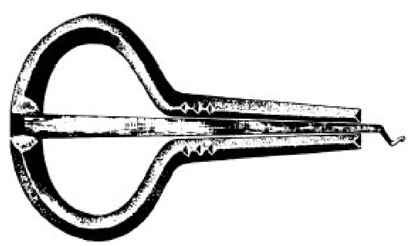
مقاله

هم‌ساز با سری هم‌ساز!

محمد صال مصلحیان*



سری همساز $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\dots=\infty$ یکی از مهم‌ترین سری‌ها در ریاضیات است چرا که مثالی است از یک سری واگرا که جملهٔ عمومی آن، $\frac{1}{n}$، به صفر همگراست. البته واگرا بودن آن بیش‌تر به خاطر وجود اعداد اول است، چراکه $\sum_{p}\frac{1}{p}$ (p عدد اول) واگراست. جمعک nام این سری یعنی $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ نزدیک به $\ln n$ و بنابراین سرعت واگرایی آن بسیار کند است؛ مثلاً باید تعداد $1/5\times 10^{43}$ جملهٔ آن را با هم جمع کرد تا به عدد ۱۰۰ نزدیک شد. یک نکتهٔ جالب این است که S_n فقط و فقط وقتی عدد صحیح است که $n=1$. از طرف دیگر سری همساز متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ همگراست. یک سؤال طبیعی این است که بپرسیم در مورد سری همساز تصادفی $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_j}{j}$ که در آن ε_j ها متغیرهای تصادفی مستقل با $P(\varepsilon_j=1)=\frac{1}{2}$ و $P(\varepsilon_j=-1)=\frac{1}{2}$ هستند چه می‌توان گفت؟[1] علاقه‌مندان ممکن است ثابت کنند که $\sum_{j>k>l\geq 1}\frac{1}{j^a k^b l^c}$ که در آن a، b و c اعداد صحیح معلوم ناکم‌تر از ۲ هستند همگراست[2]. جالب‌تر این که اگر در سری همساز جملاتی را که در مخرج آن‌ها یک رقم معین (مثلاً ۹) ظاهر شده است (مانند ۹، ۱۹، ۲۹ و ...) حذف کنیم، یک سری همگرا به دست می‌آید،[3] اگر نماد $9\notin n$ نشان دهندهٔ این باشد که ۹ در بین ارقام n در نمایش پایه ۱۰ نباشد داریم:

$$
\begin{aligned}
\sum_{9\notin n}\frac{1}{n} &= (1+\dots+\frac{1}{8})+(\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{88}) \\
&\quad +\dots+(\frac{1}{10^k}+\dots+\frac{1}{\underbrace{88\cdots 8}_{k}})+\dots \\
&< (\underbrace{1+\dots+1}_{8\times 9^0})+(\underbrace{\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{10}}_{8\times 9^1})+\dots \\
&\quad +(\underbrace{\frac{1}{10^k}+\dots+\frac{1}{10^k}}_{8\times 9^k})+\dots \\
&= (8\times 9^0\times\frac{1}{10^0})+(8\times 9^1\times\frac{1}{10^1})+\dots \\
&\quad +(8\times 9^k\times\frac{1}{10^k})+\dots \\
&= 8\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k \\
&= 80.
\end{aligned}
$$

توجه نمایید که $\sum_{9\in n}\frac{1}{n}=\frac{1}{9}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\dots$ واگراست، زیرا این سری بزرگ‌تر از سری واگرای $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10k+9}$ است[4]. هم‌چنین اگر Z_i مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی باشد که دقیقاً i صفر در نمایش اعشاری خود دارند و $t_i=\sum_{n\in Z_i}\frac{1}{n}$، آن گاه بررسی خواص دنبالهٔ $\{t_i\}$ دلپذیر خواهد بود[5]. یک مسألهٔ چالش برانگیز، محاسبهٔ کوچک‌ترین عدد صحیح n است که به ازای آن $A<S_n$ که در آن A یک مقدار داده شده است.

اثبات‌های متداول واگرایی سری همساز در کتاب‌های ریاضی عمومی معمولاً بر اساس یکی از این دو روش است:

الف) نامساوی $\ln(n+1)=\int_{1}^{n+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=S_n$.

