول‌های راست بر R که ساختار خود را از V به عنوان مادیول راست بر R اخذ کرده‌اند برقرار می‌باشد:

$$\forall v \in V, f \in R, v.f = (v)f.$$

لذا به عنوان مادیول‌های راست بر R یکریختی $R \oplus R \simeq R$ وجود دارد و این به معنای وجود یک پایه تک عضوی و نیز یک پایه دو عضوی برای R است.

تعریف. گوییم حلقه R دارای خاصیت راست ناوردایی عدد پایه است هرگاه استلزام زیر برای راست R مادیول‌های آزاد R^n و R^m برقرار باشد:

$$R^n \simeq R^m \Rightarrow m = n.$$

قضیه‌ای در این قسمت وجود دارد مبنی بر اینکه اگر M یک راست R مادیول آزاد با پایه‌ای نامتناهی باشد آنگاه هر پایهٔ دیگر M نیز لزوماً نامتناهی است و هر دو پایهٔ M دارای کاردینالیتی یکسانند. بنابراین در تعریف فوق خود را محدود به مادیول‌های آزاد نظیر R^n نموده‌ایم.

یکریختی $R^n \simeq R^m$ به منزله وجود همریختی‌های $f : R^n \to R^m$ و $g : R^m \to R^n$ است که در روابط $fg = ۱_{R^m}$ و $gf = ۱_{R^n}$ صدق می‌کنند. با انتخاب پایه‌های استاندارد برای R^n و R^m و در نظر گرفتن ماتریس‌های $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ وابسته به f و g ملاحظه می‌کنیم که شرط زیر موسوم به $\alpha_{m,n}$ برقرار است.

$\alpha_{m,n}$: ماتریسهای $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ با درایه‌ها در R وجود دارند که $AB = I_m$ و $BA = I_n$.

اکنون واضح است که R در شرط راست ناوردایی عدد پایه صدق می‌کند اگر و تنها اگر برقراری $\alpha_{m,n}$ نتیجه دهد $m = n$. اما نتیجه فوری مطلب فوق آن است که ناوردایی عدد پایه مستقل از آن است که مادیول‌های راست و یا مادیول‌های چپ در نظر گرفته شوند، به عبارت دیگر راست ناوردایی عدد پایه معادل است با چپ ناوردایی عدد پایه.

نتیجه فوری دیگر شرایط ماتریسی مندرج در $a_{m,n}$ آن است که هرگاه $\psi : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ها با شرط $\psi(۱) = ۱$ و S حلقه‌ای دارای ناوردایی عدد پایه باشد آنگاه R نیز چنین است. بنابراین

همهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر، همهٔ حلقه‌های متناهی و به طور کلی حلقه‌های آرتینی راست یا چپ، جملگی در شرط ناوردایی عدد پایه صدق می‌کنند. البته حلقه‌های نوتری راست یا چپ نیز چنین‌اند، گرچه اثبات این مطلب به روش‌های دیگر ممکن است.

اینک این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان شرطی معادل با برقراری ناوردایی عدد پایه بیان کرد؟ در اولین کوششها در این زمینه به مفهوم اثر (trace)، برخورد می‌کنیم. برای حلقه R زیرگروه تولید شده توسط کلیه اعضاء $xy - yx$ (که x و y در Rاند) با نماد C و گروه فاکتور $\frac{R}{C}$ را با نماد $T(R)$ نشان می‌دهیم. در این صورت نگاشت طبیعی $R \to T(R)$ با tr نشان داده می‌شود و اثر نامیده می‌شود. اگر $\psi : R \to S$ همریختی حلقه‌ها باشد، آنگاه همریختی گروههای آبلی $T(\psi) : T(R) \to T(S)$ بدست می‌آید. در واقع T یک فانکتور از کاتگوری حلقه‌ها به کاتگوری گروههای آبلی است. مهمترین خاصیت نگاشت اثر این است که هرگاه $A_{m\times n}$ و $B_{m\times n}$ ماتریس‌هایی بر R باشند، آنگاه $tr(AB) = tr(BA)$. همچنین $T(R)$ و $T(R_n)$ به طور طبیعی یکریخت‌اند. حال اگر حلقهٔ R در شرط $a_{m,n}$ صدق کند عضو $tr(1)$ درگروه جمعی $T(R)$ دارای مرتبه‌ای است که عدد $n - m$ را می‌شمارد و لذا نتیجه زیر حاصل می‌شود:

اگر برای حلقهٔ R مرتبه عضو $tr(1)$ نامتناهی باشد آنگاه R دارای شرط ناوردایی عدد پایه است. در [1] ناوردای دیگری از حلقه‌ها موسوم به عدد وابستگی تعریف و مطالعه شده است. عدم وجود ناوردایی عدد پایه را می‌توان برحسب نگاشت اثر و عدد وابستگی مطالعه نمود. در اینجا شایسته است به تقدم Leavitt در این مبحث و نیز برخی از نتایجی که وی بدست آورده است اشاره شود. در [4] مادیول آزادی که دارای یک پایهٔ n عضوی است و هر پایه دیگر آن نیز لزوماً nعضوی است مادیول با بعد n یا مادیول بعددار نامیده شده است. در نوشتجات اخیر از واژه rank یا رتبه به‌جای بعد استفاده می‌شود. به هر حال قضیه زیر در [4] به اثبات رسیده است.

قضیه. اگر حلقهٔ R واجد شرط ناوردایی عدد پایه نباشد آنگاه اعداد مثبت منحصر بفرد k, n وجود دارند بقسمی که:
اولاً هر R مادیولی که دارای پایه‌ای با کمتر از n عضو باشد بعددار است،
ثانیاً برای هر R مادیول M که پایه‌ای با حداقل n عضو داشته باشد عدد صحیح h که $n \leq h < n + k$ وجود دارد به‌قسمی که M دارای پایه‌ای r عضوی است اگر و تنها اگر $r = h + mk$ به ازای عدد نامنفی و مناسب m. علاوه بر اینها چنین R مادیولی به ازای هر h دلخواه وجود دارد.

با استفاده از قضیه فوق مفهوم نوع (type) برای حلقه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

تایپ برای هر حلقه‌ای که دارای شرط ناوردایی عدد پایه است برابر dتعریف می‌شود.

برای حلقه‌ای که واجد شرط ناوردایی عدد پایه نمی‌باشد تایپ زوج (n, k) است مشروط بر آنکه n و kدر شرایط قضیه فوق صدق نمایند. بالاخره برای حلقه تک عضوی صفر نیز تایپ برابر ۰ تعریف می‌شود.

می‌توان تایپ‌ها را به صورت ذیل و به طور جزئی مرتب کرد.

۱. $0 < (n,k) < d$ برای تمام زوج‌های (n,k).
۲. $(n',k') < (n,k)$ اگر و تنها اگر $k'|k$ و $n' \leq n$.

در این صورت تحت اعمال زیر یک شبکهٔ توزیعی به دست می‌آید.

$$(n,k) \cap (n',k') = (\min(n,n'), g.c.d.(k,k'))$$
$$(n,k) \cup (n',k') = (\max(n,n'), l.c.m.(k,k')).$$

در اینجا طبق معمول $g.c.d$ و $l.c.m$ به ترتیب بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک را نمایش می‌دهند. مهمترین مطلب که از ملاحظات فوق حاصل می‌شود آن است که به ازای هر دو عدد طبیعی و دلخواه n و k حلقه‌ای با تایپ (n,k) وجود دارد. علاوه بر آن، حلقه‌های اول با تایپ دلخواه وجود دارند. سؤالات طبیعی دیگری نیز پاسخ داده شده‌اند، از آن جمله:
اگر R_1 و R_2 حلقه‌هایی با تایپ a_1 و a_2 باشند آنگاه $R_1 \oplus R_2$ از تایپ $a_1 \cup a_2$ است. در حالی که $R_1 \otimes R_2$ تایپی کوچک‌تر یا مساوی $a_1 \cap a_2$ دارد.

به این پرسش که چه وقت حاصل‌ضرب مستقیمی از یک خانواده نامتناهی حلقه‌ها دارای ناوردایی عدد پایه است در مکتوبات ریاضی برخورد نشد. لذا در مقاله مشترکی که با K. Varadarajan [2] تهیه شد مطلب فوق را بررسی و ثابت کرده‌ایم که خانواده‌ای از حلقه‌ها وجود دارد که حاصل‌ضرب مستقیم آنها دارای ناوردایی عدد پایه است در حالی‌که هیچکدام از عوامل ضرب دارای این ویژگی نیست. چنین پدیده‌ای در مورد خانواده‌های متناهی رخ نمی‌دهد. در واقع بر طبق قسمت اول از قضیه ۲.۱ در [2] حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه در شرط ناوردایی عدد پایه صدق نمی‌کند اگر و تنها اگر هر کدام از حلقه‌ها در آن شرط صدق نکند.

اینک به اختصار حلقه‌هایی که در [1] ساخته شده‌اند را جهت ارائه مثال مورد نظر خود توضیح می‌دهیم. به ازای هر زوج عدد طبیعی n, m که $m \leq n$، ماتریس‌های $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ را که به ترتیب $m \times n$ و $n \times m$ هستند و درایه‌های آنها متغیرهایی می‌باشند در نظر گرفته و برای هر حلقه تعویض‌پذیر مفروض Kـجبر تولید شده بر K توسط $2mn$ نماد a_{ij} و b_{ji} که در روابط حاصل از $AB = I_m$ و $BA = I_n$ صدق می‌کند را با نماد $V_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. این Kـجبر در شرط $\propto_{m,n}$ صدق می‌کند و برای Kـجبرهایی که در $\propto_{m,n}$ صدق کنند خاصیت جهانی (universal) دارد. به همین ترتیب $U_{m,n}$ جبر تولیدشده بر K با همان مولدها است که تنها در روابط حاصل از $BA = I_n$ صدق می‌کند. لذا $U_{m,n}$ نیز برای Kـجبرهایی که در شرط

$$\sum b_{hu} a_{uj} = \delta_{hj} \quad h, j = 1, \dots, n \quad : \beta_{n,m}$$

صدق کند خاصیت جهانی دارد. در [2] ثابت کرده‌ایم که حلقهٔ $\prod_{m>1} V_{m,m+1}$ دارای شرط ناوردایی عدد پایه است در حالی‌که هیچکدام از حلقه‌های $V_{m,m+1}$ چنین نیست.

اینک دو رهیافت فراروی علاقه‌مندان به این مبحث قرار می‌گیرد.

۱. یافتن کلاس‌های دیگری از حلقه‌ها که واجد، شرط ناوردایی عدد پایه است.
۲. یافتن شرایطی که ویژگی ناوردایی عدد پایه را برای حلقه تضمین نمایند.

رهیافت اول

در رهیافت نخست Cohn ثابت کرده است که کلاس حلقه‌هایی که دارای ناوردایی عدد پایه هستند تحت حد مستقیم یا معکوس بسته است. انتقال ویژگی ناوردایی عدد پایه از یک حلقه مفروض R به حلقه سری توانی صوری $R[[X]]$ و برعکس توسط Small به اثبات رسیده است. همچنین نظیر مطلب فوق برای حلقه ماتریس‌ها بر R و یا حلقه کثیرالجمله‌ها بر R برقرار است یعنی یکی از این حلقه‌ها دارای شرط ناوردایی عدد پایه است اگر و تنها اگر هر کدام از دو حلقهٔ دیگر واجد این شرط باشد. بررسی انتقال ناوردایی عدد پایه از R به حلقه ماتریس‌های مربع R_n این تصور (غلط) را ایجاد نمود که گویا این مطلب در حالت عام‌تر که دو حلقهٔ R و S به طور موریتا هم‌ارزند نیز همچنان برقرار می‌ماند. اما Bergman با ارائه مثال نسبتاً پیچیده‌ای [3;p.502] نشان داده است که چنین نیست، یعنی حلقه‌های R و S وجود دارند که به طور موریتا هم‌ارزند، R و نه S دارای شرط ناوردایی عدد پایه است. یادآور شویم که اگر R و S حلقه‌هایی باشند که کاتگوری‌های مادیولی Mod-R و Mod-S هم‌ارز باشند آنگاه R هم‌ارز موریتایی S نامیده می‌شود. به عبارت دیگر هرگاه فانکتورهای

$$\alpha : \mathrm{Mod} - R \to \mathrm{Mod} - S; \qquad \beta : \mathrm{Mod} - S \to \mathrm{Mod} - R$$

که در روابط $\alpha\beta \approx 1_{\mathrm{Mod}-R}$ و $\beta\alpha \approx 1_{\mathrm{Mod}-S}$ صدق کنند وجود داشته باشند گفته می‌شود R و S هم‌ارز موریتایی‌اند. ساده‌ترین مثال این وضعیت موریتا هم‌ارز بودن R است با حلقه ماتریس‌ها R_n.

رهیافت دوم

می‌دانیم اگر V یک فضای برداری متناهی‌البعد باشد آنگاه V و بعد آن n در شرایط زیر صدق می‌کنند.

۱. V را نمی‌توان با کمتر از nعضو به‌عنوان فضای برداری تولید کرد.
۲. هر مجموعه مولد V که دقیقاً n عضو داشته باشد لزوماً پایه است.

ویژگی‌های فوق در مورد مادیول‌های آزاد R^n و R^m به صورت زیر در می‌آیند.

'۱. اگر $R^m \simeq R^n \oplus K$ آنگاه $m \geq n$ $\quad (K \in \mathrm{Mod} - R)$.
'۲. اگر $R^n \simeq R^n \oplus K$ آنگاه $K = 0$.

و یا با بکاربردن ماتریس‌ها:

''۱. وجود دارد ماتریس‌های $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ بر R که $AB = I$.
''۲. وجود دارد ماتریس‌های $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ با درایه‌ها در R که $AB = I$ و $BA \neq I$.

توجه کنید اگر R^n یک مجموعه مولد mعضوی داشته باشد آنگاه یک برونریختی مادیولی از R^m به R^n وجود دارد که شکافته می‌شود و لذا $R^m \simeq R^n \oplus K$. چنانچه به ازای تمام m و nها شرط ۱′ برقرار باشد گوییم R در شرط رتبه صدق می‌کند. در صورتی که ۲′ به ازای تمام m و n برای R صادق باشد گفته می‌شود که R به طور پایدار متناهی است و این دقیقاً به معنای آن است که در هر حلقه ماتریس‌های مربع با درایه‌ها در R شرط $AB = I$ ایجاب می‌کند $BA = I$.

به سادگی ثابت می‌شود اگر R به طور پایدار متناهی باشد آنگاه R واجد ناوردایی عدد پایه است اما عکس این مطلب معتبر نیست. در [2] ثابت کرده‌ایم که به طور پایدار متناهی بودن یک ناوردای موریتایی است. اما موضوع جالب در مورد این مفهوم آن است که به ازای هر حلقه R می‌توان حلقه‌ای چون $\bar{R}$ که به طور پایدار متناهی است ساخت با این ویژگی که $\bar{R}$ یک حلقهٔ فاکتور R است و به ازای هر همریختی حلقه‌ای $\psi : R \to S$ که S بطور پایدار متناهی است وجود دارد همریختی یگانه‌ای چون $\bar{\psi} : \bar{R} \to S$ به طوری که $\bar{\psi}\pi = \psi$. این حلقه در [5] معرفی و مطالعه شده است و برای ساختن آن کافی است Δ را ایده‌آل تولید شده در R توسط تمام درایه‌های ماتریس‌هایی چون $I - YX$ بگیریم که در آن X و Y ماتریس‌های مربع، به هر اندازه دلخواه بر Rاند و در شرط $XY = I$ صدق می‌کنند. در این صورت $\bar{R} = \frac{R}{\Delta}$ تعریف می‌شود که در شرط زیر صدق می‌کند.

• $\bar{R} \neq \circ$ اگر و تنها اگر R دارای شرط رتبه (راست) باشد.

با در نظرگرفتن حلقه‌های $U_{m,m+1}$ که قبلاً معرفی کرده‌ایم در [2] ثابت کردیم حلقهٔ

$$S = \prod_{m>1} U_{m,m+1}$$

واجد شرط رتبه است در حالی که هیچکدام از $U_{m,m+1}$ها در شرط رتبه صدق نمی‌کند. اثبات با استفاده از این موضوع امکان‌پذیر شد:

$$\circ \neq \bar{S} \simeq \prod_{m>1} \bar{U}_{m,m+1} = \circ.$$

در پایان به یک ویژگی جالب دیگر موسوم به شرط رتبه راست قوی برای حلقهٔ R اشاره می‌شود. گوییم شرط رتبه راست قوی در R برقرار است هرگاه هر تکریختی مادیولی از راست مادیول آزاد R^n به راست مادیول آزاد R^m ایجاب نماید $n \leq m$. این شرط با شرط رتبهٔ چپ قوی که در مورد مادیول‌های چپ تعریف می‌شود معادل نیست. با این وجود شرط رتبهٔ راست قوی هم‌ارز است با این که هر دستگاه از m معادلهٔ خطی بر حسب n مجهول با $m > n$ و ضرایب در Rدارای جواب نابدیهی است. لذا بررسی شرایط رتبهٔ راست قوی و رتبهٔ راست اطلاعات مفیدی دربارهٔ ناوردایی عدد پایه به دست می‌دهند، گرچه هیچکدام از آنها با ناوردایی عدد پایه معادل نمی‌باشد. تفصیل این مطالب در کتاب Lam [3] موجود است. در [2] ثابت کرده‌ایم که اگر حلقه‌های R و S به طور موریتا هم‌ارز باشند و R به طور پایدار متناهی باشد آنگاه S چنین است. در اینجا از علاقه‌مندان دعوت می‌شود که در مورد ناورداموریتابودن شرایط رتبه راست قوی و رتبه راست مطالعه و تحقیق نمایند.

مراجع

[1] P.M. Cohn, Some remarks on the invariant basis property, Topology, 5 (1966), 215-228.

[2] A. Haghany and K. Varadarajan, IBN and related properties for rings, to appear in Acta. Math.Hung.

[3] T.Y.Lam, Lectures on rings and modules, Springer-Verlag, (1998).

[4] W.G.Leavitt, The module type of a ring, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 103(1962), pp.113-130.

[5] P. Malcolmson, On making rings weakly finite, Proc. Amer. Math. Soc. 80. (1980), 215-218.

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران
جلد اول (۱۳۸۱)، صص. ۵۳ تا ۵۷

رابطه دنیای ماکروسکوپی با دنیای میکروسکوپی

فریدون رضاخانلو
گروه ریاضی، دانشگاه کالیفرنیا، برکلی
پست الکترونیک: rezakhan@math.berkeley.edu

چکیده

برای خیلی از فرایندهای تصادفی، سه قضیه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند: قضیه قانون اعداد بزرگ، قضیه حد مرکزی و قضیه مربوط به تغییرات بزرگ. در این سخنرانی، یک مدل ساده به عنوان توصیف میکروسکوپی یک سیال ارائه می‌دهیم و توضیح می‌دهیم چگونه این سه قضیه مهم به درک ماکروسکوپی این مدل کمک می‌کنند.
کلمات کلیدی: احتمال، فرایند تصادفی، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

سه قضیهٔ اساسی در نظریهٔ احتمالات عبارت‌اند از قانون اعداد بزرگ، قضیهٔ حد مرکزی و اصل تغییرات بزرگ. یک قدم تصادفی ساده‌ترین مدل در نظریهٔ احتمالات می‌باشد. من این مدل را توصیف می‌کنم و سه قضیهٔ اساسی گفته شده را برای این مدل بیان می‌کنم.

تصور کنید که می‌خواهیم یک مدل سادهٔ تصادفی را برای یک ذره در یک سیال با فیزیک ساده ارائه دهیم. در مقیاس میکروسکپی مکان این ذره با یک قدم تصادفی تقریب زده شده است. به عبارت دیگر یک دنبالهٔ تصادفی $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ را در نظر بگیرید، چنانکه هر Z_n مقدارش در فضای اقلیدس $\mathbb{R}^d$ است و

$$P(Z_1 \in A_1, Z_2 \in A_2, \dots, Z_n \in A_n) = \mu(A_1)\mu(A_2)\cdots\mu(A_n). \qquad (1)$$

در فرمول (۱)، عبارت دست چپ احتمال اینکه Z_1 در مجموعهٔ A_1 باشد، Z_2 در مجموعهٔ A_2 باشد و $\cdots$ و Z_n در مجموعهٔ A_n باشد را حساب می‌کند. در فرمول (۱)، μ یک اندازه برای مجموعه‌های اندازه‌پذیر $\mathbb{R}^d$ می‌باشد و $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. حال تعریف کنید

$$X^{(n)}(t) = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k) \quad , \quad k = [nt]. \tag{۲}$$

متغیر تصادفی $X^{(n)}(t)$ یک تقریب از مکان ماکروسکوپی ذره در زمان t می‌باشد. این تعبیر فرمول (۲) می‌باشد: فاصلهٔ $[0, t]$ به فاصله‌های کوچک‌تر تقسیم شده است چنانکه

$$t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{n},\ t_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ t_k = \frac{k}{n},\ t_{k+1} = t\ .$$

در تقریب میکروسکوپی nام، ذره از مکان $X^{(n)}(t_j)$ به مکان $X^{(n)}(t_{j+1})$ انتقال یافته است. در طول زمان کوتاه $t_{j+1} - t_j = \frac{1}{n}$، مسافت کوتاه طی شده برابر است با $\frac{1}{n}Z_{j+1}$. این حرکت به طور تصادفی و بدون توجه به گذشته رخ داده است. به این خاطر، متغیرهای $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ به طور آماری مستقل می‌باشند.

قانون اعداد بزرگ می‌گوید که با احتمال یک،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = \int_{\mathbb{R}^d} X\mu(dX) =: m. \tag{۳}$$

با استفاده از این می‌توان گفت که $\lim_{n\to\infty} X^{(n)}(t) = mt$. حال به تعبیر فیزیکی این قانون می‌پردازم. متغیر $X^{(n)}(t)$ تصادفی است و به عنوان یک تابع زمان دارای نوسانات بی‌شماری می‌باشد. در هر حال، وقتی n بزرگ باشد اندازهٔ این نوسانات خیلی کوچک می‌باشد و توصیف ماکروسکوپی ذره $X(t)$ خیلی ساده می‌باشد. داریم $X(t) = mt$. به عبارت دیگر، در مقیاس ماکروسکوپی، ذره با سرعت ثابت m در حال حرکت می‌باشد.

توجه کنید که $X(t) = mt$ ساده‌ترین توصیف از حرکت ذره می‌باشد و هیچ اطلاعی در مورد طبیعت نوسانات گفته شده نمی‌دهد. دو قضیهٔ اساسی دیگر اطلاعات مفیدی در مورد طبیعت این نوسانات در اختیار ما می‌گذارد. به طور شهودی داریم

$$X^{(n)}(t) = mt + \frac{1}{\sqrt{n}}\beta(t) + o(\frac{1}{\sqrt{n}}) \tag{۴}$$

در اینجا mt یک حرکت سادهٔ غیر تصادفی می‌باشد ولی $\beta(t)$ یک فرایند تصادفی می‌باشد و به آن حرکت براونی گفته می‌شود. برای مثال، (۴) نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}(X^{(n)}(t) - mt) \in A) = \int_A \alpha(t, x)dx \tag{۵}$$

چنانکه تابع α دارای فرمول زیر می‌باشد:

$$\alpha(t,x) = \hat{\alpha}(\frac{x}{\sqrt{t}}) \ ,$$
$$\hat{\alpha}(z) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}\Gamma X.X) \ .$$

در اینجا Γ یک ماتریس است و اگر $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$، $m = (m_1, \dots, m_d)$، آنگاه

$$\Gamma^{-1} = \left[\int (X_i - m_i)(X_j - m_j)\mu(dx)\right]$$

وارون ماتریس Γ است و $\sigma = \det \Gamma$. چون که متغیرهای

$$X^{(n)}(t_1),\ X^{(n)}(t_2) - X^{(n)}(t_1), \dots, X^{(n)}(t_l) - X^{(n)}(t_{l-1})$$

تقریباً مستقل هستند وقتی‌که $t_1 < t_2 < \dots < t_l$، نتیجه می‌گیریم که متغیرهای

$$\beta(t_1), \beta(t_2) - \beta(t_1), \dots, \beta(t_l) - \beta(t_{(l-1)})$$

هم مستقل هستند. فرمول (۴) یا (۵) نوسانات کوچک را توصیف می‌کند چراکه $\frac{1}{\sqrt{n}}\beta(t)$ کوچک می‌باشد. اگر بخواهیم تغییرات یا نوسانات بزرگ را بررسی کنیم باید $\frac{1}{\sqrt{n}}\beta(t)$ را با تابعی که به صفر میل نمی‌کند جایگزین کنیم. برای داشتن قضیهٔ مطلوبی در این مورد فرض کنید که برای هر بردار λ،

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\lambda.x}\mu(dx) < \infty \ .$$

قضیهٔ کرامر[1] برای تغییرات بزرگ یک قدم تصادفی ادعا می‌کند که به طور تقریب

$$P\left(\frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n) \in A\right) \approx \exp\left(-n \inf_{z\in A} I(z)\right) \qquad (6)$$

در اینجا تابع I مزدوج محدب تابع φمی‌باشد و $\varphi(\lambda) = \log \int e^{\lambda.x}\mu(dx)$. به عبارت دیگر،

$$I(z) = \sup_z (z.\lambda - \varphi(\lambda)) \ .$$

معنی (۶) عبارت است از

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n) \in A\right) \leqslant -\inf_{z\in A} I(z)$$

اگر مجموعهٔ A یک مجموعهٔ بسته باشد و

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\frac{1}{n}(Z_1 + \dots + Z_n) \in A\right) \geqslant -\inf_{z\in A} I(Z)$$

1) Cramer

اگر A یک مجموعهٔ باز باشد و اگر بخواهیم واقعاً (۶) را درک کنیم، باید دو حالت را در نظر بگیریم. در حالت اول فرض می‌کنیم که $m \in A$. در این حالت (۶) هیچ اطلاع مفیدی نمی‌دهد. این به این خاطر است که اگر $m \in A$، آنگاه قضیهٔ اعداد بزرگ (۳) نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) \in A\right) = 1 \qquad (7)$$

در اصل تابع I یک تابع محدب می‌باشد که همیشه غیرمنفی است و $I(m)$ صفر می‌باشد. در نتیجه $\inf_{z\in A} I(z)$ برابر با صفر است اگر $m \in A$. توجه کنید که در این حالت $\exp(-n \inf_{z\in A} I(z))$ برابر با یک است. در نتیجه، اگر $m \in A$ آنگاه ادعای (۶) همان قانون اعداد بزرگ (۷) می‌باشد.

