

پژوهش‌های آموزنده

Per Enflo

Department of Mathematics

Kent State University, USA



• مسأله پایه: آیا هر فضای باناخ X یک پایه شرودر دارد، یعنی آیا یک دنباله $\{x_n\}$ در X وجود دارد که برای هر $x \in X$ دنباله یکتای $\{\lambda_n\}$ از اعداد مختلط وجود داشته باشد که

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n.$$

• مسأله زیر فضای پایا: اگر X فضای باناخ تفکیک‌پذیری باشد، آیا برای هر عملگر خطی کراندار T روی X یک زیر فضای بسته M متفاوت از X و $\{0\}$ وجود دارد که تحت T پایا باشد، یعنی $T(M) \subseteq M$ ؟

انفلو در همایش ۱۹۷۶ انجمن ریاضی آمریکا در تورنتو وجود مثالی نقض برای مسأله زیر فضای پایا را اعلام کرد. اما تا ۱۹۸۱ آن را برای چاپ ارسال نکرد. مقاله که به Acta Mathematica (به پیشنهاد هیأت تحریریه این مجله به انفلو) ارسال شده بود بیش از ۴ سال در دست داوران (بدون داوری) باقی ماند. علت این بود که فهم این مقاله، کاملاً مشکل بود. بالاخره مقاله در ۱۹۸۴ پذیرفته و در ۱۹۸۷ با تغییر جزئی در ۱۰۰ صفحه چاپ شد.

فکر کردم که اگر چندین سال طول بکشد باز هم ارزشش را دارد.

این مقاله درهای زیادی را برای تحقیقات آتی به‌ویژه در نظریه عملگرها باز نمود (مانند تعیین رده عملگرهایی که لزوماً زیر فضای پایا دارند). کارهای وی گرچه مجرد به نظر می‌رسند ولی قسمت‌هایی از آن‌ها کاربردپذیرند. مثلاً بعضی از بهترین الگوریتم‌های رایانه‌ای برای تجزیه چندجمله‌ای‌ها روی ایده‌های انفلو در حل مسأله زیر فضای پایا پایه‌گذاری شده‌اند. هم‌چنین شواهدی از کاربردهای کارهای فضای باناخی وی در علم اقتصاد وجود دارد. او در سال‌های اخیر روی زمینه‌های وسیعی از علوم بین شاخه‌ای نظیر زیست‌ریاضی کار نموده است.

اما چطور انفلو موفق به یافتن مثالهای نقض شد. داستان را خودش چنین بیان می‌کند:

در ۱۹۶۶ روی این صورت نامتناهی مسأله پنجم هیلبرت کار کردم: «تا چه حد گروه‌های توپولوژیک خواص زیبایی شبیه گروه‌های لی دارند؟» گروه‌های لی نزدیک عنصر همانی «تقریباً جابجایی» هستند. سؤال من این بود: «آیا یک گروه می‌تواند «خیلی ناجابجایی» باشد؟» برای مثال آیا گروهی وجود دارد که همه عناصرش به جز عنصر همانی مزدوج یکدیگر باشند (x را مزدوج y می‌گویند هرگاه $xy = yx$) مانند a وجود داشته باشد که $axa^{-1} = y$ ؟ من توانستم چنین گروه شمارایی را با شروع از گروه تولید شده توسط یک عنصر از مرتبه نامتناهی و سپس توسیع گروه با اضافه کردن عناصر مناسب بسازم.

دریافتم که این یک شیوه ساختاری کلی است. پس شروع کردم انواع دیگری از مثال‌های نقض را با به کار بردن فرایند زیر بسازم:

پیرانفلو (Per Enflo) ۲۰ مه ۱۹۴۴ در استکهلم (سوئد) متولد شد. پدرش نقشه‌بردار و مادرش هنرپیشه بود و خانواده‌اش تماماً در حوزه موسیقی فعال بودند. در ۸ سالگی به ریاضیات و موسیقی علاقه‌مند شد. گرچه ما او را یک ریاضی‌دان می‌دانیم ولی پیانونوازی حرفه‌ای نیز هست. اولین رستال پیانو خود را در سن ۱۱ سالگی ارائه داد و در ۱۹۵۶ و ۱۹۶۱ برنده مسابقه پیانونوازان جوان سوئد شد و تاکنون به فعالیت‌های خود در این حوزه ادامه داده است. (سالی ۱۰ تا ۳۰ برنامه عمومی موسیقی در آمریکا اجرا می‌کند).