ب) برهان نیکول ارسم (Nicole Orseme) در سال ۱۳۵۰ میلادی که در آن ثابت می‌شود $S_{2^n}\geq 1+n(\frac{1}{2})$ و از آن نتیجه می‌شود دنباله‌ی $\{S_n\}$ که دارای یک زیردنبالهٔ بی‌کران $\{S_{2^n}\}$ است، واگراست.

در ذیل به چند اثبات زیبای دیگر اشاره می‌کنیم و خوانندهٔ علاقمند را برای آشنایی با اثبات‌های دیگر واگرایی سری همساز به [6, 7] ارجاع می دهیم.

- **اثبات اول** Honsberger. ۹ عدد یک رقمی وجود دارد که وارون هر یک، از $\frac{1}{10}$ بیش‌تر است. پس $S_9>\frac{9}{10}$. هم‌چنین ۹۰ عدد دو رقمی وجود دارد که وارون هر یک، از $\frac{1}{100}$ بیش‌تر است و لذا $S_{99}>\frac{9}{10}+\frac{90}{100}=2(\frac{9}{10})$. با استقرا می‌توان نشان داد که $S_{10^k-1}>k(\frac{9}{10})$. چون $\{S_{10^k-1}\}$ یک زیر دنبالهٔ بی‌کران از $\{S_n\}$ است پس $\{S_n\}$ واگراست.

- **اثبات دوم** Honsberger. بنا به بسط مک لورن، برای هر عدد حقیقی نامنفی x، $e^x>1+x$ پس

$$e^{S_n}=e^{1}e^{\frac{1}{2}}\dots e^{\frac{1}{n}}\geq(1+1)(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n})=n+1$$

پس $\{e^{S_n}\}$ و در نتیجه $\{S_n\}$ واگراست.

- **اثبات** Gillman. اگر سری همساز همگرا به S باشد، آن گاه

$$
\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\\
&= (1+\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})+\dots\\
&> (\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})+\dots\\
&= S
\end{aligned}
$$

که ممکن نیست.

- **اثبات** Cohen-Kinght. اگر سری همساز همگرا به S باشد آن گاه

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}S$$

پس

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$$

که ممکن نیست، زیرا برای هر k، $\frac{1}{2k-1} > \frac{1}{2k}$.

- **اثبات** Oliver. مبتنی بر این قضیه است که اگر $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ مثبت و نزولی و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\lim_n (na_n) = 0$.

- **آزمون مقایسهٔ حدی.** چون $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$ و سری تلسکوپی $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln n)$ واگراست، پس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ نیز واگراست.

- **اثبات** Word. به وضوح $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$. اگر سری همساز همگرا می بود، آن گاه $0=\lim_n S_{2n}-\lim_n S_n=\lim_n(S_{2n}-S_n)\geq\frac{1}{2}$ که متناقض با $\frac{1}{2}>0$ است.

- **حسن ختام.**

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+(\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6})+(\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{21})+\\
&(\frac{1}{22}+\dots+\frac{1}{66})+\dots>1+1+1+1+\dots
\end{aligned}
$$

مراجع:

[1] B. Schmuland, Random harmonic series, Amer. Math. Monthly 110 (2003), no.5, 407-416.

[2] M. E. Hoffman and C. Moen, Sums of triple harmonic series, J. Number Theory 60 (1996), no.2, 329-331.

[3] G. H. Behforooz, Thinning out the harmonic series, Math. Magazine 68 (995), 289-293.

[4] R. Baillie, Sums of reciprocals of integers missing a given digit, Amer. Math. Monthly, 86 (1979), 372-374.

[5] A. D. Wahwa, Some convergent subseries of the harmonic series, Amer. Math. Monthly 85 (1978), no. 8, 661-663.

[6] S. J. Kifowit and T.A. Stamps, The harmonic series diverges again and again, The AMATYC review 27 (2006), 31-43.

[7] S. J. Kifowit, More proofs of divergence of the harmonic series, Online:`http://www.prairiestate.edu/skifowit/htdocs/harm2.pdf`.

* گروه ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد

★ ★ ★