در حالت دوم فرض می‌کنیم که $m \notin A$. اگر مثلاً A یک مجموعهٔ بسته باشد، چون I فقط در نقطه m صفر می‌باشد، داریم

$$\inf_{z\in A} I(z) > 0$$

در این حالت ادعای (۶) به ما می‌گوید که احتمال حضور میانگین قدم تصادفی در مجموعهٔ A به طور توانی کوچک می‌باشد. این احتمال به طور توانی به صفر میل می‌کند وقتی n به بینهایت فرستاده می‌شود. اگر بخواهیم به طور شهودی (۶) را توصیف کنیم، شاید بهتر باشد که بگوییم:

$$\text{«احتمال اینکه } \frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) \text{ نزدیک به } Z \text{ باشد»} \approx e^{-nI(Z)} \qquad (8)$$

به عبارت دیگر، اغلب اوقات $\frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ نزدیک به m است و اگر گاهی اوقات نزدیک به $Z \neq m$ باشد آنگاه این حادثه با احتمال کوچک $e^{-nI(Z)}$ رخ می‌دهد. به این خاطر است که به (۶) قانون تغییرات بزرگ می‌گوییم.

قضیهٔ حد مرکزی می‌گوید که

$$\text{«احتمال اینکه } \frac{1}{n}(Z_1 + \cdots + Z_n) \text{ نزدیک به } m + \frac{1}{\sqrt{n}}\beta \text{ باشد»} \approx c\, e^{-\frac{1}{2}\Gamma\beta.\beta} \qquad (9)$$

وقتی c ثابتی است که در تعریف $\hat{\alpha}$ ظاهر شد. آیا این دو ادعا، (۸) و (۹) با هم سازگار هستند؟ در اصل اگر Z را برابر با $m + \frac{1}{\sqrt{n}}\beta$ در (۸) انتخاب کنیم آنگاه داریم

$$I(Z) = I(m + \frac{1}{\sqrt{n}}\beta) = I(m) + \frac{1}{\sqrt{n}}\nabla I(m).\beta + \frac{1}{2n}D^2 I(m)\beta.\beta + o(\frac{1}{n}) \ .$$

در اینجا بسط تیلور تابع I را در حوالی نقطه m نوشته‌ایم. چون m کوچکترین مقدار I را به دست می‌دهد، داریم

$$I(m) = 0, \ \nabla I(m) = 0 \ .$$

در نتیجه داریم

$$-nI(Z) = \frac{1}{2}D^2 I(m)\beta.\beta + o(1) \ .$$

حال می‌توان حدس زد که چه رابطه‌ای بین Γ و I وجود دارد. در اصل داریم

$$D^{2} I(m) = \Gamma \ .$$

مراجع

[۱] کتاب زیر مرجع خوبی برای ربط قدم‌های تصادفی به حرکت براونی می‌باشد:

L. Breiman, Probability, Addison-Wesley, (1968).

[۲] در مورد اصل تغییرات بزرگ به کتاب زیر مراجعه کنید:

J.D. Deuschel and D. Stroock, Large Devintions, Academic Press, (1989).

[۳] در مدل‌های پیچیده‌تر برای سیالات، به جای یک ذره، تعداد بیشماری ذره داریم که با هم در حال عمل و عکس‌العمل هستند. برای این مدل‌ها، مسألهٔ قانون اعداد بزرگ، قضیهٔ حد مرکزی و قانون تغییرات بزرگ به مراتب پیچیده‌تر است. مرجع زیر این مدل‌ها را بررسی می‌کند:

C. Kipnis and C. Landim, Scaling Limits for Interacting Particle Systems, Springer, (1999).

F. Rezakhanlou
Department of Mathematics,
UC Berkeley, CA 94720
E-mail: rezakhan@math.berkeley.edu

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۵۹ تا ۶۹

آنالیز هارمونیک از کجا شروع شده است و به کجا می‌رود؟

علیرضا مدقالچی

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر، دانشگاه تربیت معلم

پست الکترونیک: Medghalchi@saba.tmu.ac.ir

چکیده

در این سخنرانی نگاهی اجمالی به سیر تحول آنالیز هارمونیک خواهیم داشت و گوشه‌هایی از توسعه و گسترش این دانش را بیان خواهیم کرد. «معمولاً نقش ریاضیات با ارائهٔ مثال‌هایی از ابداعات مهم به دنیا عرضه می‌شود که بدون کمک ریاضیات نمی‌توانند به وجود آیند. این امر با قدرتی ظاهر می‌شود که ما ریاضیدانان خود را با حقیقت ابدی مرتبط می‌دانیم، آن را به فیزیکدانان تحویل می‌دهیم و آنان نیز به شیمیدانان و مهندسین تحویل می‌دهند، و در نهایت همه آنها در اختیار بشریت قرار می‌گیرند. مطمئناً مثالهای مهمی از این ایده‌ها وجود دارد که از این زنجیر عبورکرده‌اند (در دو جهت). ولی من همچنین فکر می‌کنم که این دیدگاه باریکی است که ریاضیات را بر این اساس منزوی کنیم. یک نظریهٔ اساسی جامعه شناختی وجود دارد که معتقد است ریاضیات و ریاضیدانان کاملاً فرهنگ بشری را احاطه کرده‌اند و به ویژه به هنر متصلند. جاهایی عشق به تجرید هم نمودار می‌شود ... » (دیوید مامفورد[1] رئیس اتحادیه ریاضیدانان ـ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیدانان ۹۸).

در سرحد علم سؤال دقیق به دشواری مطرح می‌شود ولی کشف جواب دقیق مقدور است (فضل ا ... رضا، دیدها و اندیشه‌ها، ۱۳۵۴).

1) David Mumford

برای توسعه و گسترش یک دانش طرح سؤال دقیق کاری است اساسی و این امر وظیفهٔ خبرگان و نخبگان هر دانشی است و وظیفهٔ دانش‌آموختگان و سربازان این علم کشف جواب آنها است. برای طرح سؤالات دقیق در یک حوزهٔ ریاضی نیازمند اطلاعات دقیق و بررسی مباحث و مطالب انباشته شده در مجلات و مقالات هستیم که در طول سالیان متمادی به روش تجرید و تعمیم توسط ریاضی‌کاران و ریاضیدانان به دست آمده‌اند. بدون این بررسی، تحقیق و پژوهش در بخشهای مهم ریاضی نه ممکن است و نه مفید. تعمیم‌های خارج از این مسیر چون شاخ و برگهای زاید درختان هستند که به مرور خشک شده و از بین می‌روند.

آنالیز هارمونیک، چه به صورت کلاسیک و چه به صورت مجرد در بسیاری از حوزه‌های ریاضیات و سایر علوم از قبیل فیزیک، مهندسی، نظریهٔ ارتباطات، نظریهٔ موجکها و حتی حمل و نقل حضوری فعال دارد. ویکتور هوگو نویسندهٔ معروف فرانسوی، پالسترینا[1] را پدر یا پادشاه موسیقی می‌دانست. می‌توان فوریه را پدر و یا حتی پدربزرگ «آنالیز هارمونیک» نامید. اما اصطلاح آنالیز هارمونیک بعدها توسط وینر[2] به کار رفت.

قبل از اینکه به پیام وینر در این راستا گوش دهیم، نگاهی گذرا به آنچه که فوریه می‌خواست انجام دهد می‌اندازیم. در کتاب هویت وراس می‌خوانیم: «شاید عجیب به نظر آید که کلمهٔ «هارمونیک» را بعد از ۱۰۰۰ صفحه مطلب توضیح داد ولی این را می‌توان نشان این واقعیت دانست که چگونه و چقدر این موضوع از سرآغاز خود فاصله گرفته است. آهنگ تولید شده به وسیلهٔ نوسان فنر، ستونی از هوا، یک تکهٔ فلز ترکیبی از آهنگهای همساز[3] است. در آکوستیک و در مباحث ریاضی فیزیک قرن هیجدهم و نوزدهم تعیین این مؤلفه‌ها [آنالیز هارمونیک] و ساختن آهنگی موزون از این مؤلفه موضوع تحقیق و پژوهش بوده است [سنتز هارمونیک]. برنامه‌های مشابه برای پدیده‌های بسیاری که متناوبند و یا پدیده‌ای متناوب ناپیدا در درون خود دارند وجود دارد مانند تشعشعات الکترومغناطیس.

مسألهٔ فیزیکی که منجر به مطالعهٔ سریهای مثلثاتی گردید مطالعهٔ نوسان یک فنر ساکن در دو نقطهٔ $(\circ,\circ)$ و $(l,\circ)$ بود. مطالعهٔ این مسأله تبدیل به حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial t^{۲}} = c^{۲}\frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} \qquad (c \text{ ثابت})$$

گردید که در آن $u = u(x,t)$ و $u(\circ,t) = u(l,t) = \circ$. در ۱۷۴۷ میلادی دالامبر[4] با تغییر متغیر $\xi = x + ct$ و $\eta = x - ct$، آن را به معادلهٔ

$$\frac{\partial^{۲} u}{\partial \xi \partial \eta} = \circ$$

۱) جیوانی ـ پیرلوئیجی پالسترینا آهنگ‌ساز و ایجادکننده موسیقی دینی ملقب به پادشاه موسیقی (۱۵۹۴-۱۵۲۴) (فرهنگ معین ـ جلد ۵)

2) Norbert Wiener 3) Harmonic 4) Jean le Rond d'Alember

تبدیل کرد که در $u=\phi(\xi)+\psi(\eta)$ صدق می‌کند. پس جواب معادلهٔ فوق به صورت زیر است:

$$u=\phi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

که در آن ϕ و ψ براساس مقادیر اولیه و حرکت فنر تعیین می‌شوند. فرض کنید در حالت سکون ($t=0$) فنر در حالت $u=f(x)$ ($0\leq x\leq l$) قرار دارد. پس

$$\phi(x)+\psi(x)=f(x)$$

چون سرعت در لحظهٔ $t=0$ در هر نقطه صفر است. پس

$$u'=c\phi'(x+ct)-c\psi'(x-ct)$$

در نتیجه

$$\phi'(x)-\psi'(x)=0$$

و در نتیجه،

$$\phi(x)=\psi(x)$$

$$u=\frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at))\qquad (0\leq x\leq l, t\geq 0)$$

بعد ازکارهای اویلر[1]، در ۱۷۵۳ میلادی دالامبر به روش جدا کردن متغیرها معادلهٔ $y=u(x)v(t)$ (معادلهٔ موج) را حل کرد. این معادله دارای جواب $u(x)=\sin px$ و $v(t)=\sin cpt$ یا $u(x)=\cos px$ و $v(t)=\sin cpt$ است که p ثابت است. شرط $y(0,t)=0$ (به ازای هر t) جواب دوم را حذف می‌کند و شرط $y(l,t)=0$، p را به مقادیر $\frac{n\pi}{l}$ محدود می‌کند. در نتیجه از جمع جوابهای خاص جواب

$$y=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}(a_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+b_n\sin\frac{n\pi ct}{l})$$

به دست می‌آید. با فرض $t=0$، $y=f(x)$ نتیجه می‌شود که $b_n=0$ (به ازای هر n) و جواب

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$

به دست می‌آید. برنویی[2]، بیان می‌کند که این جواب عمومی است و در نتیجه f بر $[0,\pi]$ به صورت

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$$

در می‌آید.

1) Leonard Euler 2) D. Bernoulli

در قرن هیجدهم ریاضیدانان حاصل‌جمع بعضی از سری‌های مثلثاتی را محاسبه کردند اما پیشرفت واقعی موقعی حاصل شد که فوریه[1] نشان داد که در بسیاری از حالات حتی علیرغم ناپیوستگی f، f را می‌توان برحسب یک سری مثلثاتی نشان داد. فوریه کتاب خود را در ۱۸۲۲ میلادی منتشر کرد. محتوی این کتاب گسترش همان مسأله حرارت بود که ده سال پیش فوریه جایزهٔ آکادمی فرانسه را به سبب انتشار مقاله‌ای در مورد حرارت دریافت کرده بود. داوران این مسابقه، لاگرانژ[2]، لاپلاس[3] و لژاندر[4] بودند. بد نیست به نکته‌ای در اینجا اشاره کنیم که این مقاله به خاطر ضعیف بودن استدلالها در بعضی از جاها مورد انتقاد داوران قرارگرفت. فوریه درکتاب خود این ابهامات را روشن ساخت و استدلالهای مناسب ارائه کرد. کارهای فوریه پایه‌ای برای فیزیک و ریاضی شد.

وینر در مقاله‌ای در پایان قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم بحثی روشنگرانه در مورد کارهای فیزیکدانان ارائه می‌دهد. در این مقاله توابع متناوب و حتی توابع در $L^۲(R)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$L^۲(R) = \{f | f : R \longrightarrow \mathbb{C}, \int_R |f|^۲ < \infty\}$$

$L^۲(R)$ یک فضای باناخ است که در آن $||f||_۲ = (\int_R |f|^۲)^{\frac{۱}{۲}}$. همهٔ این تجزیه و تحلیل‌ها به بحث توابع روی گروه T [یعنی توابع متناوب روی R] یا توابع روی R [توابع با تناوب ناپیدا] منجر شد.

بعد از کار اساسی گالوا[5] و انتشار مقالهٔ جردن[6]، کیلی[7] اولین تعریف از یک گروه مجرد به غیر از گروه تبدیل را ارائه داد. البته این تعریف منحصر به گروههای متناهی بود. حتی تعریف وبر[8] دارای سادگی تعریف فعلی نبود. تعریف گروههای توپولوژیک به وسیلهٔ لی[9] هموار شد که در تعریف لی گروه دارای ساختمان منیفلد دیفرانسیل پذیر بود. بعد از لی دیدها به طرف گروههای مجرد نشانه رفت. لازم به ذکر است که گروه لی گروه تبدیلات دیفرانسیل پذیر بود. هیلبرت[10] در مسألهٔ پنجم خود سؤال کرد که آیا می‌توان شرط دیفرانسیل پذیری از توابع اعضای یک گروه تبدیل را حذف کرد. از این رو مسألهٔ گروههای مجرد توپولوژیک نخستین بار به وسیلهٔ براور[11] (۱۹۶۶-۱۸۸۲) و سپس به وسیلهٔ پونتیاگین[12] (۱۹۶۰-۱۹۰۸)، مطرح گردید و سپس مسألهٔ هیلبرت به این مسأله تبدیل شد که آیا گروه توپولوژیک موضعاً اقلیدسی یک گروه لی است؟ در ۱۹۵۲ این مسأله برای گروههای موضعاً فشرده حل شد. لِژ[13] اولین ریاضیدانی است که اصطلاح گروههای توپولوژیک را به کار برد که در واقع تعریف نیم گروه توپولوژیک است. بالاخره او در ۱۹۲۷ میلادی تعریف گروه توپولوژیک را ارائه کرد. گروه جبری G به همراه یک توپولوژی یک گروه توپولوژیک نامیده می‌شود اگر

---

1) Joseph Fourier 2) Joseph Louis Lagrange 3) P. S. Laplace 4) A. M. Legendre 5) E. Galois 6) Jordan 7) I. Keyley 8) W. Weber 9) S. Lie 10) D. Hilbert 11) L. E. Brouwer 12) L. S. Pontjagin 13) F. Leja

نگاشتهای $xy \longleftarrow (x,y)$ و $x^{-1} \longleftarrow x$ پیوسته باشند.

در آنالیز هارمونیک، هم ساختار گروهها و نیمگروهها و ابرگروهها مورد بررسی قرار می‌گیرد و هم ساختارهایی که بر روی اینها ساخته می‌شود مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در ساختار درونی، زیرگروهها، گروههای خارج‌قسمتی، ساختمان گروههای به طور فشرده تولید شده، گروههای همبند، گروه کاراکترها، ... مورد مطالعه قرار می‌گیرند. یکی از مسائل مهم در این بررسیها، نقش توپولوژی در اعمال جبری است.

ساختار گروهها و نیمگروهها

اشاره کردیم که یک گروه توپولوژیک G یک گروه جبری به همراه یک توپولوژی است که در آن اعمال $xy \longleftarrow (x,y)$، $x^{-1} \longleftarrow x$ پیوسته است. منظور از نیمگروه S مجموعه‌ای ناتهی با یک عمل شرکت‌پذیر روی آن است یعنی $xy \longleftarrow (x,y)$ از $S \longleftarrow S \times S$ شرکت‌پذیر است. اگر روی S یک توپولوژی داشته باشیم برحسب آنکه $xy \longleftarrow x$، یا $xy \longleftarrow y$، یا $xy \longleftarrow x$، $xy \longleftarrow y$ یا $xy \longleftarrow (x,y)$ پیوسته باشد آن گاه S نیم‌گروه راست توپولوژیک، چپ توپولوژیک، نیم توپولوژیک، توپولوژیک نامیده می‌شود.

اگرچه بخش عمده‌ای از مسائل مربوط به گروههای توپولوژیک به نیمگروههای توپولوژیک تعمیم یافته است ولی هنوز مسائل عمده‌ای در گروهها وجود دارند که حل نشده‌اند. ساختار درونی نیمگروهها و ساختارهای جبری آنها برنامهٔ مفصل دیگری است که از مطالعهٔ ایده‌آلها، زیرگروهها، زیرگروههای ماکسیمال ایده‌آلهای مینیمال گرفته تا ساختار بیرونی مثل جبرهای روی نیمگروهها، فشرده‌سازی، ... را شامل می‌شود.

اشاره کردیم که در نظریه گروهها توپولوژی ابزاری است که روی اعمال جبری هم اثر گذار است. به این قضیه زیبا توجه کنید:

قضیه. هر نیمگروه فشرده که حذفی چپ و راست باشد یک گروه توپولوژیک است.

یا

قضیه. هر نیمگروه فشرده دارای یک خودتوان است.

این دو قضیه نشان می‌دهد که گذر از یک نظریه به یک نظریهٔ بالاتر چگونه می‌تواند مسائل احیاناً حل نشده در سیستم اول را با ابزارهای سیستم بالاتر حل کند.

گام اساسی در تحول آنالیز هارمونیک اثبات وجود اندازهٔ پایا روی گروه موضعاً فشردهٔ G است. اندازهٔ λ را روی G پایای چپ می‌نامیم اگر λ یک اندازهٔ منظم باشد و $\lambda(xB) = \lambda(B)$ ($x \in G$، B یک مجموعهٔ بورل است). هانری پوانکاره[1] و الی کارتان انتگرالهای پایا را مورد مطالعه قرار دادند. بعد از طی مراحلی توسط افراد مختلف، بالاخره در ۱۹۳۳ میلادی هار[2] یک اندازهٔ پایا (هار) را روی یک گروه موضعاً فشرده، متریک پذیر و تفکیک‌پذیر ارائه داد. فون نویمن[3] وجود و یکتایی اندازهٔ هار را برای گروههای فشرده تفکیک‌پذیر به دست آورد و بالاخره آندره ویل[4] مسأله را برای گروههای موضعاً فشرده دلخواه به اتمام رسانید.

1) H.Poincaré 2) Alfred Haar 3) J. Von Neumann 4) André Weil

برهان این قضیه بسیار طولانی است و در کتاب ارزشمند هویت و راس آمده است. اخیراً برهان جالب و کوتاهی از این قضیه ارائه شده است. در این اثبات از قضیهٔ نقطهٔ ثابت استفاده شده است.

فرض کنید $M(G)$ فضای اندازه‌های مختلط بورل و منظم باشد. در این صورت $M(G) = (C_\circ(G))^*$، واضح است که $M(G)$ یک فضای باناخ است و با ضرب

$$\mu * \nu(\psi) = \int_G \int_G \psi(xy) d\mu(x) d\nu(y)$$

$M(G)$ به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. زیر جبر $L^1(G)$ از $M(G)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^1(G) = \{f | f : G \longrightarrow C, \int_G |f| d\lambda < \infty\} \ (f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\lambda(y))$$

که در آن λ اندازهٔ هار چپ روی G است. $L^1(G)$ یک زیرجبر باناخ $M(G)$ است که دارای واحد تقریبی کراندار است یعنی توری مانند (e_α) در $L^1(G)$ وجود دارد که $e_\alpha * f \xrightarrow{\|\cdot\|} f$. تابع مدولار Δ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_G f(xa) \Delta(xa) d\lambda(x) = \int_G f(x) d\lambda(x) \qquad (f \in L^1(G), a \in G)$$

و با تعریف $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})} \Delta(x^{-1})$، $L^1(G)$ یک جبر با برگشت است. گروه G را تک مدولی می‌نامند در صورتی که $\Delta = 1$.

قضیه. گروههای فشرده و یا آبلی تک مدولی هستند.

باید توجه داشت که گروه G فشرده است اگر و فقط اگر $\lambda(G) < \infty$.

یکی از مسائل مهمی که در نظریهٔ گروهها مطرح شده است، نظریهٔ نمایش است. V را یک نمایش گروه G روی $B(H)$ می‌نامیم در صورتی که

$$G \longrightarrow B(H)$$
$$x \longrightarrow V_x$$

V_x خطی است و $V_{\alpha x} \xi = \alpha V_x \xi$ و $V_{xy} = V_x V_y$ $(\alpha \in \mathbb{C}, x, y \in G, \xi \in H)$. فروبنیوس[1] و برنساید[2] نظریهٔ نمایش گروهها را برای گروههای متناهی مطرح کردند. گسترش شگفت‌آور نظریهٔ نمایش سازگاری آن با فیزیک و به ویژه نظریهٔ مکانیک کوانتم است. هرمان وایل در این باره می‌گوید: «برای خود من این آرزو که بفهمم چه جوهرهٔ ریاضی پشتوانهٔ نظریهٔ نسبیت است مرا به مطالعهٔ نمایش‌ها و پایاها رهنمون ساخت».

درگذر از نمایش گروههای فشرده به گروههای موضعاً فشرده، ابتدا گروه موضعاً فشردهٔ آبلی مورد توجه قرارگرفت. در این حالت تمام نمایشهای تحویل‌ناپذیر با بعد یک هستند $(E \subseteq H)$ را پایا می‌نامیم در صورتی

1) G. Frobenius 2) W. Burnside

که $E \subseteq E$ $V_x E$ $x \in G$)، در حالتی که تنها زیرفضاهای پایای V، H، $\{0\}$ باشد، V را پایا می‌نامیم. این نمایشها به کاراکترها ارتباط دارد.

تعریف. $\chi : G \longrightarrow \{z||z| = 1\} = T$ را یک کاراکتر می‌نامیم در صورتی که $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$، $\chi = \bar{\chi}$ و χ پیوسته باشد. مجموعهٔ همهٔ کاراکترهای گروه آبلی G را با $\hat{G}$ نمایش می‌دهیم و آن را گروه کاراکترهای گروه آبلی G می‌نامیم. $\hat{G}$ را دوگان G می‌نامیم.

قضیه (پونتیاگین). اگر G یک گروه موضعاً فشرده و آبلی باشد آنگاه $\hat{G}$ به طور توپولوژیکی با G ایزومورف است.

قضیه. اگر گروه آبلی G فشرده (یا گسسته) باشد آنگاه $\hat{G}$ گسسته (یا فشرده) است.

مثال. $\hat{R} = R$، $\hat{Z} = T$، $\hat{T} = Z$.

در حالتی که G آبلی نباشد $\hat{G}$ گروه نیست. در نتیجه هیچ نظریهٔ معادلی برای حالت غیرآبلی وجود ندارد.

کوشش برای پیدا کردن نظریهٔ معادل برای حالت غیرآبلی منجر به نظریه‌های دیگری گردید که از آن جمله نظریه ابر گروهها است که خود داستان مفصل دیگری دارد. در حالتی که G یک گروه موضعاً فشرده و آبلی باشد $f \longrightarrow \hat{f}$ تبدیل فوریه از $L^1(G)$ به $L^\infty(\hat{G})$ است به طوری که

$$\hat{f}(X) = \int f(x)\bar{\chi}(x)d\lambda(x)$$

که دارای نگاشت وارون

$$L^\infty(G) \longrightarrow L^1(\hat{G})$$

با تبدیل وارون فوریه زیر است.

$$f(x) = \int_{\hat{G}} X(x)(\chi)d\mu(\chi)$$

که μ اندازهٔ هار $\hat{G}$ است.

در حالت کلی، نظریهٔ نمایش برای گروههای موضعاً فشرده ارائه گردید و منجر به جبرهایی مثل ساختار هوپف[1] در روی جبرهای فون نویمن گردید. در ۱۹۶۴ ایمارد[2] و متعاقب آن والتر[3] در کوشش برای تعریف ساختاری برای حالت غیرآبلی جبرهای $B(G)$ و $A(G)$ را مورد مطالعه قرار دادند.

تعریف. تابع $f : G \longrightarrow C$ را مثبت معین می‌نامیم اگر به ازای هر دنبالهٔ $\{c_i\}$ از اعداد مختلط و هر دنبالهٔ $\{x_i\}$ از اعضای G داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i\bar{c}_j f(x_i x_j^{-1}) \geq 0$$

1) Hopf 2) P. Eymard 3) M. E. Walter

مجموعهٔ توابع پیوسته و مثبت معین را با $P(G)$ نمایش می‌دهیم. $B(G) = <\overline{P(G)}>$ و $A(G) = \overline{B(G) \cap C_c(G)}$ به ترتیب جبرهای فوریه استیلتیس و فوریه نامیده می‌شود. در حالتی که G آبلی باشد $B(G) = \widehat{M(\hat{G})}$ و $A(G) = \widehat{L^{1}(\hat{G})}$. در واقع، $A(G)$ جبری است که به وسیلهٔ $u = f * g^{\sim}$ها که در آن $\tilde{g}(x) = \overline{g(x^{-1})}$ تولید می‌شود.

اساس بحث نظریهٔ نمایشها در واقع مقالهٔ اساسی گلفاند و ریکوف است که در ۱۹۴۳ منتشر شد. قضیهٔ اساسی این مقاله به صورت زیر است.

قضیه. [گلفاند[1]ـریکوف[2]]. فرض کنید G موضعاً فشرده باشد. به ازای هر $a \neq e$، نمایش یکانی تحویل‌ناپذیر V از G وجود دارد که $V_a \neq I$ (I نگاشت همانی روی فضای هیلبرت H است). نتیجهٔ جالب این قضیه، قضیهٔ زیر است:

قضیه. اگر G گروه موضعاً فشرده و آبلی باشد آن‌گاه G به اندازهٔ کافی کاراکتر پیوسته می‌پذیرد.

نتیجهٔ دیگری از این قضیه، قضیهٔ معروف پیتر[3] ـ وایل[4] است که اگر G فشرده و آبلی باشد آن‌گاه فضای تولید شده به وسیلهٔ کاراکترهای پیوسته در $C(G)$ چگال است.

به حالت غیرآبلی برگردیم. گلفاند و ریکوف نشان دادند که f روی G مثبت معین است اگر و فقط اگر به ازای ξ و η از H، $f(x) =< U_x\xi, \eta >$ که U یک نمایش یکانی از G به وسیلهٔ عملگرهای کراندار روی فضای هیلبرت H است. در واقع بخنر[5] قبلاً نشان داده بود که f روی R^n مثبت معین است اگر و فقط اگر $f(x) = \int \chi d\mu(\chi)$. این قضیه، توسط وایل به گروههای موضعاً فشرده تعمیم یافت.