مقاله در ۱۹۸۴ پذیرفته و در ۱۹۸۷ با تغییر جزئی در ۱۰۰ صفحه چاپ شد.

او دکترای خود را در سال ۱۹۷۰ از دانشگاه استکهلم تحت راهنمایی هانس رادستروم (Hans Radstrom) در مورد مسأله هیلبرت برای گروه‌های نافشرده موضعی اخذ کرد و هم‌اکنون با مرتبه شامخ University Professor (که بالاتر از مرتبه Full Professor است) در دانشگاه ایالتی کنت در آمریکا به فعالیت مشغول است. وی تاکنون راهنمایی حدود ۲۰ دانشجوی دکتری را عهده‌دار بوده است. شهرت انفلو به خاطر حل سه مسأله اساسی زیر در آنالیز تابعی است که به مدت حدود ۴۰ سال باز (بدون حل) بودند. در واقع وی با ارائه مثال‌های نقضی نشان داد که جواب هر سه سؤال منفی است (البته حل انفلو برای مسأله تقریب، مثال نقضی نیز برای مسأله پایه به دست داد).

• مسأله تقریب: آیا هر عملگر فشرده روی یک فضای باناخ حد (در نرم) یک دنباله از عملگرهای با رتبه متناهی است؟

مجموع مساوی ۱۳۷۱ بودند! حدود ۱۰ مه وقتی در حال قدم زدن با کارین در کالسکه‌اش بودم، ایده گم شده نهایی را یافتم. از بعضی جهات ایده ساده بود: احتیاج داشتم زیرمجموعه‌های متمایزی را از یک مجموعه متناهی خارج کنم ولی نمی‌توانستم به تعداد کافی این کار را بکنم. دریافتیم که کافی است آن‌ها را تقریباً متمایز اختیار کنم و بنابراین توانستم تعداد زیادی مجموعه را خارج سازم. از این جا به بعد فقط باید جزئیات فراوانی را می‌نوشتیم. این کار یک ماه طول کشید. بنابراین از زمانی که کار روی مسئله پایه را شروع کردم تا آن را حل کردم حدود چهار سال و نیم طول کشید.

وضعیت در مورد مسئله زیر فضایی پایا تشابهات زیاد و تفاوت‌های کمی با وضعیت دو مسئله بالا داشت. فکر روی مسئله زیرفضای پایا در سال ۱۹۷۰ شروع شد و چون یک استراتژی برای تولید مثال نقض داشتم و تا آن موقع هیچ‌کس مسئله را به‌طور مثبت حل نکرده بود پس (برای من) طبیعی بود که در جهت یافتن مثال نقض پیش روم.



سعی کردم عملگری را در چند مرحله بسازم. در هر مرحله یک بردار دوری جدید می‌ساختم (منظور از یک بردار دوری، برداری بود که مدارش تمام فضا را تولید کند). کار را با عملگری که همه بردارهایش دوری‌اند خاتمه دادم. اما با چندین مشکل روبرو شدم. در ژانویه ۱۹۷۳ تلاش برای ساخت عملگرها را رها کردم و به رهیافتی دیگر روی آوردم: در عوض ساختن یک عملگر، نرمی ساختم که هر بردار غیر صفر را دوری می‌کرد. به نظر می‌رسید شانس برای کنترل پیچیدگی‌های کار به سراغم آمده بود. در اکتبر ۱۹۷۳ روندی در دست داشتم که فکر می‌کردم می‌توانم روی جزئیات آن کار کنم. اما وقتی وارد جزئیات اولین مرحله شدم دیدم که با ورود به مراحل بعدی، ساختار مورد نظر به تدریج فرو می‌ریزد.

اما حتی بعد از دو سال هیچ‌کس آن را آنقدر خوب نفهمیده بود که احساس کند متقاعد شده است.

در ژانویه ۱۹۷۴ دریافتیم که آن‌چه احتیاج است اجتناب از این

«اگر یک حدس راجع به بعد نامتناهی داشته باشیم می‌توانیم مثال نقضی به روش زیر بسازیم: پدیداری متناهی‌البعد اختیار کنیم که در آن تحت بعضی شرط‌ها حدس مورد نظر نادرست باشد. سپس سعی کنیم با یک روند استقرایی، که در آن این پدیده متناهی‌البعد به‌عنوان بلوک ساختمانی عمل می‌کند، به مثال نقض مورد نظر دست یابیم.»