قضیه. اگر G یک گروه آبلی و موضعاً فشرده باشد آن‌گاه تابع φ روی G مثبت معین است اگر و فقط اگر $\varphi(x) = \int_G \chi(x) d\mu(\chi)$ که μ اندازهٔ هار روی $\hat{G}$ است.

هدف بسیاری از مطالعات آنالیز هارمونیک تحت کنترل در آوردن گروههای موضعاً فشرده خاص است. دسته‌ای از این گروهها، گروههای میانگین‌پذیر هستند.

تعریف. گروه موضعاً فشرده G را میانگین‌پذیر می‌نامیم اگر نگاشتی مانند $m : L^{\infty}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ باشد که $m(1) = 1$، $m \geq 0$ و $m(l_x f) = m(f)$.

قضایای معادل بسیاری برای میانگین‌پذیری ثابت شده است. خواستاران اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانند به کتابهای پاترسون و پیه مراجعه کنند.

تمام گروههای فشرده و تمام گروههای آبلی میانگین‌پذیرند ولی گروههای آزاد با دو مولد متمایز میانگین‌پذیر نیستند.

قضیهٔ بسیار مهم جانسون ارتباط این مفهوم را با کوهمولوژی به دست می‌دهد:

---

1) I. M. Gelfand 2) Raikov 3) F. Peter 4) Herman Weyl 5) S. Bochner

قضیه. گروه G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر هر اشتقاق پیوستهٔ $D : L^1(G) \longrightarrow X^*$ (X یک $L^1(G)$-مدول دلخواه است) درونی باشد یعنی $x_\circ$ی از X^* باشد که $D(f) = fx_\circ - x_\circ f$. (نگاشت خطی D از یک جبر باناخ A به یک A-مدول Y را یک اشتقاق می‌نامیم اگر $D(ab) = D(a)b + aD(b)$). اگر هر اشتقاق $D : A \longrightarrow A^*$ درونی باشد، گوییم A میانگین‌پذیر ضعیف است. $L^1(G)$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد، روی $L^1(G)$ نرم جدیدی تعریف می‌کنیم به طوری که $\|f\|_{C^*} = \sup \|T_f\|$ و سوپریموم روی تمام *- نمایشهای نابدیهی $L^1(G)$ گرفته می‌شود.[$f \longrightarrow T_f$ از $L^1(G)$ به $B(H)$ یک *- نمایش نامیده می‌شود اگر $T_{f+g} = T_f + T_g$، $T_{\alpha f} = \alpha T_f$، $T_{f*g} = T_f T_g$، و هر T_f روی H خطی و کراندار باشد]. C^*- جبر گروهی، $C^*(G)$، عبارت است از $\overline{L^1(G)}^{C^*}$.

مطالعهٔ میانگین‌پذیری به مطالعهٔ میانگین‌پذیری $C^*(G)$ هم منجر شده است. قبل از اینکه این مقاله را به پایان ببریم به چند نکتهٔ مهم اشاره می‌کنیم؛ ابتدا جملاتی از وینر را مورد توجه قرار می‌دهیم. «برای سالیان زیادی تقاضاهای عمدهٔ بخش مهندسی الکترونیک از من در M.I.T تنظیم بنیان منطقی برای حسابان هوی ساید بود. برای انجام این امر من باید آنالیز هارمونیک را در حالت بسیار کلی مطالعه می‌کردم. ضمن این مطالعه دریافتم که نظریهٔ هوی ساید را می‌توان کلمه به کلمه به زبان آنالیز هارمونیک توسیع یافته منتقل کرد».

«آنالیز هارمونیک به وسیلهٔ برنویی، دالامبر، لاگرانژ، اویلر پیش‌بینی شد، به وسیلهٔ فوریه و دیریکله بارور شد. اصالت خود را به وسیلهٔ فیزیکدانان دریافت کرد و افق‌های جدیدی به وسیلهٔ کارهای وینر آغاز شد و با تحولات جدید شتاب گرفت».

پروژه‌های آینده

الف) مطالعه روی جبرهای گروهی وزن‌دار $L^1(G,\omega)$ به وسیلهٔ ریاضیدانان مختلف انجام گرفته است ولی هنوز مسائل زیادی از نوع مسائل فوق هست که می‌تواند در این جبر مورد بررسی قرار گیرد. (تابع اندازه‌پذیر $\omega : G \longrightarrow [\circ, \infty)$ را یک وزن می‌نامیم اگر $\omega(x,y) \leq \omega(x)\omega(y)$ و $(L^1(G,\omega) = \{f | \int_G |f|\omega d\lambda < \infty\}$

ب) $L^1(G)^{**}$، $M(G)^{**}$، $LUC(G)^*$، توسط بعضی از ریاضیدانان معاصر از جمله لائو، قهرمانی، پیم، لاسرت، ... مورد مطالعه قرارگرفته است ولی هنوز مسائل زیادی از جبرهای $L^1(G)$، $M(G)$، ... را می‌توان به جبرهای فوق تعمیم داد.

ج) حالتهای وزن‌دار جبرهای بند ۲ می‌توانند حاوی پروژه‌های مفیدی باشند.

د) مقاله جدید جانسون در مورد وجود گروهی فشرده که $A(G)$ میانگین‌پذیر نیست می‌تواند پایه‌ای برای مطالعات بیشتر در این نوع جبرها باشد.

ه) مطالعهٔ نمایش‌های دوگانی به جبرهای کک منجر شده است که خود پروژهٔ مفصلی است.

و) در راستای مطالعات تئوریک، علاوه بر گروهها در نظریهٔ نیمگروهها و ابرگروهها پیشرفتهای زیادی حاصل شده است ولی هنوز مسائل زیادی هست که نیاز به پاسخ دارد. در زمینهٔ ابرگروهها می‌توانید به مقالات نگارنده مراجعه کنید.

ز) در راستای مطالعات کاربردی و استفاده از تبدیلات فوریه نظریهٔ موجکها کاربرد وسیعی از آنالیز هارمونیک را در بر می‌گیرد که در این زمینه در سالهای اخیر در بعضی از دانشگاههای ایران تحقیقات خوبی انجام شده است.

با چهار بیت از اقبال لاهوری سخن خود را به پایان می‌بریم:

گفت این علم و هنر گفتم که پوست — گفت حجت چیست؟ گفتم روی دوست
گفت دین عامیان؟ گفتم شنید — گفت دین عارفان گفتم که دید
صد کتاب آموزی از اهل هنر — خوشتر آن درسی که گیری از نظر
علم، تا از عشق برخوردار نیست — جز تماشاخانهٔ افکار نیست

والسلام.

مراجع

در تدوین این مقاله علاوه بر ارجاع به مقالات بسیار متنوع ریاضیدانان معاصر از مراجع زیر استفاده شده است.

[1] J. C. Burkill, H. Burkill, A second course in mathematical analysis, University Press, (1970).

[2] C. B. Boyer, A history of mathematics, John Wiley, (1989).

[3] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract harmonic analysis I, II, Springer Verlag, (1979).

[4] B. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972).

[5] G. Mackey, Unitary representation in physics, probability and number theory, Bejamin, (1978).

[6] J. P. Pier, Amenable locally compact groups, John Wiley, (1984).

[7] ——— , Some views on the evolution of harmonic analysis.

[8] Herman Weyl, Relativity theory as a stimulus in mathematical research, Gesmmelte Abhandlungan, vol.IV. Springer Verlag, (1968).

[9] N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. of math. 33, 1-100.

[10] ——— , I am a mathematician, MIT Press, (1956).

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۷۱ تا ۹۳

حل دستگاه نامعادلات، برنامه‌ریزی خطی و صحیح با رتبه سطری کامل بر اساس روشهای ABS

حمید اسمعیلی و نظام‌الدین مهدوی امیری

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

پست الکترونیک: nezamm@math.sharif.ac.ir

چکیده

اخیراً روشهای ABS برای حل دستگاههای خطی مورد توجه خاصی قرار گرفته‌اند. ابتدا چگونگی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود تساوی را بر اساس روشهای ABS بررسی می‌کنیم. تعیین می‌کنیم که مسأله شدنی هست یا خیر. در صورت شدنی بودن، شرایط بهینگی یا نامتناهی بودن را به دست می‌آوریم. سپس با کاربرد روش جدیدی که اخیراً برای حل دستگاه معادلات دیوفانتی خطی ارائه کرده‌ایم، به حل مسائل برنامه‌ریزی صحیح با قیود تساوی می‌پردازیم. بر اساس روشهای ABS، رهیافت جدیدی برای به دست آوردن جوابهای عمومی دستگاه نامعادلات خطی ارائه می‌کنیم. با استفاده از نتایج به دست آمده، حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود نامساوی رتبه کامل را ارائه می‌کنیم. نتایج به دست آمده چگونگی تعیین جوابهای بهینه یا نامتناهی بودن این گونه مسائل را مشخص می‌کنند. سپس به تخصیص روش حل دستگاه نامعادلات عمومی به حل دستگاه نامعادلات خطی صحیح می‌پردازیم. نهایتاً، با استفاده از نتایج به دست آمده، مسأله برنامه‌ریزی صحیح با قیود نامساوی رتبه کامل

را به مسئله‌ای با تعداد متناهی جوابهای صحیح شدنی تبدیل می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که چگونه یک جواب شدنی صحیح برای این مسأله به دست می‌آید.

۱. معرفی

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $m \leq n$، یک ماتریس با رتبه m باشد. همچنین فرض کنید $b \in \mathbb{R}^m$. دستگاه نامعادلات خطی

$$Ax \leq b, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{۱}$$

را در نظر بگیرید. اگر $x^* \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که $Ax^* \leq b$، گوییم که دستگاه (۱) شدنی است و x^* یک نقطه یا جواب شدنی آن است. دستگاه (۱) را نشدنی گوییم اگر دارای هیچ جواب شدنی نباشد.

اشتراک هر تعداد متناهی نیم فضاهای $a_i^T x \leq b_i$، $1 \leq i \leq m$، را یک چند وجهی در $\mathbb{R}^n$ گوییم. بنابراین، دستگاه (۱) نشان‌دهندهٔ یک چند وجهی در $\mathbb{R}^n$ است. هدف ما تعیین یک صورت صریح برای نقاط این چند وجهی (نقاط شدنی (۱)) با استفاده از روشهای ABS است.

اخیراً روشهای ABS [۱] برای حل دستگاههای خطی عمومی و صحیح [۴] مورد توجه قرارگرفته‌اند. رده روشهای ABS روشهایی تکراری از نوع مستقیم هستند که در تعدادی متناهی تکرار، جوابهای عمومی یک دستگاه معادلات خطی، یا ناسازگار بودن آن را تعیین می‌کنند. برخی از روشهای ABS در حل دستگاههای خطی را می‌توان در [۲] یافت. در [۳] و [۴] روشهایی مبتنی بر رده ABS برای حل یک دستگاه معادلات دیوفانتی خطی و تعیین جوابهای صحیح عمومی ارائه شده‌اند.

ژانگ [۱۴] و ژائو [۱۶] کاربرد روشهای ABS را در به دست آوردن یک جواب از یک دستگاه نامعادلات خطی (دستگاه (۱)) بررسی کرده‌اند. همچنین ژانگ [۱۵] نشان داد که الگوریتم هوآنگ از رده ABS را می‌توان در ترکیب با نوعی از روش مجموعه مؤثر گلدفارب-عدنانی [۸] برای حل یک دستگاه از نامعادلات خطی به کار برد به طوری که در تعدادی متناهی تکرار، یا نشدنی بودن دستگاه مشخص شود یا جواب با کمترین طول اقلیدسی به دست آید. شی [۱۰] با استفاده از روش هوآنگ دنباله‌ای از جوابهای یک دستگاه معادلات خطی را تولید می‌کند به طوری که هر نقطه انباشتگی آن یک جواب نامنفی دستگاه است.

در این‌جا رهیافتی برای کاربرد رده روشهای ABS در تعیین نقاط چند وجهی (۱) ارائه می‌کنیم، به نحوی که بتوان شکل صریح نقاط چند وجهی (۱) را تعیین نمود. سپس این رهیافت را به یافتن نقاط صحیح یک چند وجهی تعمیم می‌دهیم. با استفاده از نتایج به دست آمده به چگونگی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی عمومی و برنامه‌ریزی صحیح با قیود تساوی یا قیود رتبه کامل نامساوی می‌پردازیم.

اسپدیکاتو و ابافی [۱۱] حل یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی با قیود از نوع (۱) را به نوعی بررسی کرده‌اند.

روش آنها مبتنی بر استفاده از روش LU ضمنی در رده ABS است. این روش به طور خاصی با انتخاب پارامترهای متناظر با روش LU به دست می‌آید. ما در این‌جا این مسأله را به وسیله یافتن شکل صریح نقاط چند وجهی (۱) حل می‌کنیم که مستقل از انتخاب روشی خاص در رده ABS است. بدین ترتیب، رهیافت ارائه شده، مستقل از به کارگیری نمونه‌ای خاص از رده روشهای ABS، شامل الگوریتمهای گوناگونی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی می‌شود.

بخش ۲ به ارائهٔ خلاصه‌ای از رده روشهای ABS و برخی خواص آن می‌پردازد. به علاوه، در این بخش چگونگی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود تساوی ارائه می‌شود. در بخش ۳ به کاربرد روشهای ABS به دستگاههای دیوفانتی خطی و حل مسائل برنامه ریزی صحیح با قیود تساوی می‌پردازیم. در بخش ۴ به حل دستگاه نامعادلات خطی رتبه کامل سطری می‌پردازیم که منجر به یک نمایش عمومی برای نقاط یک چندوجهی از نوع (۱) می‌شود. در این بخش همچنین حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود نامساوی رتبه کامل بررسی می‌شود. در بخش ۵ نیز به یافتن یک نمایش عمومی برای نقاط صحیح یک چند وجهی از نوع (۱) و همچنین ارائه تبدیلی از مسائل برنامه‌ریزی صحیح با قیود نامساوی رتبه کامل به برنامه‌های صحیح با تعداد متناهی جوابهای شدنی می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک نقطه شدنی اولیه صحیح برای اینگونه مسائل محاسبه کرد.

۲. روشهای ABS برای حل دستگاه معادلات و برنامه‌ریزی خطی

روشهای ABS به صورت کلی آن توسط ابافی، برویدن و اسپدیکاتو [۱] مطرح شده‌اند. دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{۲}$$

را، که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $b \in \mathbb{R}^m$ و $m =$رتبه(A)، در نظر بگیرید. قرار دهید $A = (a_1, \ldots, a_m)^T$، $a_i \in \mathbb{R}^n$، $i = 1, \ldots, m$، و $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$. همچنین قرار دهید $A_i = (a_1, \ldots, a_i)$ و $b^{(i)} = (b_1, \ldots, b_i)^T$.

فرض کنید $x_1 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه و $H_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$، پارامتر اسپدیکاتو، نامنفرد و دلخواه باشند. توجه داریم که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ می‌توان نوشت $x = x_1 + H_1^T q$ به ازای برخی $q \in \mathbb{R}^n$.

رده روشهای ABS روشهای تکراری از نوع مستقیم برای به دست آوردن جوابهای عمومی (۲) است. در آغاز تکرار iام، $i \geq 1$، جواب عمومی $i - 1$ معادله اول در دست است. توجه داریم که اگر x_i یک جواب برای $i - 1$ معادله اول باشد، و $H_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دارای رتبه $n - i + 1$ باشد و H_i^T یک ماتریس مولد برای پوچی A_{i-1}^T باشد، آنگاه

$$x = x_i + H_i^T q$$

با $q \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، جواب عمومی $i-1$ معادله اول را به دست می‌دهد، یعنی با

$$H_i\, A_{i-1} = 0, \qquad (3)$$

داریم

$$A_{i-1}^T\, x = b^{(i-1)}. \qquad (4)$$

حال، چون رتبه H_i برابر $n-i+1$ است و H_i^T یک ماتریس مولد برای فضای پوچ A_{i-1}^T است (این فرض برای مورد $i=1$ به وضوح برقرار است)، اگر قرار دهیم

$$p_i = H_i^T\, z_i, \qquad (5)$$

با $z_i \in \mathbb{R}^n$، پارامتر برویدن دلخواه آنگاه $A_{i-1}^T p_i = 0$ و بدین ترتیب

$$x(\alpha) = x_i - \alpha p_i, \qquad (6)$$

به ازای هر اسکالر α، در $i-1$ معادله اول صدق می‌کند. α را می‌توان یک مقدار α_i اختیارکرد که به ازای آن $x_{i+1} = x(\alpha_i)$ در معادله iام نیز صدق کند. اگر قرار دهیم

$$\alpha_i = \frac{a_i^T\, x_i - b_i}{a_i^T\, p_i}, \qquad (7)$$

با فرض $a_i^T\, p_i \neq 0$، آنگاه

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i\, p_i \qquad (8)$$

یک جواب برای i معادله اول در دست است. حال برای تکمیل قدم ABS، H_i را باید به گونه‌ای به H_{i+1} بهنگام نمود که $H_{i+1} A_i = 0$. کافی است قرار دهیم

$$H_{i+1} = H_i - u_i\, v_i^T \qquad (9)$$

و u_i و v_i را چنان انتخاب کنیم که $H_{i+1} a_j = 0$، به ازای $j = 1, \ldots, i$.

فرمول بهنگام سازی (۹) برای H_i یک تصحیح رتبه یک از ماتریس H_i است. عموماً H_i را ماتریس ابافی می‌نامند. روشهای ABS معمولاً با $u_i = H_i a_i$ و $v_i = H_i^T w_i / w_i^T H_i a_i$ داده می‌شوند که در آن w_i، پارامتر ابافی، یک بردار دلخواه صادق در شرط

$$w_i^T\, H_i a_i \neq 0 \qquad (10)$$

است. پس بهنگام سازی H_i را می‌توان به صورت

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i a_i w_i^T H_i}{w_i^T\, H_i\, a_i} \qquad (11)$$

نوشت.

بنابراین رده الگوریتمهای ABS برای حل دستگاه (۲) به صورت زیر خلاصه می‌شود [۱,۲]. در این الگوریتم r_{i+1} رتبه ماتریس A_i در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه رتبه ماتریس H_{i+1} برابر $n - r_{i+1}$ است.

الگوریتم ABS برای حل دستگاههای خطی عمومی

(۱) $x_1 \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، $H_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد و دلخواه را اختیار کن . قرار ده $i = 1$، $r_1 = 0$.

(۲) محاسبه کن $t_i = a_i^T x_i - b_i$ و $s_i = H_i a_i$.

(۳) اگر $s_i = 0$ و $t_i = 0$ آنگاه قرار ده $x_{i+1} = x_i$، $H_{i+1} = H_i$، $r_{i+1} = r_i$ و به قدم (۷) برو (معادله iام زاید است). اگر $s_i = 0$ و $t_i \neq 0$ آنگاه متوقف شو (معادله iام و لذا دستگاه ناسازگار است).

(۴) $\{s_i \neq 0\}$ جهت جستجوی $p_i = H_i^T z_i$ را محاسبه کن، که در آن $z_i \in \mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه صادق در شرط $z_i^T H_i a_i = z_i^T s_i \neq 0$ است. محاسبه کن

$$\alpha_i = t_i / a_i^T p_i$$

و قرار ده

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i.$$

(۵) {بهنگام سازی H_i} H_i را با فرمول زیر به H_{i+1} بهنگام کن

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i a_i w_i^T H_i}{w_i^T H_i a_i}$$

که $w_i \in \mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه صادق در شرط $w_i^T s_i \neq 0$ است.

(۶) قرار ده $r_{i+1} = r_i + 1$.

(۷) اگر $i = m$ آنگاه متوقف شو (x_{m+1} یک جواب برای دستگاه است)، در غیر این صورت قرار ده $i = i + 1$ و به (۲) برو.

توجه: در صورت سازگار بودن دستگاه (۲) جواب عمومی به صورت $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ بیان می‌شود که در آن $q \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است.

برخی از خواص روشهای ABS در زیر خلاصه می‌شوند (برای سادگی نمایش فرض می‌کنیم که $i =$رتبه(A_i)). برای مشاهدهٔ درستی این خواص و خواص دیگر به [۲] مراجعه کنید.

- $H_i a_i \neq 0$ اگر و تنها اگر a_i مستقل خطی از a_1، ...، a_{i-1} باشد.

- هر سطر H_{i+1} متناظر با یک مؤلفه غیر صفر w_i وابسته خطی به سطرهای دیگر است.
- جهتهای جستجوی $p_1, \ldots, p_i$ مستقل خطی هستند.
- اگر $P_i = (p_1, \ldots, p_i)$ و

$$L_i = A_i^T P_i \qquad (۱۲)$$

آنگاه L_i پایین مثلثی و نامنفرد است. توجه داریم که وقتی $i = m$، رابطه $L = AP$ در دست است که در آن L، پایین مثلثی و نامنفرد است.

- ماتریس $W_i = (w_1, \ldots, w_i)$ دارای رتبه ستونی کامل است و

$$\text{برد}(W_i) = \text{پوچ}(H_{i+1}^T) \qquad (۱۳)$$

$$\text{برد}(A_i) = \text{پوچ}(H_{i+1}). \qquad (۱۴)$$

- فرمول بهنگام سازی H_i را می‌توان به صورت

$$H_{i+1} = H_1 - H_1 A_i (W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1 \qquad (۱۵)$$

نوشت که ماتریس $W_i^T H_1 A_i$ قویاً نامنفرد است (یعنی دترمینان تمام زیر ماتریسهای اصلی پیشرو آن غیر صفر است).

برنامه‌ریزی خطی با قیود تساوی

مسأله برنامه‌ریزی خطی

$$\max c^T x \quad : \quad Ax = b, \qquad (۱۶)$$

را در نظر بگیرید که در آن $c \in \mathbb{R}^n$. با استفاده از یک روش ABS و فرض شدنی بودن قیود مسئله، جواب عمومی دستگاه $Ax = b$ را می‌توان به صورت $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ بیان نمود که $q \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است. با جایگذاری آن در تابع هدف، به مسأله نامقید

$$\max(c^T x_{m+1} + c^T H_{m+1}^T q) \quad : \quad q \in \mathbb{R}^n \qquad (۱۷)$$

می‌رسیم. اگر $H_{m+1} c = 0$، آنگاه x_{m+1} یک جواب بهینه است (در واقع برای هر $q \in \mathbb{R}^n$، $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ یک جواب بهینه است). اگر $H_{m+1} c \neq 0$، آنگاه واضح است که مسأله نامتناهی است و جواب ندارد.

ملاحظات:

(۱) چون برد(A^T) =پوچ(H_{m+1})، شرط $H_{m+1}c = 0$ معادل است با $A^T u = c$ به ازای برخی u، که همان شرایط مرتبه اول کیون-تاکر است.

(۲) اگر m =رتبه(A) آنگاه دستگاه (۲) همواره شدنی است و حل مسأله برنامه‌ریزی خطی (۱۶) منجر به حل مسأله نامقید (۱۷) می‌شود. در این حالت و زمانی که $H_{m+1}c = 0$، چون A^T رتبه ستونی کامل دارد، $u = (AA^T)^{-1}Ac$ ضرایب لاگرانژ یگانه مسأله است.

(۳) تعدیلی از روش ABS وجود دارد که در هر مرحله یک سطر وابسته خطی در ماتریس H_{i+1} را پیدا و حذف می‌کند (به [۱۲] نگاه کنید). با این رویه، H ماتریسهایی مستطیلی و رتبه کامل خواهند بود.

۳. حل دستگاه معادلات دیوفانتی و برنامه‌ریزی خطی صحیح

اکنون دستگاه معادلات دیوفانتی خطی

$$Ax = b, \qquad x \in \mathbb{Z}^n \tag{۱۸}$$

را، که در آن A یک ماتریس صحیح $m \times n$، $m \le n$، و b یک m-بردار صحیح است، در نظر بگیرید. قضیه زیر همراه با برخی نتایج مفید دیگر را در [۴] ارائه و اثبات کرده‌ایم (در این قضیه منظور از $\gcd(s_i)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک مؤلفه‌های s_i است).

قضیه. اگر در الگوریتم ABS داشته باشیم:

H_1 ، یک ماتریس صحیح تک مدولی دلخواه (ماتریس صحیح با قدر مطلق دترمینان برابر با ۱)،

z_i ، بردار صحیحی صادق در $s_i^T z_i = d_i$، که در آن $s_i = H_i a_i \neq 0$ و $d_i = \gcd(s_i)$، و

w_i ، یک بردار صحیح صادق در $s_i^T w_i = d_i$،

آنگاه

$$x = x_{i+1} + H_{i+1}^T q, \qquad q \in \mathbb{Z}^n$$

جواب صحیح عمومی i معادله اول دستگاه (۱۸) را به دست می‌دهد. □

بر اساس نتایج و ملاحظات فوق، الگوریتم ABS زیر برای حل دستگاه معادلات دیوفانتی خطی (۱۸) ارائه می‌شود [۴].

یک الگوریتم برای حل دستگاه معادلات دیوفانتی خطی

(۱) $x_1 \in \mathbb{Z}^n$ دلخواه، $H_1 \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ تک مدولی و دلخواه را اختیار کن . قرار ده $i = 1$، $r_1 = 0$.

(۲) محاسبه کن $t_i = a_i^T x_i - b_i$ و $s_i = H_i a_i$.

(۳) اگر ($s_i = \circ$ و $t_i = \circ$) آنگاه قرار ده $x_{i+1} = x_i$، $H_{i+1} = H_i$، $r_{i+1} = r_i$ و به قدم (۷) برو (معادله iام زاید است). اگر ($s_i = \circ$ و $t_i \neq \circ$) آنگاه متوقف شو (معادله iام و لذا دستگاه ناسازگار است).

(۴) $\{s_i \neq \circ\}$ محاسبه کن $d_i = \gcd(s_i)$. جهت جستجوی $p_i = H_i^T z_i$ را محاسبه کن، که در آن $z_i \in \mathbb{Z}^n$ یک بردار دلخواه صادق در شرط $z_i^T H_i a_i = z_i^T s_i = d_i$ است. اگر $d_i \nmid t_i$ آنگاه متوقف شو (معادله iام و لذا دستگاه به طور صحیح ناسازگار است)، در غیر این صورت محاسبه کن

$$\alpha_i = t_i / d_i$$

و قرار ده

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i p_i.$$

(۵) {بهنگام سازی H_i} H_i را با فرمول زیر به H_{i+1} بهنگام کن

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i a_i w_i^T H_i}{w_i^T H_i a_i}$$

که $w_i \in \mathbb{Z}^n$ یک بردار دلخواه صادق در شرط $w_i^T s_i = d_i$ است.

(۶) قرار ده $r_{i+1} = r_i + 1$.

(۷) اگر $i = m$ آنگاه متوقف شو (x_{m+1} یک جواب برای دستگاه است)، در غیر این صورت قرار ده $i = i + 1$ و به (۲) برو.

توجه: جواب عمومی دستگاه دیوفانتی (۱۸)، در صورت سازگار بودن، عبارت است از $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ که در آن $q \in \mathbb{Z}^n$ دلخواه است. چون $r_{m+1} =$رتبه(A) پس $n - r_{m+1} =$رتبه(H_{m+1}). برای دستگاههای صحیح همواره نمی‌توان ستونهای وابسته خطی H_{m+1}^T را حذف کرد و یک ماتریس پایه با رتبه کامل به دست آورد. در [۶و۴] شرایط لازم و کافی برای وجود و تعیین یک پایه صحیح آمده‌اند.

برنامه‌ریزی خطی صحیح با قیود تساوی

اکنون مسأله برنامه‌ریزی خطی صحیح

$$\max c^T x \quad : \quad Ax = b, \quad x \in \mathbb{Z}^n \tag{۱۹}$$

را در نظر بگیرید که در آن $c \in \mathbb{Z}^n$، $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ و $b \in \mathbb{Z}^m$. با استفاده از یک روش ABS (برای دستگاههای دیوفانتی) و فرض شدنی بودن قیود در (۱۹)، جواب عمومی صحیح دستگاه $Ax = b$ را

می‌توان به صورت $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ بیان نمود که $q \in \mathbb{Z}^n$ دلخواه است. با جایگذاری x در تابع هدف، مسأله (۱۹) هم‌ارز است با مسأله نامقید

$$\max(c^T x_{m+1} + c^T H_{m+1}^T q) \quad : \quad q \in \mathbb{Z}^n. \tag{۲۰}$$

اگر $H_{m+1}c = 0$، آنگاه x_{m+1} یک جواب بهینه برای (۱۹) است (در واقع برای هر $q \in \mathbb{Z}^n$، $x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q$ یک جواب بهینه است). اگر $H_{m+1}c \neq 0$، آنگاه واضح است که (۱۹) نامتناهی است و جواب ندارد.

توجه: همانند گذشته مورد $H_{m+1}c = 0$ معادل است با $A^T u = c$، برای برخی u (ضرایب لاگرانژ). اگرچه A و c صحیح هستند، ولی در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که جواب u برای دستگاه یک بردار صحیح باشد.

در بخش بعدی ابتدا نمایش عمومی جوابهای یک دستگاه نامعادلات خطی با رتبه سطری کامل را تعیین و سپس چگونگی حل مسائل برنامه‌ریزی خطی همراه با قیود نامساوی رتبه سطری کامل را ارائه می‌کنیم. (این نتایج در [۵] نیز آمده‌اند.)

۴. حل دستگاه نامعادلات و مسأله برنامه‌ریزی خطی

دستگاه نامعادلات خطی

$$Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{۲۱}$$

را، که در آن $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $m \leq n$، در نظر بگیرید. فرض کنید $m =$رتبه(A). تعیین جواب عمومی دستگاه (۲۱) با استفاده از روشهای ABS مورد نظر است. برای این منظور، بردار پارامتر $y = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$ و دستگاه معادلات خطی

$$Ax = y, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{۲۲}$$

را در نظر بگیرید. توجه داریم که x جواب (۲۱) است اگر و تنها اگر x در (۲۲) به ازای برخی $y \leq b$ صدق کند. بنابراین جوابهای (۲۱) را می‌توان از حل (۲۲) به ازای بردار پارامتر y با شرط $y \leq b$ به دست آورد.

اکنون فرض کنید که بردار پارامتر y، با $y \leq b$، در دست است. دستگاه (۲۲) را با استفاده از روشهای ABS حل می‌کنیم. برای این منظور، $x_1 \in \mathbb{R}^n$ و $H_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ نامنفرد و دلخواه را اختیار کنید. از خواص رده روشهای ABS، x_{i+1}، به ازای هر i، $1 \leq i \leq m$، در i معادله اول (۲۲) صدق می‌کند. چون به ازای $j \leq i$، $y_j \leq b_j$ پس x_{i+1} در i نامعادله اول (۲۱) نیز صدق می‌کند. در نتیجه

x_{m+1} جوابی برای نامعادلات (۲۱) خواهد بود. توجه داریم که x_{m+1} تابعی از بردار پارامتر y است، یعنی $x_{m+1} = x_{m+1}(y)$. بنابراین با تغییر بردار y، $y \leq b$، می‌توانیم تعداد بی‌شماری جوابهای به صورت $x_{m+1} = x_{m+1}(y)$ را برای (۲۱) به دست آوریم. در عین حال، نمایش صریح x_{m+1} به عنوان تابعی از بردار y معلوم نیست. دستیابی به چنین نمایشی را با استفاده از برخی نتایج جدید پی می‌گیریم.

فرض کنید $W_i = (w_1, \ldots, w_i)$ و $A_i = (a_1, \ldots, a_i)$. ماتریس $(W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1$ یک W_i-وارون چپ A_i نامیده و با $A_{W_i}^{-1}$ نشان داده می‌شود. از خواص رده روشهای ABS می‌دانیم که $W_i^T H_1 A_i$ یک ماتریس قویاً نامنفرد است [۲]؛ و به علاوه

$$H_{i+1} = H_1 - H_1 A_i (W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1 = H_1 - H_1 A_i A_{W_i}^{-1}. \qquad (۲۳)$$

بعداً به مقدار $\det(W_i^T H_1 A_i)$ (دترمینان) نیاز خواهیم داشت. لم زیر را برای تعیین مقدار این دترمینان معرفی و اثبات می‌کنیم.

لم ۱. به ازای هر i، $1 \leq i \leq m$، داریم:

$$\det(W_i^T H_1 A_i) = w_1^T s_1 \times \cdots \times w_i^T s_i,$$

که در آن $s_j = H_j a_j$، به ازای j، $1 \leq j \leq i$.

اثبات: به استقرا روی i عمل می‌کنیم. برای $i = 1$ داریم:

$$\det(W_1^T H_1 A_1) = \det(w_1^T H_1 a_1) = \det(w_1^T s_1) = w_1^T s_1.$$

فرض کنید $\det(W_i^T H_1 A_i) = w_1^T s_1 \times \ldots \times w_i^T s_i$. در این صورت

$$\begin{aligned} W_{i+1}^T H_1 A_{i+1} &= \begin{pmatrix} W_i^T \\ w_{i+1}^T \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} A_i & a_{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_i^T H_1 A_i & W_i^T H_1 a_{i+1} \\ w_{i+1}^T H_1 A_i & w_{i+1}^T H_1 a_{i+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} W_i^T H_1 A_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & (W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1 a_{i+1} \\ w_{i+1}^T H_1 A_i & w_{i+1}^T H_1 a_{i+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\det(W_{i+1}^T H_1 A_{i+1}) &= \det(W_i^T H_1 A_i) \times \left(w_{i+1}^T H_1 a_{i+1} - w_{i+1}^T H_1 A_i (W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1 a_{i+1}\right)\\ &= \det(W_i^T H_1 A_i) \times w_{i+1}^T \left(H_1 - H_1 A_i (W_i^T H_1 A_i)^{-1} W_i^T H_1\right) a_{i+1}\\ &= \det(W_i^T H_1 A_i) \times w_{i+1}^T H_{i+1} a_{i+1}\\ &= \det(W_i^T H_1 A_i) \times w_{i+1}^T s_{i+1}\\ &= w_1^T s_1 \times \ldots \times w_i^T s_i \times w_{i+1}^T s_{i+1}. \quad \square\end{aligned}$$

نتیجه ۱. w_iها را می‌توان به گونه‌ای اختیار کرد که برای هر i، $1 \le i \le m$، داشته باشیم:

$$\det(W_i^T H_1 A_i) > 0. \quad \square$$

قضیه زیر در [۹] ارائه شده است.

قضیه.

الف) بردار $A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i$، که در آن $\bar{y}_i = (y_1, \ldots, y_i)^T$، در i معادله اول (۲۲) صدق می‌کند.

ب) اگر $z_j = w_j$، به ازای هر j، $1 \le j \le i$، آنگاه جواب عمومی i معادله اول برای (۲۲) را می‌توان به صورت

$$x = A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i + (I - A_{W_i}^{-T} A_i^T) x_1 + H_{i+1}^T q \qquad (۲۴)$$

نوشت، که $q \in \mathbb{R}^n$ دلخواه است. $\square$

اگر H_1 یک ماتریس نامنفرد دلخواه باشد، آنگاه با توجه به (۲۳) خواهیم داشت:

$$H_1^{-1} H_{i+1} = I - A_i A_{W_i}^{-1}$$

لذا

$$A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i + (I - A_{W_i}^{-T} A_i^T) x_1 = A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i + H_{i+1}^T H_1^{-T} x_1.$$

بنابراین، با قرار

$$x_{i+1} = A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i + H_{i+1}^T H_1^{-T} x_1, \qquad (۲۵)$$

رابطه (۲۴) را می‌توان به صورت

$$x = x_{i+1} + H_{i+1}^T q, \qquad q \in \mathbb{R}^n \tag{۲۶}$$

نوشت.

توجه: $A_{W_i}^{-T}$ را می‌توان از فرایند بازگشتی

$$A_{W_1}^{-T} = \frac{H_1^T w_1}{w_1^T H_1 a_1},$$
$$A_{W_i}^{-T} = \left[\left(I - \frac{H_i^T w_i a_i^T}{a_i^T H_i^T w_i} \right) A_{W_{i-1}}^{-T} \quad , \quad \frac{H_i^T w_i}{a_i^T H_i^T w_i} \right],$$

و یا، چنانچه $w_i = z_i$، از فرایند

$$A_{W_1}^{-T} = \frac{p_1}{a_1^T p_1},$$
$$A_{W_i}^{-T} = \left[\left(I - \frac{p_i a_i^T}{a_i^T p_i} \right) A_{W_{i-1}}^{-T} \quad , \quad \frac{p_i}{a_i^T p_i} \right],$$

محاسبه نمود (برای مشاهده چگونگی استنتاج این روابط به [۹] مراجعه کنید). بدین ترتیب، شکل صریح جواب $x_{i+1} = x_{i+1}(\bar{y}_i)$ برای i معادله اول (۲۲) عبارت است از

$$x_{i+1}(\bar{y}_i) = A_{W_i}^{-T} \bar{y}_i + H_{i+1}^T H_1^{-T} x_1,$$

که در آن $\bar{y}_i = (y_1, \ldots, y_i)^T$.
نتیجتاً قضیه زیر ثابت شده است.

قضیه ۱. اگر در الگوریتم ABS، به ازای همه i، $w_i = z_i$ انتخاب شوند، آنگاه جواب عمومی دستگاه نامعادلات (۲۱) عبارت است از

$$x = x_{m+1} + H_{m+1}^T q, \qquad q \in \mathbb{R}^n, \tag{۲۷}$$

که در آن

$$x_{m+1} = A_{W_m}^{-T} y + H_{m+1}^T H_1^{-T} x_1 \tag{۲۸}$$

و $y \in \mathbb{R}^m$، $y \leq b$، دلخواه است به طوری که دستگاه (۲۲) سازگار است. □

تعریف: بردار $y \in \mathbb{R}^m$ را یک بردار پارامتر شدنی برای (۲۱) گوییم هرگاه $y \leq b$ و دستگاه (۲۲) سازگار باشد.

اکنون به تعیین روابطی بین ماتریس ضرایب A، ماتریس L، تبدیل ضمنی حاصل از اعمال روش ABS بر A، و بردارهای شدنی y می‌پردازیم. بنابر روش ABS می‌دانیم

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a_i^T x_i - y_i}{d_i} p_i,$$

که در آن $d_i = a_i^T p_i = a_i^T H_i^T z_i \neq 0$. چون z_i دلخواه است، بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که $d_i > 0$. قرار دهید $\alpha_i = (a_i^T x_i - y_i)/d_i$. در این صورت $y_i = a_i^T x_i - \alpha_i d_i$. چون $y_i \le b_i$ پس داریم $\alpha_i \ge (a_i^T x_i - b_i)/d_i$. بنابراین، $y_i = a_i^T x_i - \alpha_i d_i$، که در آن $d_i = a_i^T p_i > 0$ و $\alpha_i \ge (a_i^T x_i - b_i)/d_i$ دلخواه است. پس نتیجه می‌گیریم:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{a_{i-1}^T x_{i-1} - y_{i-1}}{d_{i-1}} p_{i-1} = x_{i-1} - \alpha_{i-1} p_{i-1} = \cdots = x_1 - \sum_{j<i} \alpha_j p_j,$$

و

$$y_i = a_i^T x_i - \alpha_i d_i = a_i^T x_i - \alpha_i a_i^T p_i = a_i^T (x_i - \alpha_i p_i) = a_i^T \left(x_1 - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j p_j \right).$$

چون به ازای $i < j$ داریم $a_i^T p_j = 0$، پس می‌توان نوشت $y_i = a_i^T (x_1 - P\alpha)$، که در آن $P = (p_1, \ldots, p_m)$ و $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^T$. بنابراین، هر بردار شدنی y به صورت

$$y = A(x_1 - P\alpha) = Ax_1 - L\alpha$$

نوشته می‌شود، که در آن $L = AP$ پایین مثلثی و نامنفرد، و $\alpha \in \mathbb{R}^m$ به گونه‌ای است که دستگاه نامعادلات

$$L\alpha \ge Ax_1 - b$$

برقرار است. بدین ترتیب قضیه ۲ نتیجه می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $x_1 \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه اولیه دلخواه برای شروع یک الگوریتم ABS با $w_i = z_i$، برای همه i، باشد و α برداری متشکل از α_iهای حاصل از قدمهای ABS باشد. بردار y برای دستگاه نامعادلات (۲۱) شدنی است اگر و تنها اگر

$$y = A(x_1 - P\alpha) = Ax_1 - L\alpha \tag{۲۹}$$

و

$$L\alpha \ge Ax_1 - b. \tag{۳۰}$$

اثبات: در بالا قضیه را برای y، یک بردار پارامتر شدنی، ثابت کرده‌ایم. برعکس، فرض کنید برای برخی x_1 داشته باشیم:

$$y = Ax_1 - L\alpha, \qquad L\alpha \geq Ax_1 - b.$$

پس داریم:

$$y = Ax_1 - L\alpha = Ax_1 - AP\alpha = A(x_1 - P\alpha),$$

یعنی، $x = x_1 - P\alpha$ در دستگاه (۲۲) صدق می‌کند. از طرف دیگر،

$$y = Ax_1 - L\alpha \leq Ax_1 - Ax_1 + b = b.$$

بنابراین، y یک بردار پارامتر شدنی برای نامعادلات (۲۱) است. □

ملاحظات:

(۱) بردارهای پارامتر شدنی y را می‌توان بر حسب یک بردار پارامتر شدنی مانند y^* بیان نمود. برای این منظور فرض کنید y^* یک بردار پارامتر شدنی باشد ($y^* = Ax_1 - L\alpha^*$ که $L\alpha^* \geq Ax_1 - b$). اگر $y = y^* - L\beta$، که در آن $L\beta \geq y^* - b$، آنگاه y یک بردار پارامتر شدنی است، زیرا اولاً $y = y^* - L\beta \leq b$ و ثانیاً دستگاه $Ax = y$ سازگار است، چون برد(A) $\ni y^*$ (بنا بر پارامتر شدنی بودن) و $L\beta = AP\beta \in$ برد(A). بر عکس، اگر y یک بردار پارامتر شدنی باشد، آنگاه

$$y = Ax_1 - L\alpha = y^* + L\alpha^* - L\alpha = y^* - L(\alpha - \alpha^*) = y^* - L\beta,$$

به ازای $\beta = \alpha - \alpha^*$، و

$$L\beta = L\alpha - L\alpha^* \geq Ax_1 - b - L\alpha^* = y^* - b.$$

(۲) اگر $b \geq 0$، آنگاه $y^* = 0$ یک بردار پارامتر شدنی است. در این حالت بردارهای پارامتر شدنی y به صورت $y = L\beta$ هستند که $L\beta \leq b$.

اکنون قرار دهید:

$$d = |\det(W_m^T H_1 A_m)| = |\det(W_m^T H_1 A^T)|$$

و

$$M = d\, A_{W_m}^{-T}.$$

برای سهولت، قرار دهید $H = H_{m+1}$. با توجه به قضیه ۲ و این که برد(H^T) =پوچ(A)، قضیه زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳. فرض کنید $A_{W_m}^{-T}$ ماتریس W_mـوارون A حاصل از کاربرد یک الگوریتم ABS با $w_i = z_i$، برای همه i، بر A و H ماتریس ابافی بدست آمده باشند و

$$M = |\det(W_m^T H_1 A^T)|\, A_{W_m}^{-T} = d\, A_{W_m}^{-T}.$$

در این صورت داریم:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} = \{A_{W_m}^{-T} b - M\gamma - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\}. \qquad (۳۱)$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} = \{x_1 - P\alpha - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, L\alpha \ge Ax_1 - b\}.$$

برای این منظور، $x \in \mathbb{R}^n$ را ابتدا به صورت $x = x_1 - P\alpha - H^T q$ ابراز می‌کنیم، که در آن $q \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}^m$ چنان است که $L\alpha \ge Ax_1 - b$. در این صورت داریم $Ax = Ax_1 - L\alpha \le b$.

بر عکس، فرض کنید x^* در $Ax \le b$ صدق کند. قرار دهید $y^* = Ax^*$. بنابراین دستگاه $Ax = y^*$ سازگار است. لذا، با توجه به الگوریتم ABS، به ازای برخی $q^* \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha^* \in \mathbb{R}^m$ می‌توان نوشت $x^* = x_1 - P\alpha^* - H^T q^*$. بدین ترتیب، $y^* = Ax^* = Ax_1 - L\alpha^*$. چون $y^* \le b$ پس α^* در دستگاه نامعادلات $Ax_1 - L\alpha \le b$ یا به طور معادل در $L\alpha \ge Ax_1 - b$ صدق می‌کند.

حال فرض کنید $z_i = w_i$، به ازای همه i. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \le b\}\\
&\quad = \{x_1 - P\alpha - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, L\alpha \ge Ax_1 - b\}\\
&\quad = \{x_1 - P\alpha - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, L\alpha = AP\alpha = Ax_1 - b + d\gamma, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\}\\
&\quad = \{x_1 - P\alpha - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m,\\
&P\alpha = A_{W_m}^{-T}(Ax_1 - b + d\gamma) + (I - A_{W_m}^{-T} A)x_1 + H^T q, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\}\\
&\quad = \{x_1 - A_{W_m}^{-T}(Ax_1 - b + d\gamma) - (I - A_{W_m}^{-T} A)x_1 - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\}\\
&\quad = \{A_{W_m}^{-T} b - M\gamma - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\}. \quad \square
\end{aligned}$$

توجه: به جای دستگاه نامعادلات (۲۱) می‌توانستیم دستگاه معادلات هم‌ارز

$$Ax + z = b,$$

را در نظر بگیریم که در آن $z \in \mathbb{R}_+^m$ یک بردار نامنفی است. با نوشتن دستگاه فوق به صورت $Ax = b - z$ و انتخاب $x_1 = 0$، جواب عمومی به صورت

$$x = A_{W_m}^{-T}(b - z) - H^T q, \qquad q \in \mathbb{R}^n$$

خواهد بود. حال همانند گذشته قرار دهید:

$$d = |\det(W_m^T H_1 A^T)|$$

و

$$M = d\, A_{W_m}^{-T}$$

با قرار $z = d\,\gamma$، که در آن $\gamma \in \mathbb{R}_+^m$، خواهیم داشت:

$$x = A_{W_m}^{-T} b - M\gamma - H^T q\,.$$

حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با رتبه سطری کامل

اکنون مسأله برنامه‌ریزی خطی

$$\max c^T x \quad : \quad Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{۳۲}$$

را، که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $m \leq n$، $m =$رتبه(A)، در نظر بگیرید. با توجه به قضیه ۳، این مسأله هم ارز است با

$$\min(c^T M\gamma + c^T H^T q) \quad : \quad \gamma \in \mathbb{R}_+^m \;,\; q \in \mathbb{R}^n. \tag{۳۳}$$

قرار دهید $\bar{c} = M^T c$ و

$$I^+ = \{i \mid \bar{c}_i > 0\},$$
$$I^- = \{i \mid \bar{c}_i < 0\},$$
$$I^\circ = \{i \mid \bar{c}_i = 0\}.$$

قضیه ۴. فرض کنید الگوریتم ABS همانند قضیه ۳ بر A اعمال شود. قرار دهید $x^* = A_{W_m}^{-T} b$.

(الف) اگر $Hc \neq 0$، آنگاه مسأله (۳۲) نامتناهی است و جواب ندارد.

(ب) اگر $Hc = 0$ و $I^- \neq \phi$، آنگاه مسأله (۳۲) نامتناهی است و جواب ندارد.

(ج) اگر $Hc = 0$ و $I^- = \phi$، آنگاه بینهایت جواب بهینه برای مسأله (۳۲) به صورت

$$x = x^* - H^T q + \sum_{j\in I^\circ} \gamma_j M e_j\,,$$

که در آن $q \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، $\gamma_j \geq 0$، $j \in I^\circ$، دلخواه و e_j، jامین بردار یکه در $\mathbb{R}^m$ است، وجود دارند.

اثبات:

(الف) با ملاحظه (۳۳) و اینکه $Hc \neq 0$، واضح است که q را می‌توان به دلخواه به گونه‌ای تعیین کرد تا مقدار تابع هدف به دلخواه کوچک شود.

با نمادهای معرفی شده در بالا مسأله (۳۲) را می‌توان به صورت

$$\min z = \sum_{j\in I^-} \bar{c}_j \; \gamma_j + \sum_{j\in I^+} \bar{c}_j \gamma_j + \sum_{j\in I^0} 0\,\gamma_j \quad : \quad \gamma_j \geq 0 \quad \forall\, j$$

بیان نمود.

(ب) چون $I^- \neq \phi$ پس $k \in I^-$ وجود دارد. در این صورت با انتخاب $\gamma = te_k$، $t \to \infty$، داریم $z \to -\infty$. بنابراین مسأله (۳۲) نامتناهی است و جواب ندارد.

(ج) داریم $I^- = \phi$. در این صورت $z = \sum_{j\in I^+} \bar{c}_j \gamma_j + \sum_{j\in I^0} 0\,\gamma_j$. مینیمم‌کننده‌های z به صورت $\gamma = \sum_{j\in I^0} \gamma_j e_j$ هستند که $\gamma_j \geq 0$، $j \in I^0$، اختیاری هستند. در نتیجه جوابهای بهینه (۳۲) به صورت $x = x^* - H^T q + \sum_{j\in I^0} \gamma_j M e_j$، که در آن $q \in \mathbb{R}^n$ و $\gamma_j \geq 0$، $j \in I^0$، اختیاری هستند. □

ملاحظات:

(۱) بنا ضبر خواص رده ABS، $HA^T = 0$ و بنابراین پوچی(H)=برد(A^T). شرط $Hc = 0$ معادل است با شرایط کیون تاکر $c = A^T u$، به ازای برخی بردار u. چون A^T رتبه ستونی کامل است پس u یکتا است. از طرفی دیگر، بردار $\frac{1}{d}\bar{c}$ در دستگاه $A^T u = c$ صدق می‌کند، زیرا سطرهای $A^{-1}_{W_m}$ مستقل خطی‌اند و جواب دستگاه $A^T u = c$ معادل است با جواب دستگاه $A^{-1}_{W_m} A^T u = A^{-1}_{W_m} c$ و نتیجتاً $u = A^{-1}_{W_m} c = \frac{1}{d}\bar{c}$. بنابراین، وقتی w_iها به گونه‌ای اختیار شوند که $d > 0$، آنگاه مؤلفه‌های $\bar{c}$ هم علامت با ضرایب لاگرانژ هستند. اگر $\bar{c} \not\geq 0$ آنگاه مسأله نامتناهی است و جواب ندارد. در این حالت توجه داریم که $u_i < 0$، برای $i \in I^-$، و $u_i \geq 0$، برای $i \notin I^-$. اگر $\bar{c} \geq 0$ آنگاه مسأله بینهایت جواب بهینه دارد. در این حالت، همانطور که از شرایط بهینگی انتظار می‌رود، $u_i \geq 0$، برای همه i.

(۲) با انتخاب $H_1 = I$، $z_i = w_i = e_i$، برای همه i، روش LU ضمنی در رده ABS به دست می‌آید. اسپدیکاتو و ابافی [۱۱] یک روش مبتنی بر روش LU ضمنی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود نامساوی ارائه کرده‌اند. در واقع، روش مزبور حالت خاصی از الگوریتم ارائه شده در اینجا است.

اکنون بر اساس ملاحظات و نتایج فوق، الگوریتم زیر برای حل مسأله برنامه‌ریزی خطی (۳۲) ارائه می‌شود.

یک الگوریتم برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با رتبه سطری کامل

(۱) بااستفاده از یک الگوریتم ABS ماتریسهای $A_{W_m}^{-T}$ و H را به دست آور. محاسبه کن:

$$d = |\det(W_m^T H_1 A^T)|,$$

$$M = d\, A_{W_m}^{-T}.$$

(۲) اگر $Hc \neq 0$ آنگاه توقف کن (مسأله نامتناهی است و جواب ندارد).

(۳) قرارده $\bar{c} = M^T c$ و مجموعه‌های

$$I^+ = \{i \mid \bar{c}_i > 0\},$$

$$I^- = \{i \mid \bar{c}_i < 0\},$$

$$I^0 = \{i \mid \bar{c}_i = 0\}$$

را تشکیل ده.

(۴) اگر $I^- \neq \phi$ آنگاه توقف کن (مسأله نامتناهی است و جواب ندارد).

(۵) $(I^- = \phi)$ محاسبه کن:

$$x^* = A_{W_m}^{-T} b.$$

جوابهای بهینه عبارتند از

$$x = x^* - H^T q + \sum_{j \in I^0} \gamma_j M e_j,$$

که در آن $q \in \mathbb{R}^n$، $\gamma_j \geq 0$، $j \in I^0$، دلخواه هستند. توقف کن.

در بخش بعدی نمایش عمومی جوابهای یک دستگاه نامعادلات دیوفانتی خطی را تعیین می‌کنیم و سپس با استفاده از این نمایش، مسائل برنامه‌ریزی خطی صحیح همراه با قیود نامساوی رتبه کامل را به مسائلی با تعداد متناهی جوابهای صحیح تبدیل می‌کنیم (برای بحث بیشتر [۷] را ملاحظه کنید.)