بعد از چند موفقیت در به کار بردن این ایده، به دنبال این بودم که ببینم می‌توانم این روش را در مورد مسائل جدی‌تر به کار ببرم. پس در دسامبر ۱۹۶۷ روی مسئله پایه شروع به فکر کردم. دو هفته با آن درگیر بودم. اما نتوانستم یک پدیدار متناهی‌البعد برای روند استقرایی بیابم. در ۱۹۶۸ مسئله‌ای از اسمیرنوف را حل کردم که برای ۱۵ سال باز بود. طرح ساختمانی من این بود «یک فضای متریک تفکیک‌پذیر وجود دارد که نمی‌تواند به طور یکنواخت در یک فضای هیلبرت نشانده شود». کارم را با یک شی‌که به‌طور ضعیفی قابل نشانیدن بود شروع و پس از سه ماه توانستم یک روند استقرایی کارساز بیابم. این کار در مقاله On a problem of Smirnov در سال ۱۹۶۹ در Arkiv چاپ شد.

این موفقیت مرا واداشت تا تلاش دیگری را برای حل مسئله پایه در ژانویه ۱۹۶۹ آغاز کنم. بعد از دو ماه توانستم یک پدیدار متناهی‌البعد بیابم که ظاهراً می‌توانست منجر به مثال نقض مطلوب شود. اما ناامید شدم زیرا به کار بردن آن برای یک استقرا مشکل بود.

در دسامبر ۱۹۶۹ پس از ملاقات با پلزنسکی (Pelczynski) و لیندنشتراس (Lindenstrauss) تصمیم گرفتم روی مسئله تقریب کار کنم. ساخت بلوک‌های متناهی‌البعد برای این مسئله ساده‌تر از مسئله پایه به نظر می‌رسید. لیندنشتراس رهیافتی برای حل مثبت تقریب داشت و در ۱۹۷۰ و ۱۹۷۱ سعی کردم جواب مثبتی با رهیافتی دیگر برای مسئله تقریب به دست آورم که ناموفق بودم.

از زمانی که کار روی مسئله پایه را شروع کردم تا آن را حل کردم حدود چهار سال و نیم طول کشید.

در سپتامبر ۱۹۷۱ به دانشگاه برکلی رفتم. چند هفته بعد از ورودم مقاله‌ای در مورد نرمسازهای فضاهای ابرمنعکس نوشتم و روی چند پروژه، بر اساس ایده‌های جداگانه قبلی‌ام در سوئد، کار کردم. در فوریه ۱۹۷۲ بعد از یک شب بی‌خوابی تصمیم گرفتم دوباره به مسئله پایه یا مسئله تقریب برگردم. فکر کردم که اگر چندین سال طول بکشد باز هم ارزشش را دارد.

حدود دهم آوریل ۱۹۷۲ بود که دریافتیم با معرفی مفهوم «اثر میانگین» می‌توانم ابزاری قوی برای کاربرد تقارن‌ها و ساختن یک فرآیند استقرایی به دست آورم. این همزمان با تولد اولین دخترم (کارین) یک دوره حاد از زندگی‌م را رقم زد. احساس کردم می‌توانم به حل مسئله تقریب نزدیک‌تر شوم. اگر دو مجموعه‌ی که در محاسبه ظاهر می‌شدند متفاوت می‌شدند کار تمام بود ولی هر دو

چگونه مقاله پژوهشی چاپ کنیم؟

محمدرضا درفشه *



مخاطب اصلی این نوشته دانشجویان دوره تحصیلات تکمیلی به خصوص دانشجویان دوره دکتری ریاضیات است. توصیه اینجانب به این عزیزان این است که وقتی به دوره دکتری ریاضی وارد می‌شوند دروس تخصصی مورد علاقه خود را با جدیت مطالعه کنند و حتی المقدور سعی نمایند که دروس دیگری در رابطه با علایق شخصی خود فراتر از برنامه مصوب مطالعه نمایند. دوره دکتری با دو سال آموزش شروع می‌شود که فرصت خوبی برای فراگیری دروس تخصصی است. دانشجوی دروس موردنظر را بنا به توصیه استاد راهنما انتخاب می‌نماید و لذا تأکید می‌نمایم که از همان ابتدا در گزینش استاد راهنما دقت فراوان شود. دوره آموزشی که به پایان رسید این بدان معناست که هم‌اکنون زمینه برای تحقیق و نوشتن مقاله ریاضی فراهم گشته است.