۵. حل دستگاه نامعادلات دیوفانتی خطی و برنامه‌ریزی صحیح با رتبه سطری کامل

دستگاه نامعادلات دیوفانتی خطی

$$Ax \leq b, \qquad x \in \mathbb{Z}^n \tag{۳۴}$$

را، که در آن $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ و $m \le n$، و $b \in \mathbb{Z}^m$ در نظر بگیرید. فرض کنید $m =$رتبه(A). مشابه با روش حل برای مسأله (۲۱)، جوابهای (۳۴) را می‌توان به کمک روشهای ABS (برای دستگاههای دیوفانتی خطی) محاسبه نمود. اساس کار مشابه بخش قبلی است، جز این که در این جا اعداد $(a_i^T x_i - y_i)/d_i$، با $d_i = a_i^T p_i > 0$، باید صحیح باشند. پس d_i یک مقسوم علیه $a_i^T x_i - y_i$ است، یعنی به ازای برخی عدد صحیح α_i داریم $a_i^T x_i - y_i = \alpha_i d_i$. لذا $y_i = a_i^T x_i - \alpha_i d_i$ و چون $y_i \le b_i$ پس $\alpha_i \ge (a_i^T x_i - b_i)/d_i$. بنابراین، قضیه زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیه ۵. بردارهای صحیح شدنی y برای دستگاه نامعادلات (۳۴) به صورت

$$y = A(x_1 - P\alpha) = Ax_1 - L\alpha \qquad (۳۵)$$

هستند که در آن $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ دلخواه و صادق در

$$L\alpha \ge Ax_1 - b \qquad (۳۶)$$

است. □

اکنون به نمایش نقاط صحیح چند وجهی $Ax \le b$ می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که هر نقطه صحیح x از این چند وجهی را می‌توان به صورت $x = \bar{x} - M\eta - H^T q$ نوشت که $q \in \mathbb{Z}^n$، $\eta \in \mathbb{Z}_+^m$ و $\bar{x}$ یک نقطه صحیح از حجره نیمه باز $\{A_{W_m}^{-T} b - M\lambda \mid 0 \le \lambda < \mathrm{e},\ \lambda \in \mathbb{R}^m\}$ است، که در آن 0 و e به ترتیب بردارهایی با تمام مؤلفه‌ها برابر 0 و 1 هستند. توجه داریم که $A_{W_m}^{-1} = (W_m^T H_1 A^T)^{-1} W_m^T H_1$. اگر $d = |\det(W_m^T H_1 A^T)|$ آنگاه $M = d\, A_{W_m}^{-T}$ یک ماتریس صحیح است. در لم ۱ دیدیم که چگونه مقدار d را محاسبه کنیم. نماد $\{\ldots\}_I$ را برای مجموعه نقاط صحیح در مجموعه $\{\ldots\}$ به کار می‌گیریم.

قضیه ۶. در یک الگوریتم ABS روی A، فرض کنید $w_i = z_i$، به ازای همه i. $x \in \mathbb{Z}^n$ در $Ax \le b$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $x = \bar{x} - M\eta - H^T q$ به ازای برخی $\eta \in \mathbb{Z}_+^m$ و $q \in \mathbb{Z}^n$، که در آن $\bar{x}$ یک نقطه صحیح از مجموعهٔ $\{A_{W_m}^{-T} b - M\lambda \mid 0 \le \lambda < \mathrm{e},\ \lambda \in \mathbb{R}^m\}$ است.

اثبات: با توجه به قضیه ۳ تساویهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} \\
&= \{A_{W_m}^{-T} b - M\gamma - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}_+^m\} \\
&= \{A_{W_m}^{-T} b - M\eta - M\lambda - H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n, \eta + \lambda = \gamma, \eta \in \mathbb{Z}_+^m, \lambda \in \mathbb{R}^m, 0 \le \lambda < \mathrm{e}\} \\
&= \{A_{W_m}^{-T} b - M\lambda \mid 0 \le \lambda < \mathrm{e}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}^m\} - \{M\eta \mid \eta \in \mathbb{Z}_+^m\} - \{H^T q \mid q \in \mathbb{R}^n\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\{x \in \mathbb{Z}^n |\ Ax \le b\}\\ &\quad = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}_I\\ &\quad = \{A_{W_m}^{-T} b - M\lambda \mid \circ \le \lambda < \mathrm{e}\}_I - \{M\eta \mid \eta \in \mathbb{Z}_+^m\} - \{H^T q \mid q \in \mathbb{Z}^n\}. \quad \square\end{aligned}$$

یک تبدیل برای مسائل برنامه‌ریزی خطی صحیح با قیود نامساوی رتبه کامل

مسأله برنامه‌ریزی صحیح

$$\max c^T x \quad : \quad Ax \le b, \quad x \in \mathbb{Z}^n \tag{۳۷}$$

را، که در آن $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$، $m \le n$، $m =$ رتبه(A)، $b \in \mathbb{Z}^m$ و $c \in \mathbb{Z}^n$ در نظر بگیرید. بنا بر قضیه ۶، x یک نقطه شدنی برای (۳۷) است هر گاه $x = \bar{x} - M\eta - H^T q$، به ازای برخی $q \in \mathbb{Z}^n$ و $\eta \in \mathbb{Z}_+^m$ که در آن $\bar{x}$ یک نقطه صحیح از

$$S(A,b) = \{A_{W_m}^{-T} b - M\lambda \mid \circ \le \lambda < \mathrm{e}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}^m\}$$

است. بنابراین

$$c^T x = c^T \bar{x} - c^T M\eta - c^T H^T q.$$

فرض کنید x^* یک جواب بهینه مسأله

$$\max c^T x \quad : \quad x \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n \tag{۳۸}$$

باشد. مشابه با حالت حقیقی، قضیه زیر در دست است ($\bar{c}$ ، I^+، I^- و I° همانند گذشته تعریف می‌شوند).

قضیه ۷. فرض کنید یک الگوریتم ABS، همانند قضیه ۶، بر ماتریس A اعمال شود. فرض کنید x^* یک جواب بهینه برای (۳۸) باشد.

(الف) اگر $Hc \ne \circ$، آنگاه مسأله (۳۷) نامتناهی است و جواب ندارد.

(ب) اگر $Hc = \circ$ و $I^- \ne \phi$، آنگاه مسأله (۳۷) نامتناهی است و جواب ندارد.

(ج) اگر $Hc = \circ$ و $I^- = \phi$، آنگاه بینهایت جواب بهینه برای مسأله (۳۷) به صورت

$$x = x^* - H^T q + \sum_{j \in I^\circ} \gamma_j M e_j\,,$$

که در آن $q \in \mathbb{Z}^n$ دلخواه، $\gamma_j \ge \circ$، $j \in I^\circ$، یک عدد صحیح دلخواه و e_j، jـامین بردار یکه در $\mathbb{R}^m$ است، وجود دارند. $\square$

اکنون به چگونگی تبدیل مسأله (۳۸) به یک مسأله معادل برنامه‌ریزی خطی دیگر، با تعداد متناهی جوابهای شدنی می‌پردازیم. فرض کنید $x \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n$. در این صورت به ازای برخی بردار λ، $0 \leq \lambda < e$، داریم $x = A_{W_m}^{-T} b - M\lambda$. چون $M = d\, A_{W_m}^{-T}$، پس $x = A_{W_m}^{-T}(b - d\lambda)$. بنابراین، x در دستگاه دیوفانتی $Ax = b - d\lambda$ صدق می‌کند. بدین ترتیب، مسأله (۳۸) معادل است با

$$\max c^T x \quad : \quad Ax = b - d\,\lambda, \ \ 0 \leq \lambda < e, \ \ x \in \mathbb{Z}^n, \qquad (۳۹)$$

که در آن $d = |\det(W_m^T H_1 A^T)|$. توجه داریم که تعداد جوابهای شدنی برای مسأله (۳۹) متناهی است. چون x و A صحیح هستند، پس $b - d\lambda$ نیز باید یک بردار صحیح باشد. توجه داریم که $b - d\,e < b - d\lambda \leq b$. چون بازه m بعدی $(b - d\,e, b]$ شامل حداکثر d^m نقطه صحیح است، پس حداکثر d^m بردار صحیح به صورت $b - d\,\lambda$، $0 \leq \lambda < e$ ، وجود دارند. در نتیجه تعداد نقاط صحیح شدنی برای مسأله (۳۹) حداکثر d^m است. پس مسأله برنامه ریزی صحیح (۳۷) معادل است با برنامه (۳۸) یا (۳۹). مشاهده می‌شود که تعداد جوابهای صحیح برای (۳۹) متناهی است، در حالی که تعداد جوابهای شدنی برای مسأله (۳۷)، در حالت کلی، نامتناهی است.

یک نقطه صحیح شدنی x متعلق به $S(A,b)$ را می‌توان به سادگی به دست آورد. می‌دانیم که هر نقطه $x \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n$ به صورت $x = A_{W_m}^{-T}(b - d\,\lambda)$ است، که در آن $0 \leq \lambda < e$. به ازای $i = 1, \ldots, m$، قرار دهید: $\lambda_i = \frac{b_i}{d} - \lfloor \frac{b_i}{d} \rfloor$. توجه کنید که $0 \leq \lambda < e$ و $b - d\,\lambda \in \mathbb{Z}^m$. از طرفی دیگر، چون M یک ماتریس صحیح است، پس داریم:

$$x = A_{W_m}^{-T}(b - d\,\lambda) = M(\frac{1}{d} b - \lambda) = M \lfloor \frac{b}{d} \rfloor \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n,$$

که در آن $\lfloor \frac{b}{d} \rfloor \in \mathbb{Z}^m$ نشان دهنده برداری با مؤلفه‌های $\lfloor \frac{b_i}{d} \rfloor$، $i = 1, \ldots, m$، است. از آنجا که مسائل (۳۸) و (۳۹) ساختارهای ویژه‌ای دارند، برای حل این مسائل می‌توان روشهای جستجوی مستقیم را، مانند روش اِچولز و کوپِر (به [۱۳] رجوع شود)، به کار گرفت.

ملاحظات:

(۱) مشابه با حالت حقیقی، $Hc = 0$ معادل است با شرایط کیون-تاکر $A^T u = c$، که جواب یگانه آن مضربی از $\bar{c} = M^T c$ است. توجه کنید که چون M و c صحیح هستند، $\bar{c}$ نیز یک بردار صحیح است، در حالی که عموماً نمی‌توان انتظار داشت که بردار ضرایب لاگرانژ $u = \frac{1}{d}\bar{c}$، صحیح باشد.

(۲) در [۴] نشان داده‌ایم که w_iها را می‌توان به گونه‌ای اختیار نمود که دترمینان فرم نرمال هرمیت ماتریس A برابر با دترمینان ماتریس L شود. بدین ترتیب، d را می‌توان با استفاده از قطریهای ماتریس L محاسبه نمود.

نتیجه‌ها

بر اساس روشهای ABS، الگوریتمهایی برای حل برخی مسائل نامساویها و برنامه‌ریزی خطی با قیود

تساوی یا قیود نامساوی رتبه کامل ارائه کردیم. با استفاده از روشهایی که اخیراً برای حل دستگاه معادلات دیوفانتی معرفی کرده‌ایم، به حل مسائل برنامه‌ریزی صحیح مقید به قیود تساوی پرداختیم. بر اساس روشهای ABS، رهیافت جدیدی برای حل نامعادلات خطی با رتبه سطری کامل ارائه کردیم و آن را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی مقید به قیود نامساوی با رتبه سطری کامل به کار بردیم. این رهیافت را به دستگاه نامعادلات دیوفانتی با رتبه سطری کامل تخصیص دادیم و روشی برای تعیین جوابهای عمومی بدست آوردیم. با استفاده از نتایج به دست آمده در حل نامعادلات دیوفانتی، مسأله برنامه‌ریزی صحیح با قیود نامساوی رتبه کامل را به مسئله‌ای با تعداد متناهی جوابهای شدنی صحیح تبدیل کردیم. سپس نشان دادیم که چگونه می‌توان یک جواب شدنی صحیح اولیه را برای این مسأله به دست آورد.

قدردانی

نویسندگان از حمایتهای مالی شورای پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف تشکر می‌کنند.

مراجع

[1] J. Abaffy, C.G. Broyden and E. Spedicato, “A class of direct methods for linear equations”, Numer. Math. 45,(1984), 361-376.

[2] J. Abaffy and E. Spedicato, ABS Projection Algorithms: Mathematical Techniques for Linear and Nonlinear Equations, Ellis Horwood, Chichester, (1989).

[3] E. Egervary, “On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations”, ZAMP 9,(1960), 376-386.

[4] H. Esmaeili, N. Mahdavi-Amiri and E. Spedicato, “A class of ABS algorithms for Diophantine linear systems”, Numerische Mathematik 90, (2001), 101-115.

[5] H. Esmaeili, N. Mahdavi-Amiri and E. Spedicato, “Explicit ABS Solution of a class of linear inequality systems and Lp problems”, submitted to Journal of Optimization Theory and Applications.

[6] H. Esmaeili, N. Mahdavi-Amiri and E. Spedicato,“Generating the integer null space and conditions for determination of an integer basis using the ABS algorithms”, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 27, No. 1, (2001), 1-18.

[7] H. Esmaeili, N. Mahdavi-Amiri and E. Spedicato, "ABS Solution of a class of Linear integer inequalities and integer LP problems", Optimization Methods and Software, Vol. 16, (2001), 179-192

[8] D. Goldfarb and A. Idnani, "A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programming", Math. Prog. 27,(1983), 1-33.

[9] S. Li, "On a variational characterization of the ABS algorithms", Communication at the Second International Conference on ABS Algorithms, Beijing, June 1995.

[10] G. Shi, "An ABS algorithm for generating nonnegative solutions of linear systems", Proceedings of the First International Conference on ABS Algorithms, Luoyang, September 1991, E. Spedicato (editor), University of Bergamo, 54-57.

[11] E. Spedicato and J. Abaffy, "On the use of the ABS algorithms for q some linear programming problems", Preprint, University of Bergamo, (1987).

[12] E.Spedicato and M. Zhu, "A reduced ABS type algorithm I: basic properties", Report DMSIA 10/94, University of Bergamo, (1994).

[13] H. A. Taha, Integer Programming, Theory, Applications and Computations, Academic Press, (1975).

[14] L. Zhang, "A method for finding a feasible point of inequalities", Proceedings of the First International Conference on ABS Algorithms, Luoyang, September 1991, E. Spedicato (editor), University of Bergamo, 131-137.

[15] L. Zhang, "An algorithm for the least Euclidean norm solution of a linear system of inequalities via the Huang ABS algorithm and the Goldfarb-Idnani strategy", Quaderni del Dipatimento di Mathematica, Statistica, Informatica ed Applicazioni, University of Bergamo, No. 95/2, (1995).

[16] J. Zhao, "ABS algorithms for solving linear inequalities", Quaderni del Dipartimento di Mathematica, Statistica, Informatica ed Applicazioni, University of Bergamo, No. 91/21, (1991).

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۹۵ تا ۱۰۶

بررسی وجود جواب تناوبی برای معادلات غیرخطی درجه دوم و سوم

بهمن مهری و محمد نیک سیرت

دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

پست الکترونیک: mehri@math.sharif.ac.ir

چکیده

در این مقاله شرایط کافی برای وجود جواب تناوبی برای دسته‌ای خاص از معادلات رسته دوم و سوم غیرخطی مورد بحث قرار می‌گیرد. به این منظور با استفاده از تابع گرین معادله فوق را به یک معادله انتگرالی تبدیل می‌کنیم و سپس از قضیه نقطه ثابت شاودر وجود جواب را در یک فضای باناخ مناسب نتیجه می‌گیریم. این روش هنگامی که عملگر فوق نقطه ثابت بدیهی داشته باشد چندان کارآ نیست. به این منظور در اینجا از روش دیگری مبتنی بر تابع لیاپونوف مناسب برای نشان دادن خاصیت نوسانی جوابها استفاده می‌شود که می‌تواند شرایط کافی برای وجود جواب تناوبی را به‌دست دهد. نتایج به‌دست آمده به سهولت به سیستمی از معادلات درجه دو و سه قابل تعمیم است. در نهایت یک سیستم نیز به صورت عددی شبیه‌سازی شده تا تحقق‌پذیری شرایط به دست آمده نشان داده شود.

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x'' + \phi(t)f(x,x') = e(t) \qquad (۱)$$

که در آن $\phi(t)$ و $e(t)$ توابع تناوبی هستند. همچنین فرض می‌کنیم توابع e, ϕ, f به اندازه کافی هموار هستند تا وجود و یکتایی جواب تضمین گردد. بسیاری از معادلات دیفرانسیل رسته دوم می‌توانند به صورت

معادله (۱) بازنویسی شوند [Stoker 1]. مشهورترین آنها معادله هیل است که در آن $f(x,x') = x$ و $e(t) \equiv 0$ و $\phi(t) = a + b\cos\omega t$ می‌باشد. بیهاری [Bihari 2,3] حالتهای خاصی از این معادلات را بررسی نمود و شرایطی را برای وجود جواب تناوبی آنها بدست آورد. قضایای نقطه ثابت مانند قضیه شاودر هنگامی که مبدأ نقطه ثابت بدیهی نباشد ممکن و مورد استفاده وسیع قرارگرفته است [Cronin 4, Lazer 5, Mehri and Niksirat 6]. وقتی $e(t) \equiv 0$ مبدأ جواب بدیهی است و قضایای فوق برای اثبات وجود جواب تناوبی غیربدیهی حول مبدأ چندان مفید نیستند.

ما در آغاز حالتی را بررسی می‌کنیم که $e(t)$ صفر نیست و قضیه شاودر را برای آن به کار می‌بریم. آنگاه وضعیت را برای گونه‌های مشخصی از $f(x,x')$ بررسی می‌کنیم که در آن $e(t) \equiv 0$ است. همچنین وضعیتی را بررسی می‌کنیم که در آن $x \in \mathcal{R}^n$ که اجازه می‌دهد سیستمهای فیزیکی در حالت کلی خود مدلسازی شوند. تعمیم نتایج برای معادلات رسته سوم نیز در ادامه داده می‌شود. آنچه در اینجا حایز اهمیت است آن است که خواص توپولوژیکی که برای صفحه وجود دارد و اجازه می‌دهد قضیه پوآنکاره-بندیکسون قابل اعمال باشد در فضا وجود ندارد. به این منظور ما از روش توپولوژیکی دیگری که برای معادلات خودگران مطرح نمودیم [Mehri and Niksirat 7] استفاده می‌کنیم. در ادامه ما از نماد $I_\omega = [0,\omega]$ استفاده می‌کنیم و همچنین نرم زیر را به کار می‌بریم:

$$|u(t)|_t = \max_{t\in I_\omega}|u(t)|$$

لم ۱ فرض کنید توابع e,ϕ توابع پیوسته برحسب t و $f(x,x')$ برحسب آرگومانهای خود پیوسته باشد. به علاوه برای یک ثابت L در یک دامنه $D(d)$ داشته باشیم:

$$|||f(x,x')| < L(|x|+|x'|)$$

که در آن

$$D(d) = \{(x,x')||x| \le d, |x'| \le d\}$$

آنگاه $f(x,x')$ در I_ω کراندار است.

اثبات با در نظرگرفتن تابع

$$V = \frac{x^2 + {x'}^2}{2}$$

برای یک d_0 مناسب و ثابت c خواهیم داشت:

$$\frac{dV}{dt} \le cV \tag{۲}$$

که خود کراندار بودن $x(t)$ را در I_ω نتیجه می‌دهد. اکنون تابع گرین $G(t,s)$ با شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$x'(0) = x(\omega) = 0 \tag{۳}$$

که داریم:

$$G(t,s)=\begin{cases} s-\omega & \circ\leq t\leq s\leq\omega \\ t-\omega & \circ\leq s\leq t\leq\omega \end{cases}$$

لم ۲ فرض کنید جوابی از معادله (۱) وجود دارد که در شرایط مرزی (۳) صدق می‌کند و به علاوه داشته باشیم:

$$\begin{cases} f(-x,x')=-f(x,x') \\ f(x,-x')=f(x,x') \\ \phi(-t)=\phi(t) \\ e(۲\omega-t)=e(t-۲\omega)=-e(t) \end{cases} \quad (۴)$$

آنگاه معادله (۱) جواب تناوبی ۴ω خواهد داشت.

اثبات اثبات آن با گسترش جواب از I_ω به $I_{۴\omega}$ به صورت زیر سرراست است:

$$z(t)=\begin{cases} x(t) & \circ\leq t\leq\omega \\ -x(۲\omega-t) & \omega\leq t\leq ۲\omega \\ -x(t-۲\omega) & ۲\omega\leq t\leq ۳\omega \\ x(۴\omega-t) & ۳\omega\leq t\leq ۴\omega \end{cases} \quad (۵)$$

وجود جوابی از معادله (۱) در I_ω که در شرایط مرزی (۳) صدق کند از قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱ اگر e,ϕ,f پیوسته و $k\omega$ در لم ۲ به اندازه کافی کوچک باشد آنگاه یک جواب غیربدیهی از معادله (۱) در I_ω وجود دارد که شرایط مرزی (۳) را ارضا می‌کند.

اثبات فضای باناخ زیر را در نظر بگیرید:

$$B=\{X=(x(t),x'(t))\in D(d_\circ)|x'(\circ)=x(\omega)=\circ\}$$

و نرم زیر را در آن تعریف کنید:

$$||\cdot||_B=|x(t)|_t+|x'(t)|_t$$

همچنین عملگر $\Gamma=(UX(t),U_tX(t))$ روی B را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\begin{aligned} UX(t) &= \int_\circ^\omega G(t,s)e(s)-\phi(s)f(s) \\ U_tX(t) &= \int_\circ^\omega G_t(t,s)e(s)-\phi(s)f(s) \end{aligned}$$

که در آن $G_t(t,s)$ مشتق G برحسب t است. آشکار است که

$$U_tX(\circ) = UX(\omega) = \circ$$

و داریم

$$\begin{aligned} |UX(t)|_t &\leq \omega^{۲}(k+lM) \\ |U_tX(t)|_t &\leq \omega(k+lM) \end{aligned}$$

که در آن

$$M = \|f(x,x')\|; k = |e(t)|_t; l = |\phi(t)|$$

پس Γ فضای B را داخل خود می‌نگارد و از قضیه شاودر نتیجه می‌شود که عملگر Γ حداقل یک نقطه ثابت در B دارد که شرایط مرزی (۳) را ارضا می‌کند.

قضیه فوق به دلیل حضور یک نرم تناوبی $e(t)$ که باعث می‌شود معادله (۱) جواب بدیهی صفر نداشته باشد جواب غیربدیهی تناوبی را بدست می‌دهد. هنگامی که این نرم وجود نداشته باشد نقطه ثابت می‌تواند به نقطه بدیهی تحویل گردد. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$x'' + \lambda\phi(t)f(x)h(x^{۱}) = \circ \tag{۶}$$

که $\phi(t)$ یک تابع $۲\omega-$ تناوبی است و $\mathrm{Sig}\ \phi'(t)$ در I_ω ثابت است و $\lambda > \circ$ می‌باشد. به علاوه فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} uf(u) > \circ \\ f(-u) = -f(u) \\ \phi(-t) = \phi(t) \\ h(u) > \circ \end{cases} \tag{۷}$$

با فرض $M = \max\phi(t)$ و $m = \min\phi(t)$ نشان داده می‌شود که جواب معادله (۶) جایی بین جوابهای معادله زیر قرار دارد:

$$x'' + \lambda\omega f(x)h(x') = \circ; \qquad \omega = m, M \tag{۸}$$

اکنون توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \nu^-(x,x',t) &= H(x') + \lambda\phi(t)F(x) \\ \nu^+(x,x',t) &= \tfrac{۱}{\phi(t)}H(x') + \lambda F(x) \end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن

$$\begin{aligned} H(x') &= \int_\circ^{x'} \tfrac{u}{h(u)}du \\ F(x) &= \int_\circ^{x} f(u)du \end{aligned}$$

دیده می‌شود که توابع ν^- و ν^+ مثبت بوده و در مبدأ صفر هستند. مشتق آنها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\nu^{-'} &= \lambda\phi'(t)F(x)\\ \nu^{+'} &= \tfrac{\lambda\phi'(t)}{\phi^{2}(t)}H(x^{1})\end{aligned}$$

که متناوباً با تغییر علامت $\phi'(t)$ مثبت و منفی می‌شود و این نشان می‌دهد که جواب معادله (۶) نوسانی است. همچنین مشهود است که x' برای شرایط مرزی (۳) وقتی $x > 0$ است منفی باقی می‌ماند و این خود الزام می‌کند که جواب معادله (۶) حول $x = 0$ نوسانی باشد. اکنون نشان می‌دهیم که λ مشخصی وجود دارد که جواب را تناوبی سازد. می‌دانیم جواب معادله (۸) نوسانی است و پریود آن به علت انتگرال زیر متناسب با λ است:

$$\int \frac{dx}{H^{-1}(\lambda\omega(F(x(0)) - F(x)))} = t \qquad (۱۰)$$

که در آن پریود با محاسبه انتگرال در $x = 0$ به دست می‌آید. فرض کنید اولین نقطه صفر $x(t)$ را با t_z نشان دهیم. آشکار است که $t_z = t_z(\lambda)$ در نتیجه با تغییر مناسب λ، یک فاصله شامل ω توسط t_z جارو می‌شود. در نتیجه وجود دارد λ که $t_z = \omega$ و این الزام می‌کند که معادله (۶) با شرایط (۷) جواب تناوبی داشته باشد زیرا جواب به دست آمده روی I_ω را به طریق مشابه آنچه در لم ۲ گفته شده به شکل تناوبی به $I_{4\omega}$ می‌توان گسترش داد. این واقعیت که جواب معادله (۶) جایی بین جوابهای معادله (۸) با همان شرایط اولیه قرار دارد به سادگی قابل بررسی است. درواقع می‌خواهیم نشان دهیم:

$$t_{z,M} < t_{z,\phi} < t_{z,m} \qquad (۱۱)$$

که در آن $t_{z,\omega}$ اولین نقطه صفر جواب معادله (۸) است و $t_{z,\phi}$ اولین نقطه صفر معادله (۶) برای شرایط مرزی (۳) و $x(0) \neq 0$ می‌باشد. آشکار است که $H(x') \leq M(F(x(0)) - F(x))$ چون $\nu' < 0$ و $M > \phi(t)$ در نتیجه $H(x'_\phi) < H(x'_M)$ و آنگاه $x'_\phi > x'_M$ که خود نتیجه می‌دهد $x_\phi > x_M$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $x_\phi > x_m$ و در نتیجه نامساوی (۱۱) نتیجه می‌شود.

اکنون به جای λ فرض کنید $x(0)$ به عنوان یک پارامتر در انتگرال (۱۰) در نظر باشد. اگر انتگرال مزبور برای $x = 0$ به گونه‌ای وابسته به $x(0)$ باشد آنگاه استدلال فوق‌الذکر در این حالت نیز برقرار خواهد بود. به علاوه باید بررسی شود که آیا t_z فاصله‌ای شامل ω را جارو می‌کند یا خیر. آشکار است که H^{-1} وجود دارند که آن را برآورده نمی‌سازند مانند $H^{-1}(u) = \sqrt{u}$ که برای آن t_z به هیچگونه وابسته به $x(0)$ نیست. در واقع داریم $\sqrt{\lambda\omega t} = \arcsin \frac{x}{x(0)}$ و در نتیجه $t_z = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\omega}}$. نتایج فوق به آسانی برای سیستمی از معادلات مرتبه دوم نیز قابل اعمال است. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$X'' + \Phi(t)G(X, X') = E(t), X \in \mathcal{R}^n \qquad (۱۲)$$

که $\Phi(t), E(t)$ توابع 2ω و 4ω هستند و G یک تابع برداری است. آنچه که ما برای تحقق شرایطی برای وجود جواب تناوبی برای معادله (۱۲) لازم داریم تعریف یک فضای باناخ و عملگر جدید روی آن است.

با فرض $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ما آن را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\sum = \{\sum = (X(t), X'(t)) \in D(d_0) | X'(0) = X(\omega) = 0\}$$

که در آن D به صورت زیر است:

$$D(d) = \{(X, X') | \|X\| \le d, \|X'\| \le d\}$$

و d_0 چنان است که برای یک ثابت L روی $D(d_0)$ داریم:

$$\|F(X, X')\| < L(\|X\| + \|X'\|)$$

نرم روی $\sum$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\|\cdot\|_{\sum} = \|X(t)\|_t + \|X'(t)\|_t$$

که در آن

$$\|\cdot\|_t = \max_{t \in I_\omega}\{|\omega_1(t)|, \dots, |\omega_n(t)|\}$$

و عملگر $\Lambda = (U\sum, U_t\sum)$ روی $\sum$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} U\textstyle\sum(t) &= \int_0^\omega G(t,s)\{E(s) - \Phi(s)G(s)\}ds \\ U_t\textstyle\sum(t) &= \int_0^\omega G_t(t,s)\{E(s) - \Phi(s)G(s)\}ds \end{aligned} \tag{۱۳}$$

مشابه آنچه در لم و قضیه ۱ انجام دادیم برای این حالت نیز شرایط کافی برای وجود جواب تناوبی قابل بررسی است. تابع $V = V(X, X')$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + {x'}_i^2$$

و در نتیجه برای یک ثابت c داریم:

$$\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i x' + x_i' x_i'' \le cV \tag{۱۴}$$

که نتیجه می‌دهد $X(t)$ و $X'(t)$ روی I_ω کراندار هستند. استدلالی مشابه با آنچه در قضیه ۱ انجام شد وجود یک جواب غیربدیهی با شرایط مرزی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$X'(0) = X(\omega) = 0 \tag{۱۵}$$

قضیه ۲ سیستم (۱۲) جواب تناوبی 4ω دارد اگر $g_i(X, X')$ نسبت به x_i فرد باشد و نسبت به آرگومانهای دیگر خود زوج باشد و داشته باشیم:

$$\begin{aligned} &\phi_i(-t) = \phi_i(t) \\ &e_i(t - 2\omega) = e_i(2\omega - t) = -e_i(t) \end{aligned}$$

همچنین می‌توان همان روشی را که برای معادله (۶) انجام دادیم، در این حالت وقتی $E(t) \equiv 0$ و $G(X, X') = f(X)h(X')$ است نیز انجام دهیم. برای این منظور توابع V^+ و V^- و بردار $\Lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ را همراه با $M_i = \max \phi_i(t)$ و $m_i = \min \phi_i(t)$ در نظر می‌گیریم که در آن

$$\begin{aligned} V^+ \ni \nu_i^+ &= \tfrac{1}{\phi_i(t)} H_i(X') + F_i(X) \\ V^- \ni \nu_i^- &= H_i(X') + \phi_i(t) F_i(X) \end{aligned}$$

و برای آن داریم

$$\begin{aligned} H_i(X') &= \int_0^{x_i'} \frac{u}{h_i(\cdots, u, \cdots)} du \\ F_i(X) &= \int_0^{x_i} f_i(\cdots, u, \cdots) du \end{aligned}$$

اکنون سیستم زیر را برای $w_i = M_i, m_i$ در نظر بگیرید:

$$x_i'' + \lambda_i w_i f(X) H(X') = 0$$

استدلالی مشابه آنچه برای حالت اسکالر انجام شد کفایت می‌کند تا وجود بردار مشخص Λ را که جوابهای سیستم فوق را تناوبی می‌سازد، نتیجه بگیریم. در واقع در این حالت برای هر ω_i یک دامنه کراندار λ_i وجود دارد که t_z متناظر آن فاصله‌ای شامل ω را جارو می‌کند. اما چیزی که در اینجا بیشتر جالب به نظر می‌رسد تلقی $X(0)$ به عنوان پارامتر است. چون هر تغییری در یکی از مؤلفه‌های آن روی کل جواب تأثیر خواهد داشت. در این حالت اگر انتگرال

$$N(X(0), X) = \int \frac{dx}{H_i^{-1}(\Lambda\omega(F_i(x(0)) - F_i(x)))} \tag{۱۶}$$

به گونه مناسبی وابسته به $x_i(0)$ باشد آنگاه استدلالی مشابه با حالت اسکالر وجود جواب تناوبی را نتیجه می‌دهد. چیزی را که در این حالت نیاز داریم آن است که نشان دهیم $\frac{\partial N}{\partial x_i(0)}|_{X=0} \neq 0$. همچنین کافی است که نشان دهیم $N(X(0), 0)$ وقتی $X(0)$ به عنوان پارامتر تلقی می‌شود جواب $N_i(X^*(0), 0) = \omega, i = 1, \cdots, n$ داشته باشد.

باید توجه داشت خواص توپولوژیکی صفحه استدلال‌های فوق را ممکن ساخته است. تعریف تابع لیاپونف برای معادلات مرتبه سوم زیر

$$x''' + \phi(t) f(x') h(x, x'') = 0 \tag{۱۷}$$

در حالت کلی امکان‌پذیر نیست. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x''' + \lambda\phi(t)f(x')h(x,x'') = ۰ \qquad (۱۸)$$

که در آن $x \in \mathcal{R}^n$ و f, h توابع برداری و ϕ ماتریس قطری مثبت، $\phi_i(t) > ۰$ و $\lambda > ۰$ یک پارامتر است. فرض کنید که k یک ماتریس قطری مثبت و $k_*, k^*, \hat{k}$ به ترتیب مینیمم، ماکزیمم و متوسط درایه‌های ماتریس k باشد و تعریف می‌کنیم $T_۱ = \frac{\pi}{۴\sqrt{\lambda k}}$ و $T_۲ = ۳T_۱$. همچنین برای بردار B تعریف می‌کنیم $|B|_\infty = \max_i |B_i|$ و $\Omega_b = \{B||B|_\infty < b\}$. در ادامه ما از درجه براور برای نشان دادن نقطه صفر برای نگاشت $x'(t)$ استفاده می‌کنیم [Cronin 4,Lloyd 8].

قضیه ۳ اگر ثابت b و ماتریس k چنان وجود داشته باشد که

$$\begin{array}{l} \frac{۴}{۹} < \frac{k_i}{\hat{k}} \; \frac{۹}{۴} \\ \delta b > \frac{۲S}{\sqrt{\lambda} k_*^{۳/۲}} \end{array} \qquad (۱۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \delta &= \min_i \cos\sqrt{\lambda k_i}T, T = T_۱, T_۲ \\ S &= \max_{t\in I_\omega} |kx' - \phi(t)f(x')h(x,x'')|_D \end{aligned}$$

و دامنه D به صورت زیر:

$$D = \{(x,x',x'')|, |x|_\infty \le b(۱+\pi), |x'|_\infty \le \sqrt{\lambda k^*}|x|_\infty, |x''|_\infty \le \lambda k^* |x|_\infty\}$$

آنگاه $x'(\omega_۰) = ۰$ که $\omega_۰$ نصف پریود $\phi(t)$ است.

اثبات جواب معادله (۱۸) به صورت زیر است:

$$x(t) = (\sin\sqrt{\lambda k}t)B + k^{-۱}\int_۰^t u(t-s)(kx'(s) - \phi(s)f(x'(s))h(x(s),x''(s))ds$$

که در آن $u(t-s) = ۱ - \cos\sqrt{\lambda k}(t-s)$ است. از (۱۹) نتیجه می‌شود که برای $t \in [۰, ۴T_۱]$ داریم $(x(t),x'(t),x''(t)) \in D$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$d[(\cos\sqrt{\lambda k}T_۱)B, \Omega_b, ۰].d[(\cos\sqrt{\lambda k}T_۲)B, \Omega_۲, ۰] = -۱$$

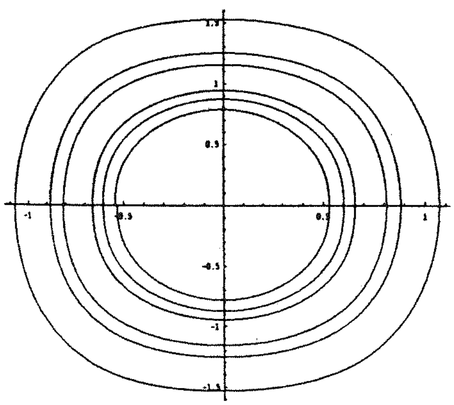
که در آن $d[f,\Omega,p]$ نشان دهنده درجه براور نگاشت f در دامنه Ω نسبت به p است. همچنین آشکار است که $x'(t)$ با $(\cos\sqrt{\lambda k}t)B$ هموتوپیک است. در نتیجه داریم:

$$d[x'(T_۱), \Omega_b, ۰].d[x'(T_۲), \Omega_b, ۰] = -۱$$

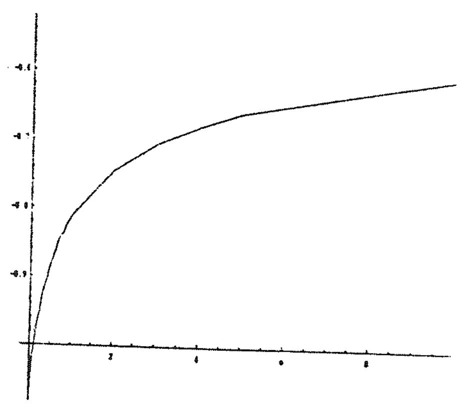
در نتیجه بنابر اصل پایایی هموتوپیک درجه توپولوژیکی، ω وجود دارد که $x'(\omega) = ۰$ و چون $b > ۰$ آنگاه $x'(t)$ غیر بدیهی است. این ω وابسته به λ است. بسیار آسان است که نشان فقط یک ω در

$t \in [0, 4T_1]$ وجود دارد که در آن $x' = 0$. این از آنجا ناشی می‌شود که $t \in [0, T_1]$ و $x'(t) > 0$ و $x'(t) < 0, t \in [T_2, 4T_1]$ و $x''(t) < 0, t \in I_\lambda$ که $I_\lambda = [T_1, T_2]$. اکنون با تغییر I_λ توسط تغییر λ برای هر $x'_i(t)$ یک فاصله شامل ω_0 جارو می‌شود.

برای برقراری شرایط وجود جواب تناوبی برای معادله (۱۸) ما از شرایط مشابه سیستم رسته دوم استفاده می‌کنیم یعنی ϕ و h نسبت به آرگومانهای خود زوج باشند و f نسبت به آرگومان خود فرد باشد. همچنین آشکار است که $\int_0^{4\omega_0} x'(t)dt = 0$ است پس $x(t)$ نیز تناوبی است. نشان داده می‌شود که هر معادله از رسته‌های بالاتر از رسته سوم به‌صورت مناسبی به‌صورت سیستم‌های رسته دوم و سوم قابل تبدیل است [Mehri and Niksirat 7]. در این صورت اگر $L(x)$ یک معادله درجه n تناوبی باشد آنگاه برای دفورمیشنهای کوچک با شرایط مناسب از نظر زوج و فرد بودن، معادله مزبور جواب تناوبی خواهد داشت. شرایط زوج و فرد بودن را نیز می‌توان با شرایط دیگری جایگزین ساخت [Mehri and Niksirat 9].



شکل ۱. نمودار مدارهای متناوب برای ϵهای متفاوت



شکل ۲. نمودار $\epsilon - x(0)$

مثال سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x'' + \phi_۱(t)f_۱(x) + \phi_۲(t)f_۲(y) = e_۱(e) \\ y' + \phi_۳(t)f_۳(y) + \phi_۴(t)f_۴(x) = e_۲(t) \end{cases} \qquad (۲۰)$$

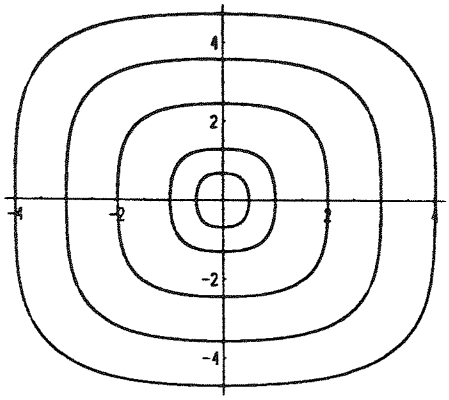
که در آن $(\phi_i(t))$ و $e_i(t)$ توابعی تناوبی و مثبت در I_ω هستند. به‌علاوه فرض کنید:

$$|f_i(u)| \le L_i|u|$$
$$f_i(-u) = -f_i(u)$$
$$\phi_i(-t) = \phi_i(t)$$
$$e_i(-t) = -e(t)$$

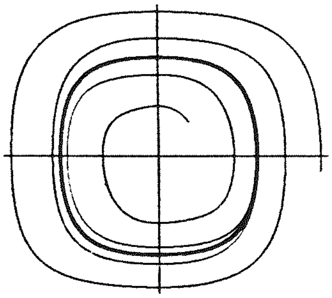
که در آن L_i یک مقدار ثابت است، آنگاه آشکار است که جواب معادله (۲۰) در I_ω کراندار است. در واقع آن را می‌توان با استفاده از تابع زیر و مشتق آن در جهت جوابهای (۲۰) نشان داد:

$$V(x,y) = x'^۲ + x^۲ + y'^۲ + y^۲$$

مشابه آنچه در قضیه ۲ انجام شد در اینجا نیز برای برقراری شرایط وجود جواب تناوبی امکان‌پذیر است.



شکل ۳. نمودار مدارهای متناوب برای مقادیر ایده‌آل متفاوت



شکل ۴. مسیرهای وابسته به λهای متفاوت

برای تحلیل عددی یک سیستم مشخص، معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x'' + (۲ + \cos \pi t)\frac{x}{۱ + \epsilon x'^{۲}} = \cos ۰.۵\pi t \qquad (۲۱)$$

معادله (۲۱) شرایط قضیه ۱ را برآورده می‌سازد و در نتیجه جواب تناوبی دارد، شکل ۱ را ببینید. به‌علاوه مدارهای آن نسبت به ϵ برای $\epsilon \geq ۰$ پیوسته هستند. در واقع انتگرال

$$x(t,\epsilon) = \int_{۰}^{\omega} G(t,s)\{\cos ۰ \cdot ۵\pi t - (۲ + \cos \pi t)\frac{x(s,\epsilon)}{۱ + \epsilon x'^{۲}(s,\epsilon)}\}ds$$

نسبت به ϵ پیوسته است. وقتی ϵ در معادله (۲۱) شروع به افزایش می‌کند شرایط اولیه‌ای که متناظر جوابهای تناوبی است منحنی مطابق شکل ۲ را می‌سازد.

اکنون معادله (۲۱) را در نظر بگیرید که در آن طرف دوم متحد صفر و $\epsilon = ۱$ است. برای هر شرایط اولیه‌ای وجود دارد $\lambda = ۰$ که معادله:

$$x'' + \lambda_{۰}(۲ + \cos(\pi t))\frac{x}{۱ + x'^{۲}} = ۰$$

یک جواب تناوبی مطابق آنچه در شکل ۳ دیده می‌شود دارد. همانگونه که در شکل ۴ دیده می‌شود برای هر شرایط اولیه سه شاخه بسته به مقدار λ تولید می‌شود. برای $\lambda < \lambda_{۰}$ مسیر داخل مدار تناوبی متناظر با $\lambda_{۰}$ و برای $\lambda > \lambda_{۰}$ مسیر خارج آن قرار می‌گیرد. اما آشکار است که این مسیرها پایدارند به این معنی که از مبدأ واگرا نیستند و به مبدأ نیز جذب نمی‌شوند و این به دلیل خاصیت نوسانی $\phi(t)$ است. همچنین آشکار است که $\lambda_{۰}$ نسبت به شرایط اولیه به علت پیوستگی جوابها به شرایط اولیه، پیوسته است.

مراجع

[1] Stoker J. J., *Nonlinear vibration in mechanical and electrical systems*, Interscience Publisher, (1950).

[2] Bihari I., *On periodic solutions of certain second order ordinary differential equations with periodic coefficients*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12, (1961), 11-16.

[3] Bihari I., *Periodic solutions of some second order nonlinear differential equations with periodic coefficients*, ordinary and partial differential equations, Lecture Notes in Math. 1151, Springer, Berlin, (1985), 49-59.

[4] Cronin J., *Fixed point and topological degree in nonlinear analysis*, math survey II, American Mathematical Society, (1964).

[5] Lazer A. C., *On Schauder's fixed point theorem and forced second order nonlinear oscillation*, J. Math. Anal., 21, pp. 421-425, (1968).

[6] Mehri B. and Niksirat M., *On the existence of periodic oscillation for vector nonlinear second order system*, Proc. of 28th annual Iranian mathematics conference, (1997).

[7] Mehri B. and Niksirat M., *The existence of periodic solutions for the nonlinear autonomous ODEs,* Nonlinear Analysis Forum, Vol. 5, (2000), 163-171.

[8] Lloyd N.G. *Degree theory*, Cambridge University Press, (1978).

[9] Mehri B. and Niksirat M. *On the existence of periodic solutions for the quasi-linear third order ODE.,* to be published in J. Math. Anl. App.

گزارش همایش ماهانهٔ انجمن ریاضی ایران

جلد اول(۱۳۸۱)، صص. ۱۰۷ تا ۱۲۷

مروری بر فرایندهای زیرجمعی، قضیهٔ ارگودیک، و چند کاربرد

محمدقاسم وحیدی اصل

گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

پست الکترونیک: m-vahidi@cc.sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، به اجمال، بر دو جریان فکری که در بسط نظریهٔ احتمال نوین تأثیرگذار بوده‌اند، مرور می‌کنیم. نخستین آنها، که با کارهای لاپلاس، پواسون، و کوشی آغاز می‌شود، از طریق مکتب روسی احتمال به دستاوردهای ارزنده‌ای منجر می‌شود که قانون اعداد بزرگ کولموگوروف، ۱۹۳۳، در رأس آنها قرار دارد. دومین آنها که شروع آن با استفاده کلاؤسیوس از نظریهٔ احتمال در فیزیک، و به ویژه با تأکید ماکسول بر ناگزیربودن چنین استفاده‌ای رقم می‌خورد، نهایتاً به اثبات قضیه ارگودیک توسط بیرکهوف، در سال ۱۹۳۲، منجر می‌شود. قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، که در چارچوب فرآیندهای تصادفی مانا بیان شده باشد، تلقی کرد، مشروط بر اینکه از قانون ۰ـ۱ کولموگوروف نیز استفاده کنیم.

در ادامه، این موضوع را مورد بحث قرار می‌دهیم که چگونه یک مسأله واقعی کاربردی، یعنی پرکولاسیون نخستین گذر، موجب پدید آمدن قضیه ارگودیک فرآیندهای زیر جمعی گردید. این قضیه، که در صورت اصلی توسط کینگمن در سال ۱۹۶۸ تدوین و اثبات شد، دو نتیجه اساسی قبلی، یعنی قضیه ارگودیک بیرکهوف و قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف را، به عنوان دو نوع، شامل می‌شود.

در پایان چند کاربرد عمده قضیهٔ ارگودیک فرآیندهای زیر جمعی، از جمله پیشرفتهای اخیر در نظریهٔ پرکولاسیون نخستین گذر و نیز فرایندهای پوشانش، ارائه می‌شوند.

۱. مقدمه

دو جریان فکری سهمی ارزنده در بسط نظریهٔ احتمال داشته‌اند. نخستین آنها که از نیمهٔ اول سدهٔ هجدهم آغاز می‌شود، پایه در اندیشه‌ها و کارهای پیشگامانی چون لاپلاس، پواسون، و کوشی دارد و از اندیشهٔ فلسفی غالب در دورهٔ آغازین نظریهٔ احتمال، مبنی بر جهانشمول بودن مفهوم استقلال تأثیر پذیرفته است. میزان این تأثیرپذیری در حدی است که مؤلفان این دوره (عمدتاً تا پایان سدهٔ نوزدهم) ذکری از این فرض اساسی در کارهای خود به عمل نمی‌آورند. تنها در چند اثر لاپلاس است که ایدهٔ وابستگی از نوع مارکوفی جلوهٔ مختصری پیدا می‌کند (گنه دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲). اوج دستاوردهای این گروه را می‌توان قضیه‌ای موسوم به قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) منسوب به کولموگوروف دانست. برای بیان این قضیه فرض می‌کنیم که X_1، X_2، . . .، X_n، . . . دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که X_n، برای هر n، تابعی اندازه‌پذیر از Ω به R باشد به طوری که برای هر زیرمجموعهٔ متناهی $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، و مجموعه‌های بورل B_1، . . .، B_k در R،

$$P(X_{i_1} \in B_1, \ldots, X_{i_k} \in B_k) = \Pi_{j=1}^{k} P(X_{i_j} \in B_j). \qquad (1)$$

تساوی (۱)، شرط استقلال متغیرهای تصادفی X_{i_1}، . . .، X_{i_k} را بیان می‌کند. به علاوه برای هر n، $n \geq 1$،

$$P_{X_n}(B) = P_{X_1}(B) \qquad (2)$$

که در آن

$$P_{X_n}(B) = P(X_n \in B) = P(\{w : X_n(w) \in B\})$$

توزیع متغیر تصادفی (یا اندازهٔ احتمال القاشده به وسیلهٔ) X_n نامیده می‌شود.

قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) کولموگوروف بیان می‌کند که وقتی $n \to \infty$، دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, n = 1, 2, \ldots \right\}$ تقریباً به طور حتم به عدد

$$\mu = E[X_1] = \int_{\Omega} X \, dP$$

میل می‌کند.

دومین جریان فکری با کاربرد احتمال، احتمالاً برای نخستین بار توسط کلاسیوس[1] (۱۸۲۲_۱۸۸۸)، و به ویژه ماکسول[2] (۱۸۳۱_۱۸۷۹) در فیزیک آغاز می‌شود و با اثبات قضیهٔ ارگودیک به وسیلهٔ بیرکهوف

1) R. Clausius 2) J.C.Maxwell

به اوج خود می‌رسد. برای ماکسول روشهای نظریهٔ احتمالاتی ضروری بود، زیرا هم‌چنان که خود در سال ۱۸۷۵ نوشته است، محاسبهٔ سرعت یک مولکول تنها، غیر ممکن است (گنه‌دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲).

دوره‌ای نو در کاربرد نظریهٔ احتمال در فیزیک، مشخصاً در نظریهٔ جنبشی گازها، با بولتسمان (۱۸۴۴_۱۹۰۶) اتریشی شروع می‌شود که اصطلاح "ارگودیک" هم به وسیلهٔ او وضع شده است. وی در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۱ متذکر شد که دست کم برخی گزاره‌ها در ترمودینامیک باید با مجاز داشتن ملاحظات تصادفی اثبات شوند. در سال ۱۸۷۱، حین مطالعهٔ قانون انرژی جنبشی مولکولها (در ارتباط با تکمیل نظریهٔ ماکسول دربارهٔ قانون توزیع سرعتهای مولکولی) و تابعی معین از این توزیع اعلام کرد که "مسائل نظریهٔ مکانیکی گرما در عین حال مسائل نظریهٔ احتمال‌اند" (گنه‌دنکو و شی‌نین، ۱۹۹۲).

برای بیان قضیهٔ بیرکهوف به دو تعریف مقدماتی نیازمندیم. فرض کنید که $(\Omega,\mathcal{F},P)$ یک فضای احتمال و T تبدیلی از Ω به Ω باشد. T را اندازه‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر A در $\mathcal{F}$، $T^{-1}(A)=\{w:T(w)\in A\}\in\mathcal{F}$. تبدیل اندازه‌پذیر T از Ω به Ω را اندازه نگهدار[1] می‌نامیم هرگاه برای هر A در $\mathcal{F}$، $P(T^{-1}A)=P(A)$. پیشامد A در $\mathcal{F}$ را ناوردا می‌نامیم هرگاه $T^{-1}A=A$. خانواده مجموعه‌ای ناوردا یک σـ میدان تشکیل می‌دهند.

در مطالعهٔ سیستمهای دینامیکی، Ω فضای فاز سیستم است و اگر w وضعیت سیستم در $t=0$ باشد، آنگاه وضعیت آن در زمان t توسط $T_t(w)$ داده می‌شود که در آن $T_t:\Omega\to\Omega$ حرکت[2] فضای فاز به خود آن است که به وسیلهٔ معادلات حرکت، القا شده است. برای یک سیستم محافظه کار، $T_t\left(T_\tau(w)\right)=T_{t+t}(w)$. با گسسته‌سازی و اختیار $T=T_1$، وضعیت سیستم در زمان n با $T^n(w)$ داده می‌شود. فرض کنید که $X(w)$ تابعی قابل مشاهده از وضعیت w باشد. از نظر فیزیکی، در انجام اندازه‌گیریها، زمان مشاهده در مقایسه با مقیاسی طبیعی از زمان برهم کنشهای مولکولی، کاملاً طولانی است. بنابراین ما نه $X(w)$، بلکه میانگین $X(w)$ها را روی وضعیتهای گوناگونی که w با تکامل سیستم از آنها عبور می‌کند، یعنی

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau X\left(T_t(w)\right)dt$$

را برای τهای بزرگ، یا در زمان گسسته،

$$\frac{1}{n}\sum_1^n X\left(T^{k-1}(w)\right)$$

را اندازه‌گیری می‌کنیم. گیبس[3] (۱۸۳۹_۱۹۰۳) این استدلال هوشمندانه را به عمل آورد که: در طی زمان، نقطهٔ $w_t=T_t(w)$ به تمامی فضای فاز سرکشی می‌کند و اینکه چگالی نقاط w_t در هر همسایگی به یک توزیع حدّی میل می‌کند. به‌طور شهودی، این توزیع حدّی نقاط، می‌بایست تحت T ناوردا باشد. اگر

1) measure-preserving 2) motion 3) Gibbs

چنین توزیع حدّی، مثلاً اندازه‌ای مانند P، موجود باشد آنگاه باید بتوانیم به جای میانگین زمانی حدّی

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X\left(T^{k-1}(w)\right)$$

میانگین فازی

$$\int_{\Omega} X(w)P(dw)$$

را قرار دهیم. نتیجهٔ بیرکهوف آن بود که این استدلال، در صورتی که به‌طور مناسب فرمولبندی شود، درست است (برایمن، ۱۹۶۸).