مهم‌ترین عامل در نوشتن مقاله تفکر عمیق و صرف وقت است تا بلکه بتوان مطلبی درخور چاپ تنظیم نمود.

استاد راهنما که مسائل مختلف تحقیقاتی در اختیار دارد در سمینارهای گروه فعال است و در آنجا مسائل مهم روز که تاکنون لاینحل مانده و ریاضی‌دانان سایر کشورها نیز درباره آن‌ها تحقیق می‌کنند مطرح می‌نماید. دانشجوی دکتری پس از اطلاع یافتن از مسائل تحقیقاتی یکی را انتخاب کرده و باید به دقت منابع مربوطه را تهیه و مطالعه کند و همواره معلومات خود را به‌روز نماید. در این مرحله هدف این است که در ارتباط با حل مسأله انتخابی مقاله‌ای تنظیم شده و برای چاپ ارسال گردد. به نظر اینجانب کار مقاله‌نویسی همانند نویسندگی است، همان‌طور که داشتن قوه تخیل و اطلاع از سبک‌های مختلف ادبی و تسلط بر زبان از بایدهای کار نویسندگی است، داشتن قدرت تفکر، اشراف بر تحقیقات انجام شده درباره مسأله توسط دیگران و البته تسلط بر زبان مقاله از ضروریات مقاله‌نویسی است. برای نوشتن یک مقاله خوب دانشجو نباید خیلی

ویرانی است: یک نوع جدید از نامساوی برای حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها که مستقل از تعداد متغیرها باشد. این نامساوی را برای درجه ۱ اثبات کردم و در مه ۱۹۷۴ فهمیدم چه‌طور آن را برای درجات بالاتر اثبات کنم. بعد از اتمام اولین مرحله ساختمان متقاعد شدم که "در اصل" یک مثال نقض برای مسأله زیرفضای پایا دارم.

اما برای من نوشتن جزئیات برای فردی دیگر کاری سخت و پیچیده بود. احتیاج نداشتم برای فکر کردن به دنبال تعاریف صوری برای خودم باشم. در پاییز ۱۹۷۴ سعی کردم همه ایده‌ها را به شکل قابل فهمی برای دیگران بیان کنم. در مارس ۱۹۷۵ که برای یک ماه به دانشگاه شیکاگو رفته بودم حل خود را به صورت سخنرانی ارائه دادم. در مارس ۱۹۷۵ توانستم برای اولین بار استقرا از "حالات از طول k " را به "حالات از طول $k+1$ " بنویسم. در پاییز همان سال اولین دست‌نوشته کامل حل را به پایان رساندم. اما حتی بعد از دو سال هیچ‌کس آن را آنقدر خوب نفهمیده بود که احساس کند متقاعد شده است و بنابراین بیان دیگری از اثبات را ارائه دادم که در آن جزئیات تعاریف و برهان‌های خیلی از مراحل در بحث را دقیق‌تر بیان کردم. این آن صورتی از مقاله است که سرانجام در ۱۹۸۱ ارسال کردم.

اگر مسأله‌ای حل شود، که این مهم‌ترین چیز است، چاپ آن اساساً امری ظاهری است.

درست است که مقاله مدت‌ها در دست داوران باقی ماند ولی نسخه‌های آن را بین ریاضی‌دانان آن زمان پخش نموده بودم. احساس من در آن موقع این بود که اگر مسأله‌ای حل شود، که این مهم‌ترین چیز است، چاپ آن اساساً امری ظاهری است. وقتی هم که مقاله‌ام پذیرفته شد، احساس خاصی به من دست نداد و برای چاپ سریع مقاله‌ام نیز درخواستی به مجله نفرستادم. به هر حال برای موفقیت - گرچه این واژه معنای فردی و اجتماعی متفاوت دارد - باید کار سخت و متمرکز انجام داد.

مراجع:

1. The Mathematics Genealogy, <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/>

2. <http://www.canisius.edu/topos/enflo.asp>

تبصره: این مقاله براساس پرسش و پاسخ مترجم با پروفسور Per Enflo فراهم گردیده است.

مترجم: محمد صال مصلحیان

دانشگاه فردوسی مشهد