بیان احتمالاتی قضیهٔ بیرکهوف به این شرح است:

فرض کنید که T بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ اندازه نگهدار باشد. دراین‌صورت برای هر متغیر تصادفی X به‌طوری که $E||X|| < \infty$،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k-1} X\left(T^{k}(w)\right) = E[X|\mathcal{I}] \qquad a.s.$$

در اینجا $\mathcal{I}$، σـمیدان مجموعه‌های ناوردا و $E[X|\mathcal{I}]$، امید ریاضی شرطی X به شرط $\mathcal{I}$، یعنی (بنابر قضیهٔ رادون ـ نیکودیم) تابع اندازه‌پذیر (نسبت به $\mathcal{I}$) یکتایی $(a.e.)$ بر Ω است به‌طوری که برای هر A در $\mathcal{I}$

$$\int_A X\,dP = \int_A E[X|\mathcal{I}]\,dP.$$

نتیجه‌ای از این قضیه آن است که اگر T ارگودیک باشد، یعنی اگر برای هر A در $\mathcal{I}$، $P(A) = 0$ یا $P(A) = 1$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X\left(T^{k}(w)\right) = E[X] \qquad a.s.$$

یعنی حد مقداری ثابت دارد.

می‌توان با تعریف یک فرایند مانا بر اساس تبدیل اندازه نگهدار T به قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، بیشتر صورت احتمالاتی داد. فرض کنید که برای هر w در Ω،

$$X_1(\Omega) = X(w), X_2(w) = X\left(T(w)\right), \ldots, X_n(w) = X\left(T^{n-1}(w)\right), \ldots.$$

در این صورت دنبالهٔ متغیرهای تصادفی $\{X_n(w), n = 1, 2, \ldots\}$ یک فرایند تصادفی ماناست، یعنی برای هر k، فرایند X_{k+1}، X_{k+2}، . . . همان توزیع را دارد که فرایند X_1، X_2، . . . . به عبارت دیگر برای کلیهٔ مقادیر حقیقی x_1، . . .، x_n، و هر عدد صحیح مثبت k،

$$P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) = P(X_{k+1} \le x_1, \ldots, X_{k+n} \le x_n).$$

برای بیان قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف به زبان فرایندهای مانا، ابتدا تعریفی از پیشامدهای ناوردا را در این چارچوب ارائه می‌کنیم: پیشامد $A \in \mathcal{F}$ را ناوردا می‌نامیم هرگاه $\exists B \in \mathcal{B}_\infty$ به‌طوری که برای هر n، $n \geq 1$،

$$A = \{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}.$$

در اینجا $\mathcal{B}_\infty$ کوچکترین σ- میدان شامل مستطیلهای اندازه‌پذیر از زیرمجموعه‌های R^∞، یعنی مجموعهٔ کلیهٔ زیردنباله‌های اعداد حقیقی است. هر مستطیل اندازه‌پذیر چنین تعریف می‌شود:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\}.$$

در اینجا B_1، ...، B_n زیرمجموعه‌ای بورل Rاند.

ثابت می‌شود که دراین حالت نیز مجموعهٔ کلیهٔ پیشامدهای ناوردا یک σ- میدان تشکیل می‌دهد. در این صورت قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف دارای برگردان زیر در چارچوب فرایندهای ماناست:

اگر X_1، X_2، ... یک فرایند مانا و $\mathcal{I}$، σ- میدان پیشامدهای ناوردا باشد، آنگاه، به شرطی که $E[|X_1|] < \infty$،

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to E[X_1|\mathcal{I}], \qquad a.s.$$

این قضیه شباهت بیشتری با قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع) دارد. اما باید توجه کرد که حد حاصل در قانون قوی اعداد بزرگ، عددی ثابت است در حالی که در قضیهٔ ارگودیک، حدّ حاصل یعنی $E[X|\mathcal{I}]$، متغیری تصادفی است. البته سادگی نتیجه در قانون قوی اعداد بزرگ، به بهای فرض استقلال به دست آمده است، در حالی که در قضیهٔ ارگودیک عملاً تنها همتوزیعی (به تبع فرض مانایی) حاکمیت دارد.

حال اگر فرایند X_1، X_2، ... ارگودیک باشد، یعنی هر پیشامد ناوردا دارای احتمال ۰ یا ۱ باشد، آنگاه حدّ حاصل مقداری ثابت دارد. به عبارت دیگر، به نظر می‌رسد قانون قوی اعداد بزرگ (حالت مستقل و همتوزیع)، نتیجه‌ای از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف باشد. در واقع چنین هم هست، اما ثابت بودن حد، وقتی X_1، X_2، ... دنباله‌ای مستقل و همتوزیع است، مستلزم استفاده از قضیه‌ای موسوم به قانون ۰ — ۱ کولموگوروف است. به عبارت دیگر برای ورود به قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف از راه قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف، و اعلام آن به عنوان نتیجه‌ای از این، باز هم به مجوزی از طرف کولموگوروف نیازمندیم!

قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف در سال ۱۹۳۲ و قانون قوی اعداد بزرگ کولموگوروف (حالت مستقل و همتوزیع) در سال ۱۹۳۳ منتشر شده‌اند. بنابراین دو جریان فکری متفاوت، اولی با تأکید بر نظریه و دیگری با تأکید بر کاربرد، حدوداً در یک زمان به یکی از درخشانترین نتایج در نظریهٔ احتمال، که مبنای علوم تجربی است، رسیده‌اند. در چارچوب کلاسیک، در زمینهٔ قانون قوی اعداد بزرگ، تنها یک گام فراتر از کولموگوروف برداشته شده است و آن ارائه برهانی مقدماتی از سوی اعتمادی (۱۹۸۱)، ریاضیدان ایرانی، و با فرضی ضعیفتر است؛ یعنی قرار دادن فرض استقلال دو به دو به جای فرض استقلال کامل. گر چه به گفتهٔ دادلی

(۱۹۸۹) به ندرت با دنباله‌هایی از متغیرهایی تصادفی روبه‌رو می‌شویم که دو به دو مستقل باشند ولی کاملاً مستقل نباشد، اما نکتهٔ جالب در اینجاست که قضیهٔ اعتمادی نه از قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف نتیجه می‌شود و نه از قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی که قانون قوی اعداد بزرگ و قضیهٔ ارگودیک هر دو نتیجه‌هایی از آن‌اند (هانس و هالس، ۱۹۹۸). بنابراین نتیجهٔ اعتمادی لوای استقلال جریان فکری اول را هم چنان برافراشته نگه داشته است.

نکتهٔ مهمتر اینکه بر خلاف انتظار قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، که در بخش آتی به آن می‌پردازیم، محصول کار ریاضیدانی که در اندیشهٔ به هم پیوستن دو جریان فکری مورد بحث در بالا و تعمیم قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف باشد، نیست. بلکه فرایندهای زیرجمعی و قضیهٔ ارگودیک آنها، نتیجهٔ یک کار پژوهشی کاربردی اصیل، یعنی نظریهٔ پرکولاسیون است. در بخش ۲ توضیح مختصری از سابقه و شرح مسأله ارائه می‌شود و پس از تعریف فرایندهای تصادفی زیرجمعی به بیان قضیهٔ ارگودیک این فرایندها و سیر تحولاتی که قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی با آنها رو به رو بوده، می‌پردازیم و در بخش ۳ چند کاربرد اصلی از این قضیه مطرح می‌شوند.

۲. از نظریهٔ پرکولاسیون و فرایندهای زیرجمعی به قضیهٔ ارگودیک

در خصوص آغاز نظریهٔ پرکولاسیون دو روایت مختلف وجود دارد. برخی مانند اشتوفر (۱۹۸۵) مؤسسان این نظریه را فلوری و استاک‌ـ مایر می‌دانند که در جنگ جهانی دوم از آن برای توصیف این پدیده که چگونه مولکولهای شاخه‌ای کوچک با اتصالهای شیمیایی بیشتر و بیشتر، کلان مولکولهای بزرگتر و بزرگتری تشکیل می‌دهند استفاده کردند. این فرایند پلیمری شدن می‌تواند منجر به تشکیل ژلاتین، یعنی شبکه‌ای از اتصالهای شیمیایی شود که کل سیستم را در هم می‌تند. به زعم اشتوفر، فلوری و استاک مایر نظریه‌ای را پدید آوردند که می‌توان آن را نظریهٔ پرکولاسیون روی شبکهٔ بته[1] (یا درخت کیلی[2]) نامید. اما اغلب نویسندگان (کستن، ۱۹۸۲، گریمت، ۱۹۹۷، افروس، ۱۹۸۶) آغازگران این نظریه را برودبنت و همرزلی و مقالهٔ سال ۱۹۵۷ آنها می‌دانند. برودبنت در نیمه‌های دههٔ ۱۹۵۰ در انجمن تحقیقاتی بهره‌برداری زغال سنگ بریتانیا در طراحی ماسکهای گاز برای استفاده در معادن زغال سنگ به کار مشغول بود. وی به مسأله جالبی برخورد و آن را برای همرزلی ریاضیدان مطرح کرد.

جزء اصلی ماسک گاز با دانه‌های کربن پر می‌شود که گاز باید در آن جریان پیدا کند. کربن منفذهایی دارد که به نحو پیچیده‌ای با هم مرتبط‌اند و نوعی ماز پیچ در پیچ تشکیل می‌دهند. گاز با جذب شدن در سطح داخلی منفذها می‌تواند به آنها وارد شود. معلوم شد که اگر منفذها گشاد، و خوب با هم مرتبط باشند، گاز در عمق صافی کربن نفوذ می‌کند. در غیر این صورت گاز نمی‌تواند از سطح خارجی کربن فراتر رود. جریان گاز در داخل این ماز فرایند جدیدی به شمار می‌آید که با فرایند انتشار تفاوت دارد.

برودبنت و همرزلی این پدیده را پرکولاسیون نامیدند، و به نظریه‌ای که زمینه‌ساز این نوع فرایند است، نظریهٔ

1) Bethe 2) Caley

پرکولاسیون گویند. خود همرزلی در مقاله‌ای با عنوان سر آغازهای نظریهٔ پرکولاسیون (۱۹۸۳)، تاریخچهٔ آغاز این نظریه و وجه تسمیهٔ آن را بیان می‌کند.

پس از آنکه برودبنت و همرزلی مقالهٔ پیشگام خود را در سال ۱۹۷۵ منتشر کردند، معلوم شد که نظریهٔ پرکولاسیون را می‌توان برای تعبیر و تفسیر انواع گوناگون پدیده‌های فیزیکی و شیمیایی به کار برد. خواص الکتریکی سیستمهای بی‌نظم، نظیر نیم‌رساناهای بلورین دارای ناخالصی، و موادی که از ترکیب یک عایق و فلز تشکیل می‌شود، احتمالاً بهترین کاربردهای شناخته شدهٔ نظریهٔ پرکولاسیون به شمار می‌آیند.

نظریهٔ پرکولاسیون، پدیده‌های بحرانی را به بهترین وجه توصیف می‌کند. صفت ممیزهٔ آنها وجود یک نقطهٔ بحرانی است که در آن برخی از خاصیتهای سیستم دستخوش تغییرات بحرانی می‌شوند. برای توصیف ریاضی این نظریه، فرض کنید که مشبکهٔ مربعی به عنوان اولین تقریب برای ساختار منافذ در هم پیچیده یا ماز صافی کربن ماسک گاز به کار رود. به عبارت دیگر گراف (نامتناهی) با مجموعهٔ رأسهای $V = \mathcal{Z}^۲$ از نقاط با مختصات صحیح در صفحه را در نظر بگیرید و فرض کنید که هر دو رأس $(z_۱, z_۲)$ و $(z'_۱, z'_۲)$ به هم متصل باشند اگر و تنها اگر

$$|z_۱ - z'_۱| + |z_۲ - z'_۲| = ۱.$$

گراف حاصل، یعنی مشبکهٔ مربعی، را با $\mathcal{L}^۲ = (V, E)$ نشان دهید. حال برای وارد کردن احتمال، فرض کنید که p و q در $۰ \leq p \leq ۱$ و $p + q = ۱$ صدق کنند. هر ضلع $e \in E$ را با احتمال p "باز" و در غیر این صورت "بسته" اعلام می‌کنیم. باز یا بسته بودن هر ضلع، مستقل از وضعیت دیگر اضلاع است. به‌طور صوری، فضای احتمال زیر را در نظر می‌گیریم. فضای نمونه‌ای Ω را $\Omega = \prod_{e\in E}\{۰, ۱\}$ اختیار می‌کنیم که اعضای آن با $w = \Big(w(e) : e \in E\Big)$ نمایش داده شده و پیکربندیها[1] نامیده می‌شوند. مقدار $w(e) = ۰$ متناظر با بسته بودن ضلع e و $w(e) = ۱$ متناظر با باز بودن ضلع e است. $\mathcal{F}$ را کوچکترین σ-میدان متشکل از زیرمجموعه‌های Ω شامل استوانه‌های متناهی بعدی اختیار می‌کنیم. سرانجام اندازهٔ حاصلضرب با چگالی p را بر $(\Omega, \mathcal{F})$ در نظر می‌گیریم. این اندازه عبارت است از

$$P_p = \prod_{e\in F} \mu_e$$

که در آن μ_e اندازهٔ برنولی بر $\{۰, ۱\}$ است، به‌طوری که $\mu_e\Big(w(e) = ۰\Big) = q$ و $\mu_e\Big(w(e) = ۰\Big) = p$.

یک کمیت مورد توجه در نظریهٔ پرکولاسیون، احتمال بحرانی $\theta(p)$ است که عبارت است از احتمال اینکه رأسی مفروض به خوشه‌ای نامتناهی، یعنی مؤلفه‌ای همبند متشکل از ضلعهای باز، تعلق داشته باشد. با توجه به ناوردایی نسبت به انتقال مشبکهٔ $\mathcal{L}^۲$ و اندازهٔ احتمال P_p، می‌توان این رأس را، بی‌آنکه از کلیت چیزی کاسته شود، مبدأ مختصات اختیار کنیم. بنابراین

$$\theta_p = P_p(\text{مبدأ مختصات به خوشه‌ای نامتناهی تعلق دارد}).$$

1) Configurations

حال احتمال بحرانی

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}$$

را تعریف کنید. اگر $p < p_c$، هیچ خوشهٔ نامتناهی موجود نیست و هر ضلع باز حداکثر به مؤلفهٔ متناهی همبندی متعلق است. اگر $p > p_c$، مبدأ به یک (و تنها یک) خوشهٔ نامتناهی تعلق دارد. یکی از درخشانترین نتایج دههٔ ۱۹۸۰ پاسخ دقیق و نهایی به حدس بسیار مورد مباحثهٔ $p_c = \frac{1}{2}$ برای مشبکهٔ $\mathcal{L}^2$ به وسیلهٔ کستن (۱۹۸۰) بود. برای آشنایی تفصیلی با نظریهٔ پرکولاسیون، مشاهدهٔ روشها و فن‌ها و گنجینه‌هایی از مسائل باز می‌توان به چندین تک نگاری، و به ویژه به کستن (۱۹۸۲) و گریمت (۱۹۹۷)، و البته هزاران مقالهٔ پژوهشی، مراجعه کرد. بیانی ساده و با گرایش فیزیکی از نظریهٔ پرکولاسیون، به زبان فارسی، در افروس (۱۹۸۶) آمده است.

مدل مورد بحث از نظریهٔ پرکولاسیون، پرکولاسیون برنولی نامیده می‌شود. در سال ۱۹۶۵ همرزلی و ولش در مقاله‌ای بنیادین، مدل جدیدی از پرکولاسیون را با نام پرکولاسیون نخستین گذر بنیان نهادند. در مدل پرکولاسیون برنولی، که در قیاس با پرکولاسیون نخستین گذر، پرکولاسیون معمولی نیز نامیده می‌شود، فرض بر آن است که "مایعی" که از مبدأ وارد مشبکهٔ $\mathcal{L}^2$ (یا هر گراف زمینه‌ای دیگر) می‌شود، با احتمال p اجازه عبور از ضلع e را دارد (ضلع باز است) و با احتمال q به مسیری مسدود برخورد می‌کند. در پرکولاسیون نخستین گذر فرض می‌شود که به هر ضلع e در E "مختص زمانی" [1] تصادفی $T(e)$ نسبت داده می‌شود که آن را زمان لازم برای عبور مایع از (یک سر به سر دیگر) ضلع e تلقی می‌کنیم. فرض می‌کنیم که خانوادهٔ $\Big(T(e) : e \in E\Big)$ از مختصهای زمانی، متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل اما همتوزیع با توزیع مشترک F باشند. برای هر مسیر π، یعنی دنباله‌ای متناوب از رأس‌ها و ضلع‌ها که از رأسی شروع و به رأسی ختم می‌شوند، زمان گذر $T(\pi)$ از π را با

$$T(\pi) = \sum_{e \in \pi} T(e)$$

تعریف می‌کنیم که در آن مجموع‌یابی روی کلیهٔ مختصهای زمانی اضلاع π انجام می‌شود. زمان نخستین گذر $a(x, y)$ بین رأس‌های x و y با

$$a(x, y) = \inf\{T(\pi) : \text{مسیری از } x \text{ به } y \text{ است } \pi\}$$

داده می‌شود. بنابراین $a(x, y)$ مدت لازم برای "خیس شدن" y است در صورتی که در لحظهٔ شروع، مایع در x وارد سیستم شده باشد.

همرزلی و ولش از جمله فرایند زمان نخستین گذر

$$a_{mn} = a(e_m, e_n), \quad -\infty < m \leq n < \infty$$

1) time coordinate

را که در آن $e_m = (m, \circ)$ و $e_n = (n, \circ)$ در نظر گرفتند. فرایند $\{a_{mn}\}$ از جمله واجد خاصیت زیرجمعی است. زیرا اگر r عددی صحیح باشد به‌طوری که $m \leq r \leq n$، آنگاه چون $a_{mr} + a_{rn}$ کوچکترین زمان لازم برای رفتن از $e_m = (m, \circ)$ به $e_n = (n, \circ)$ به شرط این است که همهٔ مسیرها از نقطهٔ $e_r = (r, \circ)$ عبور کنند، بنابراین طبق تعریف،

$$a_{mn} \leq a_{mr} + a_{rn}, \quad -\infty < m \leq r \leq n < \infty. \qquad (۳)$$

از دیگر خاصیتهای عمدهٔ خانوادهٔ $(a_{mn} : m \leq n)$ از متغیرهای تصادفی، خاصیت مانایی است، به عبارت دیگر دو خانوادهٔ $(a_{mn} : m \leq n)$ و $(a_{m+1,n+1} : m \leq n)$ دارای توزیع‌های متناهی بعدی یکسان هستند. بدین ترتیب بود که همرزلی و ولش تولد فرایندهای زیرجمعی را اعلام کردند.

در بدو امر، با استخراج امید ریاضی از طرفین نابرابری (۳) و استفاده از مانایی فرایند، درمی‌یابیم که با $g_n = E(a_{\circ n})$،

$$g_{m+n} \leq g_n + g_m, \quad m, n \in \mathbb{N}. \qquad (۴)$$

در نتیجه همرزلی و ولش قالبی کلیتر برای نظریهٔ تابع‌های زیرجمعی (هیله و فیلیپس، ۱۹۵۷) فراهم آوردند. به موجب این نظریه، حدّ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g_n}{n} = \gamma$$

موجود است به‌طوری که

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{g_n}{n}.$$

آنها γ را "ثابت زمانی" فرایند نامیدند.

همرزلی و ولش با در نظرگرفتن قیدهایی، در قالب تعریفهایی که اکنون منسوخ شده است، به نتایجی در مورد فرایند پرکولاسیون نخستین گذر $(a_{mn} : m \leq n)$ دست یافتند. از جمله ثابت کردند که (همرزلی و ولش، ۱۹۶۵، ص.۶۸) اگر فرایند $(a_{mn} : m \leq n)$ در شرط

$$P\Big(\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{\circ n}}{n} \leq \gamma\Big) = 1$$

صدق کند که در آن γ ثابت زمانی است، آنگاه

$$P\Big(\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{\circ n}}{n} = \gamma\Big) = 1$$

و $a_{\circ n}/n$ در احتمال به γ میل می‌کند. اما اثبات نتیجهٔ مطلوب، یعنی همگرایی با احتمال ۱ فرایند $\frac{a_{\circ n}}{n}$ باید در انتظار تدوین و اثبات قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی می‌ماند.

کینگمن (۱۹۶۸) سرانجام مهمترین گام را در بیان و اثبات قضیهٔ ارگودیک فرایندهای تصادفی زیرجمعی برداشت. تعریف او از فرایندهای تصادفی زیرجمعی، که اندکی مقیدتر از تعریف اولیهٔ این فرایندها در مقالهٔ همرزلی و ولش است، به این شرح است:

فرض کنید که $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح نامنفی باشد. گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_{mn} : m, n \in \mathbb{N} \quad , \quad m < n\}$ که بر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شده‌اند، یک فرایند زیرجمعی نامیده می‌شود هرگاه

(i) اگر $m < n < p$، آنگاه برای هر w در Ω، $X_{mp} \leq X_{mn} + X_{np}$؛

(ii) توزیع فرایند $\{X_{m+1,n+1}\}$ با توزیع فرایند $\{X_{mn}\}$ یکسان است؛

(iii) برای هر n در $\mathbb{N}$، $E[X_{0n}] < \infty$ و برای عددی حقیقی مانند A، $\inf_n E[\frac{X_{0m}}{n}] \geq A$.

قویترین نتیجه‌ای که توسط کینگمن در مورد فرایندهای زیرجمعی ثابت شد، چنین است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی (کینگمن، ۱۹۷۸). $\lim_{n\to\infty} \frac{X_{0n}}{n}$ تقریباً به‌طور حتم $(a.s.)$ و در L^1 موجود است و اگر ξ معرف این حد باشد، آنگاه

$$E[\xi] = \gamma = \inf_{n\geq 1} \frac{E[X_{0n}]}{n}.$$

اگر $\{X_{mn}\}$ مستقل باشد، به این معنی که وقتی $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$، متغیرهای تصادفی $\{X_{n_i,n_{i+1}}\}_{i=1}^{k-1}$ مستقل باشند، آنگاه

$$\xi = \gamma \qquad a.s.$$

خطوط اصلی برهان کینگمن برای قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، همان خطی را تعقیب می‌کند که قضیهٔ ارگودیک فرایندهای مانای بیرکهوف آن را پیموده است. به عبارت دیگر همان‌گونه که برای اثبات قضیهٔ بیرکهوف، لم ارگودیک ماکسیمال جنبهٔ اساسی دارد، کینگمن نیز ابتدا برقراری لم ارگودیک ماکسیمال را برای فرایندهای تصادفی زیرجمعی ثابت می‌کند. البته وی برهان ساده و زیبای گارسیا (۱۹۶۵) برای لم ارگودیک ماکسیمال را در مورد فرایندهای زیرجمعی تعمیم می‌دهد.

لیگت (۱۹۸۵) با تضعیف شرط مانایی فرایندهای زیرجمعی (شرط ii در بالا) حوزهٔ کاربرد قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی را توسیع داده است. نتیجهٔ لیگت چنین است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی (لیگت، ۱۹۸۵). فرض کنید که $\{X_{mn}, 0 \leq m \leq n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) $X_{0m} + X_{mn} \geq X_{0n}$؛

(ii) برای هر k، $\{X_{nk,(n+1)k}, n \geq 1\}$ یک فرایند ماناست؛

(iii) توزیع $\{X_{m,m+k}, k \geq 1\}$ به m بستگی ندارد؛

(iv) $E(X_{01}^+] < \infty$ و برای هر n، $E[X_{0n}] \geq \gamma_0 n$ که در آن $\gamma_0 > -\infty$.

در این صورت

(الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E[X_{0n}] = \inf_n \frac{E[X_{0n}]}{n} \equiv \gamma$

(ب) حد $X = \lim_{n\to\infty} \frac{X_{\circ n}}{n}$ تقریباً به‌طور حتم و در L^1 موجود است، و بنابراین $E[X] = \gamma$.
(ج) اگر دنباله‌های مانا در (ii) ارگودیک باشند، آنگاه

$$X = \gamma \qquad a.s.$$

چندین برهان دیگر برای اثبات قضیهٔ ارگودیک داده شده‌اند که از آن جمله می‌توان به برهان شورگر (۱۹۸۶) اشاره کرد. له‌ونتال (۱۹۸۸) قضیه‌ای را ثابت می‌کند که قضیهٔ ارگودیک بیرکهوف و قضیهٔ ارگودیک، صورت لیگت، از نتایج آن‌اند.

هم‌چنین، شاید ذکر اینکه کینگمن (۱۹۷۳) صورتی از قضیهٔ ارگودیک را برای فرایندهای تصادفی زیرجمعی پارامتر پیوسته بیان و ثابت کرده است، خالی از فایده نباشد. در واقع کاربردی از این صورت قضیهٔ ارگودیک در بخش ۳ ارائه خواهد شد.

یک فرایند زیرجمعی پارامتر پیوسته با فضای پارامتر $R \supseteq T$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی مانند $\{X_{st} : s,t \in T, s < t\}$ است به‌طوری که

(i) $X_{su} \le X_{st} + X_{tu}$ هرگاه $s,t,u \in T$ و $s < t < u$؛

(ii) برای کلیهٔ مقادیر τ با $\tau \in T$، توزیع $\{X_{s+\tau,t+\tau}\}$ با توزیع $\{X_{st}\}$ یکسان است؛

(iii) برای هر t، $t \in T$ ، $t > \circ$ ، $g(t) = E[X_{\circ t}]$ موجود است، و ثابتی مانند A موجود است به‌طوری که برای کلیهٔ مقادیر t با $t \in T$، $t > \circ$ ،

$$g(t) \ge At.$$

نتیجهٔ کینگمن به شرح زیر است:

قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی پارامتر پیوسته (کینگمن، ۱۹۷۳). اگر

$$\{X_{st}, s < t, s,t \in T\}$$

یک فرایند زیرجمعی پارامتر پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[X_{\circ t}]}{t} = \gamma$$

موجود است که در آن

$$\gamma = \inf_{t\in T} \frac{E[X_{\circ t}]}{t}.$$

به علاوه اگر $\{X_{st}\}$ تفکیک‌پذیر باشد به‌طوری که برای بازهٔ ناتبهگنی مانند I،

$$E\left[\sup_{s<t_s, t\in I} |X_{st}|\right] < \infty$$

آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_{\circ t}}{t} \equiv \xi$$

تقریباً به‌طور حتم و در L^{1} موجود است و $E[\xi] = \gamma$.

لازم به ذکر است که فرایند یک پارامتری، $\{X_t, t \in T\}$ تفکیک پذیر نامیده می‌شود هرگاه زیرمجموعهٔ چگال شمارایی مانند $D \subset T$ و پیشامدی پوچ مانند $\Lambda \subseteq \Omega$ $\big(P(\Lambda) = \circ\big)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر مجموعهٔ بستهٔ C و هر بازهٔ باز l

$$\{w : X_t(w) \in C, t \in l \cap D\} - \{w : X_t(w) \in C, t \in l \cap T\} \subset \Lambda.$$

تعریف مشابهی را برای فرایندهای دوپارامتری می‌توان بیان کرد.

سرانجام، اضافه می‌کنیم که قضیهٔ ارگودیک به وسیلهٔ اسمایت (۱۹۷۶) برای فرایندهای زیرجمعی چندپارامتری، یعنی فرایندهایی که مجموعهٔ اندیسگذار آنها زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}^r \times \mathbb{N}^r$ $(r > 1)$اند، ثابت شده است.

۳. چند کاربرد

بدیهی است قضیه‌ای که دو نتیجهٔ بسیار مهم و مرکزی، یعنی قانون قوی اعداد بزرگ و قضیهٔ ارگودیک فرایندهای مانا، را به عنوان دو حالت خاص در برمی‌گیرد، و به ویژه با توجه به شرایط نسبتاً آسانی که منجر به تعریف فرایندهای تصادفی زیرجمعی می‌شوند، می‌تواند در انواع زمینه‌های نظری و کاربردی مورد استفاده داشته باشد. بنابراین تنها به ذکر چند کاربرد شاخص قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی، که پس از این با عنوان قضیهٔ ارگودیک از آن یاد می‌کنیم، می‌پردازیم.

پرکولاسیون نخستین گذر

طبیعی است که نظر به زایش فرایندهای تصادفی زیرجمعی از بطن فرایندهای پرکولاسیون نخستین گذر و تنوع مدلهای پرکولاسیون، اولین و مهمترین کاربردهای قضیهٔ ارگودیک در همین زمینه باشد. اولین کاربرد قضیهٔ ارگودیک در مدل پرکولاسیون نخستین گذر برای اثبات وجود حدّ $\frac{a_{\circ n}}{n}$ با احتمال ۱ و در L^{1} به وسیلهٔ کینگمن (۱۹۶۸) صورت گرفت و در پی آن مجموعه‌ای از قضیه‌ها در ارتباط با فرایندهای پرکولاسیون نخستین گذر به اثبات رسیدند که اهم آنها در تک نگاری برای مشبکه $\mathcal{L}^{2}$ اسمایت و ویرمن (۱۹۸۵) درج شده‌اند. وحیدی اصل (۱۹۷۹) نتایج مشابهی را برای مشبکه مکعبی، $\mathcal{L}^{3}$، ثابت کرد. نهایتاً همین نتایج توسط کستن (۱۹۸۵) به مشبکهٔ d-بعدی، $\mathcal{L}^{d}$، $d \geq 1$ بسط داده شدند. البته لازم به ذکر است که حصول نتایج پراهمیت در پرکولاسیون نخستین گذر، کاربردی سرراست از قضیهٔ ارگودیک نیست. به عبارت دیگر، اگر چه در اغلب موارد وجود حد فرایند زیرجمعی موردنظر مستقیماً از قضیهٔ ارگودیک نتیجه می‌شود

ولی اثبات ثابت بودن حد یا ارگودیک بودن دنباله، که در اغلب موارد انتظار آن می‌رود، مستلزم فنون اغلب موردی و پیچیده است. به عنوان مثال، از قضیهٔ ارگودیک، تنها این نتیجه را می‌توان گرفت که فرایند $\{\frac{a_{\circ n}}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ تقریباً به‌طور حتم و در $L^{۱}$ به متغیر تصادفی X همگراست، اما اثبات تبهگن بودن X، یعنی اثبات اینکه

$$P(X = \gamma) = ۱$$

از قضیهٔ ارگودیک حاصل نمی‌شود.

نظریهٔ پرکولاسیون معمولی، به دلیل کاربرهای متنوع، در جهات مختلف توسیع یافته است. از جملهٔ آنها می‌توان از پرکولاسیون جهتدار[1] (دورت، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۸)، پرکولاسیون پیوستار (هال ۱۹۸۵ و میستر و روی، ۱۹۹۶) به عنوان نمونه نام برد. اما پرکولاسیون نخستین گذر عمدتاً در دو جهت توسیع و تعمیم یافته است و در هر دو، قضیهٔ ارگودیک نقشی اساسی دارد. اولین مورد از این توسیعها، جایگزینی گرافهای منظم، عمدتاً مشبکهٔ $\mathcal{L}^d$، $d \geq ۱$ ، با گرافهای تصادفی بوده است. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) پرکولاسیون نخستین گذر را روی گرافهای تصادفی (نامتناهی) موسوم به وورونوی و دلانی مطالعه کرده‌اند. برای تشریح این مدل، فرض کنید که $\mathcal{P}$ مجموعهٔ نقاطی باشد که تحت یک فرایند پواسون همگن در صفحه تحقق یافته است. در چنین فرایندی، تعداد نقاط در هر مجموعهٔ بورل B در $R^{۲}$ یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین $\lambda|B|$ است که در آن $|B|$ اندازهٔ لبگ مجموعهٔ B را نشان می‌دهد. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، فرض خواهیم کرد که $\lambda = ۱$. در این صورت $\mathcal{P}$ مجموعه‌ای شمارا از نقاط است به‌طوری که هر مجموعهٔ فشرده در $R^{۲}$ تنها شامل زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathcal{P}$ است. برای هر $p \in \mathcal{P}$، یک ناحیهٔ چند ضلعی مانند $V(p)$ نظیر می‌شود که متشکل از کلیهٔ نقاط صفحهٔ $R^{۲}$ است که به p نزدیکترند تا به هر نقطهٔ دیگر p'، $p' \in \mathcal{P}$ و $p' \neq p$. گراف $\mathcal{V}$ که متشکل از کلیهٔ ضلعها و رأس‌های ناحیه‌های $V(p)$، $p \in \mathcal{P}$ ، است، موزائیک بندی وورونوی[2] (۱۹۱۱) (یا موزائیک بندی دیریکله یا چند ضلعی سازی تایسن[3] (۱۹۱۱)) نامیده می‌شود. مثلث بندی دلانی[4] $\mathcal{D}$، گرافی است که رأسهای آن بر نقاط $\mathcal{P}$ واقع‌اند و دو رأس p و p' به وسیلهٔ یالی به هم وصل‌اند اگر و تنها اگر $V(p)$ و $V(p')$ مجاور و یک ضلع مشترک داشته باشند. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) مدل پرکولاسیون نخستین گذر زیر را روی موزائیک بندی وورونوی یا مثلث بندی دلانی معرفی کردند. فرض کنید که $\{T(e) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$، که در آن $\mathcal{V} = \mathcal{G}$ یا $\mathcal{D}$، متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و همتوزیع با تابع توزیع مشترک F باشند. متغیر تصادفی $T(e)$، مانند معمول، "زمان پیموده شدن" ضلع e را نشان می‌دهد. فرض شده است که متغیرهای تصادفی $\{T(e) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{G})\}$ از فرایند پواسون مولد گرافهای $\mathcal{V}$ و $\mathcal{D}$ مستقل باشند. برای هر دو رأس u و v، زمان پیموده شدن $T(\pi)$ مسیری مانند π از u به v عبارت است از مجموع زمانهای پیموده شدن ضلعهای متعلق به π زمان نخستین گذر (نامقید) از u به

1) oriented 2) Voronoi Tessellation 3) Theissen polygonalization
4) Delaunay triangulation

v، که با $t(u,v)$ نشان داده می‌شود، به صورت

$$t(u,v) = \inf\{T(\pi) : \pi \in \mathcal{R}\}$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{R}$ مجموعهٔ کلیهٔ مسیرها از u به v است. این تعریف را می‌توان به نقاط دلخواه $u,v \in R^۲$ با تعریف $t(u,v) = t(p_u, p_v)$، که در آن p_u و p_v نزدیکترین رأسها (با احتمال ۱ یکتا) به ترتیب به u و v هستند، توسیع داد. اگر $x,y \in R^۲$، برای سهولت $p_{(x,\circ)}$ را با p_x و $t\Big((x,\circ),(y,\circ)\Big)$ را با $t(x,y)$ نشان می‌دهیم. وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۰) ثابت کردند که

قضیه. برای موزائیک‌بندی وورونوی و مثلث بندی دلانی، هر دو، ثابتی مانند $\mu(F) < +\infty$ موجود است به‌طوری که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{t(\circ,x)}{x} = \mu(F)$$

تقریباً به‌طور حتم و در $L^۱$ موجود است اگر و تنها اگر

$$\int_\circ^\infty [۱ - F(x)]^۳\, dt < \infty.$$

اخیراً مطالعهٔ مدلهای پرکولاسیون نخستین‌گذر به گرافهای (متناهی) دلخواه تسری‌یافته است. به‌عنوان نمونه نگاه کنید به هوفستاد، هوگمیسترا، میگم (۱۹۹۸).

توسیع پرکولاسیون نخستین‌گذر در جهت دیگر، به منظور اثبات "قضیه‌های شکل "است. کاکس و دورت (۱۹۸۱) با تعمیم مدل رشد ریچاردسون (۱۹۷۳)، مدل زیر را درنظر گرفتند. فرض کنید که $t(x,y)$ زمان نخستین گذر از x به y در مشبکهٔ مربعی $\mathcal{L}^۲$ باشد. با توسیع زمان نخسین گذر از $\mathcal{L}^۲$ به $R^۲$ با تعریف $t(x,y) = t(x_{Z^۲}, y_{X^۲})$ که در آن $x,y \in R^۲$ و $x_{Z^۲}$ و $y_{Z^۲}$ نزدیکترین نقاط به ترتیب به x و y در مشبکهٔ $\mathcal{L}^۲$اند، کاکس و دورت (۱۹۸۱) ثابت کردند که برای هر $x \in R^۲$، $t(\circ, nx)/n$، وقتی $n \to \infty$، با احتمال ۱ و در میانگین به حدی مانند $\phi(x)$ میل می‌کند هرگاه

$$\int [۱ - F(t)]^۴\, dt < \infty.$$

آنها برقرار بودن همین حد در احتمال را بدون هیچ‌شرطی روی میانگین F ثابت کردند. حال اگر

$$A_t = \{x : t(\circ,x) \le t\}$$

"ناحیهٔ خیس‌شده "پیش از زمان t باشد به شرطی که مایع در مبدأ زمان وارد سیستم شود، کاکس و دورت "قضیهٔ شکل "مهمّ زیر دربارهٔ ناحیهٔ "خیس شده" را ثابت کردند:

قضیه. فرض کنید $e_۱ = (۱,\circ)$. در این صورت، در احتمال،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t(\circ, ne_۱)}{n} = \gamma.$$

اگر $\gamma > ۰$، در این صورت برای هر $\epsilon > ۰$،

$$P\Big(\{x : \phi(x) \leq ۱-\varepsilon\} \subseteq t^{-۱}A_t \subset \{x : \phi(x) \leq ۱+\varepsilon\}, \text{برای } t\text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱$$

اگر و تنها اگر $E[Y^۲] < \infty$، که در آن Y مینیمم مختصهای زمانی چهار ضلعی است که از مبدأ خارج می‌شوند. اگر $\gamma = ۰$ آنگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ K

$$P\Big(K \subseteq t^{-۱}A_t, \text{برای کلیهٔ } t\text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱.$$

وحیدی اصل و ویرمن (۱۹۹۲) «قضیهٔ شکل» کاکس و دورت را برای گرافهای وورونوی و دلانی به صورت زیر توسیع دادند.

قضیه. برای هر $\varepsilon > ۰$،

$$P\Big(\{x : R^۲ : \phi||x|| \leq ۱ - \varepsilon\} \subseteq t^{-۱}A_t \subseteq \{x \in R^۲ : \phi||x|| \leq ۱ + \varepsilon\}, \text{برای کلیهٔ } t\text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱$$

اگر و تنها اگر

$$E[Y^۲] = \int_۰^\infty t[۱ - F(۱)]^۳\, dt < \infty.$$

اگر $\phi = ۰$، آنگاه برای هر مجموعهٔ فشردهٔ K

$$P\Big(K \subseteq t^{-۱}A_t, \text{برای کلیهٔ } t\text{های به‌قدر کافی بزرگ}\Big) = ۱.$$

در اینجا $\phi = \lim_{x\to\infty} \frac{t(۰,(۰,x))}{x}$ و $||\cdot||$ نرم اقلیدسی است.

توجه کنید که بر خلاف "قضیهٔ شکل" کاکس و دورت که در آن به علت نامشخص‌بودن شکل تابع $\phi(x)$، شکل ناحیهٔ خیس پیش از زمان t، tای بزرگ، نامشخص است، در نتیجهٔ اخیر، به دلیل همسانگردی فرایند پواسون همگن، شکل این ناحیه معین و در واقع "مستدیر" است.

سرافینی (۱۹۹۷) قضیهٔ شکل وحیدی اصل و ویرمن را به گرافهای دلانی تولید شده به وسیلهٔ فرایندهای پواسون dـبعدی، $d > ۲$، تعمیم داده است.

حاصلضربهای ماتریسهای تصادفی

فرض کنید که $A_۱$، $A_۲$، ... یک دنبالهٔ مانا از ماتریسهای تصادفی $k \times k$ با درایه‌های مثبت باشد و فرض کنید که

$$\alpha_{m,n}(i,j) = (A_{m+۱} \dots A_n)(i,j),$$

یعنی $\alpha_{m,n}(i,j)$ درایهٔ iام ستون jام حاصلضرب $A_{m+۱}\ldots A_n$ است. با توجه به اینکه

$$\alpha_{۰,m}(۱,۱)\alpha_{m,n}(۱,۱) \leq \alpha_{۰,n}(۱,۱),$$

بنابراین اگر

$$X_{mn} = -\log \alpha_{m,n}(۱,۱)$$

آنگاه

$$X_{۰m} + X_{mn} \geq X_{۰n}$$

که همان شرط (i) در قضیهٔ ارگودیک فرایندهای زیرجمعی لیگت (۱۹۸۵) است. دیگر شرایط این قضیه نیز در مورد X_{mn} صادق است (برای تفصیل بیشتر نگاه کنید به دورت، ۱۹۹۱، صفحهٔ ۳۲۶) و بنابراین برای کلیهٔ مقادیر i، j،

$$\frac{۱}{n}\log \alpha_{۰,n}(i,j) \to -X, \qquad a.s.$$

این نتیجه برای نخستین بار توسط فورستنبرگ (۱۹۶۰) ثابت شده است. بحث بیشتر دربارهٔ حاصلضربهای ماتریسهای تصادفی را می‌توان در کوهن، کستن، و نیومن (۱۹۸۵) یافت.

دنباله‌های صعودی در جایگشتهای تصادفی

فرض کنید که π جایگشتی از $\{۱,۲,\ldots,n\}$ و $l(\pi)$ طول طولانیترین دنبالهٔ صعودی در π باشد، یعنی، بزرگترین kای که برای آن اعداد صحیحی مانند $i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k$ موجود باشند به‌طوری که

$$\pi(i_۱) < \pi(i_۲) < \cdots < \pi(i_k).$$

همرزلی (۱۹۷۰) به این مسأله، با قراردادن یک فرایند پواسون با نرخ $\lambda = ۱$ در صفحه، درآویخت. وی برای $s < t \in (۰,\infty)$، طول طولانیترین مسیر صعودی واقع در مربع R_{mn} با رأسهای (s,s)، (s,t)، (t,t)، (t,s) را با Y_{st} نشان داد. به عبارت دیگر Y_{st} بزرگترین kای را نشان می‌دهد که برای آن نقاط (x_i,y_i) در فرایند پواسون موجودند به‌طوری که $t < x_k < \cdots < x_۱ < s$ و $t < y_k < \cdots < y_۱ < s$. با مشاهدهٔ اینکه

$$Y_{۰m} + Y_{mn} \leq Y_{۰n}$$

و تحقیق برقراری دیگر شرایط قضیهٔ ارگودیک لیگت (برای دنباله $\{-Y_{۰n}\}$) نتیجه می‌شود که

$$\frac{Y_{۰n}}{n} \to \gamma \equiv \sup_{n\geq ۱} \frac{E[Y_{۰n}]}{n} \qquad a.s.$$

حال برای بازگشت از این نتیجه دربارهٔ فرایندهای تصادفی به مسألهٔ جایگشت تصادفی، فرض کنید که $\tau(n)$ کوچکترین مقدار t باشد که برای آن n نقطه در $R_{۰t}$ موجودند. فرض کنید که n نقطه (پواسونی) در

$R_{0,\tau(n)}$ به صورت (x_i, y_i) نوشته شوند که در آن $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq \tau(n)$ و فرض کنید که π_n جایگشت یکتای $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد به‌طوری که $y_{\pi_n(1)} < y_{\pi_n(2)} < \cdots < y_{\pi_n(n)}$. ملاحظه می‌شود که $Y_{0,\tau(n)} = l(\pi_n)$. به‌آسانی (به کمک قانون قوی اعداد بزرگ) ثابت می‌شود که

$$\frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} \to 1, \qquad a.s.$$

بنابراین نتیجه می‌شود که

$$\frac{l(\pi_n)}{\sqrt{n}} \to \gamma \qquad a.s.$$

همرزلی (۱۹۷۰) ثابت کرده است که $\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq e$ و کینگمن (۱۹۷۳) ثابت کرده است که $1.59 < \gamma < 2.49$. از کارهای بعدی در زمینهٔ مسألهٔ جایگشت تصادفی (لوگان و شپ (۱۹۷۷) و ورشیک و کروف (۱۹۷۷)) نتیجه می‌شود که $\gamma = 2$.

فرایندهای پوشانش

یک فرایند پوشانش، به‌طور کلی، دنباله‌ای شمارا از مجموعه‌ها در فضای اقلیدسی، مثلاً خط حقیقی یا صفحهٔ دکارتی است. تعریف ریاضی صوری فرایندهای پوشانش را می‌توان چنین بیان کرد (هال، ۱۹۸۸). فرض کنید که $\mathcal{P} = \{\xi, \xi_2, \ldots\}$ گردایه‌ای شمارا از نقاط در فضای kـبعدی اقلیدسی، و $\{S_1, S_2, \ldots\}$ گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های ناتهی باشد. فرض کنید که

$$\xi_n + S_n = \{\xi_n + x : x \in S_n\}.$$

در این صورت $\mathcal{C} \equiv \{\xi_n + S_n : n = 1, 2, \ldots\}$ یک فرایند پوشانش است. ξ_n "مرکز مجموعهٔ $\{\xi_n + S_n\}$ نامیده می‌شود. خلأ $V = V(R)$ در زیر مجموعه‌ای مانند R از فضای kـبعدی، عبارت است از مقدار آن بخش از R که توسط هیچ یک از مجموعه‌های $\mathcal{C}$ پوشانده نشده است:

$$V = \int_R I\{X \notin \cup_n(\xi_n + S_n)\}\, dx$$

که در آن I نشان‌دهندهٔ تابع نشانگر است.

فرایند پوشانش زیر توسط وحیدی اصل (۱۹۹۹) مورد مطالعه قرارگرفته است. فرض کنید که $B^l_{s,t}$ معرف مستطیل $[s,t] \times [0, l]$ باشد. یک فرایند پواسون همگن دوبعدی $\mathcal{P}$ را با نرخ λ در صفحه درنظر بگیرید. حال با درنظرگرفتن تحدید $\mathcal{P}$ به $B^l_{s,t}$ دایره‌ای به مرکز هر یک از نقاط پواسونی و به شعاع ثابت r رسم کنید. با فرض اینکه X^l_{st} مساحت پوشانده شده در داخل مستطیل $B^l_{s,t}$ توسط چنان دایره‌هایی باشد، با تشخیص اینکه X^l_{st} برای هر l ثابت یک فرایند زبرجمعی است ($\{-X^l_{st}\}$ یک فرایند زیرجمعی است)، با استفاده از قضیهٔ ارگودیک ثابت می‌شود که

برای هر l ثابت، حد

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X^l_{\circ t}}{t} = \alpha^l$$

تقریباً به‌طور حتم و در L^1 موجود است. α^l را ضریب پوشانش نامیده‌ایم.

توجه شود که در اینجا هم مشاهدهٔ زیرجمعی بودن فرایند $\{X^l_{st}\}$ و استفاده از قضیهٔ ارگودیک، وجود حدی مانند X^l را برای $\frac{X^l_{\circ t}}{t}$ مستقیماً نتیجه می‌دهد و مابقی، و قسمت اساسی کار، اثبات تبهگن بودن X^l است، یعنی اثبات اینکه

$$P(X^l = \alpha^l) = 1.$$

وحیدی اصل و شفیعی (۲۰۰۱) این نتیجه را به فرایندهای پوشانشی که در آن مجموعه‌های پوشانندهٔ S_n به‌جای دایره‌ای به شعاع ثابت r، مربعهایی تصادفی به ضلع L هستند که L دارای توزیع یکنواخت در بازه‌ای مانند (a, b) است، توسیع داده‌اند و آن را همراه با فرایند پوشانشی دیگری که در آن ξ_n مراکز، نقاطی هستند که به طور تصادفی (با توزیع یکنواخت) در ناحیه‌هایی مربع شکل از صفحه توزیع شده‌اند، برای نمونه‌گیری فضایی، یا نمونه‌گیری در سطح، مورد استفاده قرار داده‌اند.

مراجع

Breiman, L. (1968). *Probability.* Addison - Wesley, Reading, Massachusetts.

Broadbent, S.R. and Hammersley, J.M. (1957). Percolation processes. Crystals and Mazes. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society.* **53**, 629 - 641.

Cohen, J. , Kesten, H. ,and Newman, C. (1985). *Random matrices and their applications.* **AMS** Contemporary Math. 50. Providence, **RI**.

Cox, J.T. and Durrett, R. (1981) Limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *Annals of Probability.* **9**, 583 - 603.

Dudley, R.M. (1989). *Real Analysis and Probability.* Wadssworth & Brooks/ Cole. Pacific Grove, California.

Durrett, R. (1984). Oriented Percolation in Two Dimensions. *Annals of Probability.* **12**, 999 - 1040.

Durrett, R. (1988). *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation.* Wadsworth & Brooks/ Cole. Belmont, California.

Durrett, R. (1991). *Probability: Theory and Examples.* Wadsworth & Brooks/ Cole. Belmont, California.

Efros, A.L. (1986). *Physics and Geometry of Disorder*: Percolation theory. Mir Publishers, Moscow.

[ترجمه‌ای از این کتاب به زبان فارسی به وسیلهٔ محمد قاسم وحیدی اصل با عنوان فیزیک و هندسهٔ بی‌نظمی از سوی انتشارات انجمن فیزیک ایران منتشر شده است.]

Etemadi, N. (1981). An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Warsch. Verw. Gebiete* **55**, 119-122.

Garsia, A.M. (1965). A simple proof of E. Hopf's maximal ergodi theorem. *J. Math. and Mech.* (Indiana Univ.) **14**: 381-382.

Gnedenko, B.V. and Sheinin, O.B. (1992). The Theory of Probability, in *Mathematics of 19th Century*, Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory, A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich eds. PP. 211-280, Birkhauser. Verlag, Basel.

Grimmett, G. (1999). Percolation. Springer - Verlag. New York.

Hall, P. (1985). On continuum percolation. *Annals of Probability.* **13**, 1250-1266.

Hammersley, J.M. (1970). A few seedlings of research. Proceedings of 6th Berkeley symposium. **Vol. I**, 345 - 394.

Hammersley, J.M. (1983). Origins of percolation theory, *Annals of the Isreal Physical Society.* **5**, 47 - 57.

Hammersley, .J.M. and Welsh, D.J.A. (1965). First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory, in *Bernoulli, Bayes, Laplace Anniversary Volume*, eds.J.Neyman and L.Lecam, 60 - 110, Springer - Verlag.

Hansen, J.C. and Hulse, P. (1998). Subadditive ergodic theorems for random sets in infinite dimensions. *Statistics and probability Letters*, **50**, 409-416.

Hille, E. and Phillips, R.S. (1957). Functional Analysis and Semi-groups. *American Mathematical Society.* Providence, RI.

Hall, P. (1988). *Introduction to the Theory of Coverage Processes.* New York: John Wiley & Sons.

Hofstad, R., Hooghiemstra, G. and Mieghem, P. (2001). First-passage percolation on the random graph. *Prob. Eng. Inf. Sciences.* **Vol. 15**, 225-237.

Kesten, H. (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$, *Communications in Mathematical Physics.* **74**, 49-59.

Kesten, H. (1982). *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhauser, Boston.

Kesten, H. (1985). First-passage percolation and a higher dimensional generalization, in *Particle Systems, Random Media and Large Deviations*, ed.R.Durrett, 235 - 251, Contemporary Mathematics 41, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Kingman, J.F.C. (1968). The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *Journal of Royal Statistical Society.* **ser. B. 30**. 499 - 510.

Kingman, J.F.C. (1973). Subadditive ergodic theory. *Ann. Prob.* 1, 883-909.

Kingman, J.F.C. (1976). *Subadditive Processes.* Ecole d' ete de probabilities de St-Flour, 1975. Lecture Notes in Math. Springer 539 : 167 - 223.

Leventhal, S. (1988). A proof of Liggett's version of the subadditive ergodic theorem. *Proceedings of American Mathematical Society.* **102**, 169 -173.

Liggett, T.M. (1985). An improved subadditive ergodic theorem. *Annals of probability.* **13**, 1279 - 1285.

Logan, B.F. and Shepp, L.A. (1977). A variational problem for random Young tableaux. *Advances in Mathematics.* **26**, 206 - 222.

Meester, R. and Roy, R. (1996). *Continuum Percolation.* Cambridge Tracts in Mathematics, London.

Schurger, K. (1986). Stochastic processes and its applications. 21.

Serafini, H.C. (1997). First-passage percolation on the Delaunay graph on a d - dimensional Poisson process, Ph.D thesis, Department of Mathematics, New York University.

Smythe, R.T. (1976). Multiparameter subadditive processes. *The Annals of Probability.* **4**, 772 -782.

Smythe, R.T. and Wierman, J.C. (1978). *First-passage percolation on the square lattice*, Lecture Notes in Mathematics no. 671, springer. Berlin.

Stauffer, D. (1985). *Introduction to percolation theory.* Taylor & Francis Ltd. London.

Vahidi-Asl, M.Q. (1979). *First-passage percolation on the simple cubic lattice.* Ph.D. thesis. Department of Mathematics, University of Oregon.

Vahidi-Asl, M.Q.(1999) Covering a surface, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. **25**, 25-36.

Vahidi-Asl, M.Q. and Shafie, K. (2002). Coverage processes with applications in areal sampling, submitted.

Vahidi-Asl, M.Q. and Wierman J.C. (1990). First-passage percolation on the Voronoi tessellation and Delaunay triangulation in *Random Graph's 87*. M. Karonski, J. Jaworski, and A. Rucinski. eds. John Wiley & Sons Ltd.

Vahidi-Asl, M.Q. and Wierman, J.C. (1992). A shape result for first-passage percolation on the Voronoi tessellation and Delaunay triangulation. *Random Graphs, volume 2.* Frieze, A. and Luczak, T. eds. John Wiley & Sons, Inc.

Voronoi, G. (1908). Nouvelles applications des parametres continus a'la theorie des formes quadratiques. Deuxieme memoire. Recherches sur les paralleloedres primitifs. *J. Reine Angew. Math.* **134**. 198 - 287.

Proceedings of the Monthly Colloquium
of the Iranian Mathematical Society
Volume 1 (2003)
Edited by: Arsalan Chademan

فهرست مطالب

بها ۹۲۵۰ ریال