

## مصاحبه با آلن کن (Alain Connes)

قسمت اول

به نقل از خبرنامه انجمن ریاضی اروپا، مارس ۲۰۰۷، صص

۲۵-۳۰



• آیا به ریاضی دانی از گذشته احساس نزدیکی می کنید؟

نمی توانم بگویم به ریاضی دانی نزدیک بوده ام، اما یکی به خصوص وجود دارد که موجب تحسین من است: گالوا. ویژگی های تکان دهنده ای در نوشته هایش وجود دارد، فرمول بندی آن ها به طور متحیرانه ای ساده اند. به عنوان مثال "معادله ای با  $n$  ریشه متفاوت اختیار نمایید. آنگاه به عنوان اولین گزاره، تابعی گویا از این ریشه ها وجود دارد به قسمی که اگر ریشه ها را جایگشت دهیم!  $n$  مقدار متفاوت اختیار می نماید، و گزاره دوم بیان می دارد که ریشه ها توابع گویایی از این تابع اند."

علیرغم این سادگی اغفالگرانه فرمول بندی ها، با استفاده از گزاره های فوق گالوا توانست به نتایج بی نهایت دورتری دست یابد. او معادله ای را می نویسد که ریشه هایش  $n!$  مقدار متفاوت تابع گویاست، او این معادله را به حاصلضربی از عوامل تحویل ناپذیر تجزیه می نماید و سپس یکی از آن ها را برمی گزیند. او سپس استدلال می نماید که چگونه ریشه های معادله ای که از اول برگزیده بود به ریشه های این عامل بستگی دارند و آنگاه به یک گروه دست می یابد. او نشان می دهد که این گروه مستقل از تمام انتخاب هایی است که در این فرآیند انجام گرفته است. به جهت دستیابی به این مطلب وی گروه را به طور مجرد با خاصیت زیرسرتش نمایی می کند: "تابعی از ریشه ها به طور گویا معین می گردد اگر و تنها اگر تحت چنین گروهی پایا باشد."

خیلی ساده است. چیزی که من آن را افسانه می یابم چنین خیزشی با استفاده از قدرت تجرید است، یک چنین گام عظیم در

مفهوم سازی چیزها. قدرت شهودی گالوا بر اساس ایده تقارن نیست بلکه بر اساس ابهامات می باشد. طبعاً، ممکن است بگوئید که او گروه پایای توابع معینی را مطالعه کرد. اما اولین گام گالوا درست در جهت مخالف است: او تا آنجا که ممکن است تقارن را با انتخاب تابعی که ابداً گروه پایایی ندارد، می شکند. ریاضی دانان قبل از وی، مانند کاردانو و لاگرانژ، با توابع متقارنی از ریشه ها کار می کردند. گالوا با قدم نهادن جای پای آبل، در جهت مخالف چنین عمل می کند: تابعی با کمترین تقارن ممکن را انتخاب می نماید. و این تابعی است که وی با آن شروع می کند.

آنچه که برای من تکان دهنده است برکت این ایده هاست، فرمول بندی های گوناگونی که تاکنون از بسط آن ها داشته ایم هنوز قدرت آن ها را به پایان نبرده است. ایده های گالوا دارای وضوح، روشنی، و پتانسیل تحریک افکار است که تا امروز رام نشده باقیمانده و هنوز هم در مغز ریاضی دانان پژواک می کند. این افکار باعث به وجود آمدن مفاهیم بزرگی هم چون رسته تاناکیان (Tanakian) یا تناظر ریمان - هیلبرت شده است. ... این ایده ها خیلی زیبا هستند ولی غالباً با چنان قواعدی همراهند که در نگاه اول مانند یوغ بزرگی به نظر می رسند و چنین احساسی به شخص دست نمی دهد که این ایده ها زمانی توسط گالوا آزاد شده اند. نمونه مجسم دیگری از ایده های گالوا نظریه دیفرانسیل گالوا و نظریه موتیوها (Motives) می باشد، که می توان آن را به عنوان مشابه نظریه گالوا در ابعاد بالاتر مشاهده نمود.

اما آیا واقعاً فهمیدیم گالوا چه در سر داشت وقتی که نوشت: "اندیشه های اصلی من مدت زمانی است که روی پیاده کردن تحلیل های متعالی از نظریه های مبهم هدایت شده است. موضوع بر سر این است که از قبل بینیم و بفهمیم که در یک ارتباط بین کمیت ها یا کاربردهای متعالی چه کمیتی را می توانیم با کمیت های داده شده جایگزین نماییم بدون این که رابطه آن ها قطع شود. این عمل امکان ناپذیری خیلی چیزهایی را که به دنبالشان هستیم به ما نشان می دهد. اما من وقت ندارم و افکار من هنوز درباره این زمینه که خیلی هم عمیق است به حد کافی گسترش نیافته است". اما به جز گالوا ریاضی دانان دیگری نیز وجود دارند که واقعاً در مراحل اولیه به عنوان منبع الهام به من کمک کردند. چنین نیست که من در کارم احساس می کنم که به آن ها نزدیک هستم، اما کار آن ها را تحسین می نمایم. ابتدا مجذوب کارهای جاکوبی (Jacobi) شدم، زیرا روش محاسباتی وی را شگفت انگیز یافتیم. سپس فن نیومن (von Neuman) به خاطر عمق کشفیات وی و سخنرانی های علمی وی ... و هم چنین تومیتا (Tomita). من مجذوب شخصیت مرموز تومیتا شدم، او کسی است که از تمام تله هایی که جامعه برای افراد بی نهایت اصیل به کار می گذارد سالم مانده است. او در سن دو سالگی گرسه. هنگامی که وی تحقیق را شروع نمود، استاد راهنمای رساله وی یک کتاب بسیار قطور به وی داد و گفت "وقتی که این کتاب را خواندی بیا و مرا ببین" اتفاقاً دو سال بعد تومیتا این استاد را دید و استاد از وی پرسید "کتاب را چگونه یافتی؟" تومیتا در جواب گفت، "بعد از یک هفته آن را گم

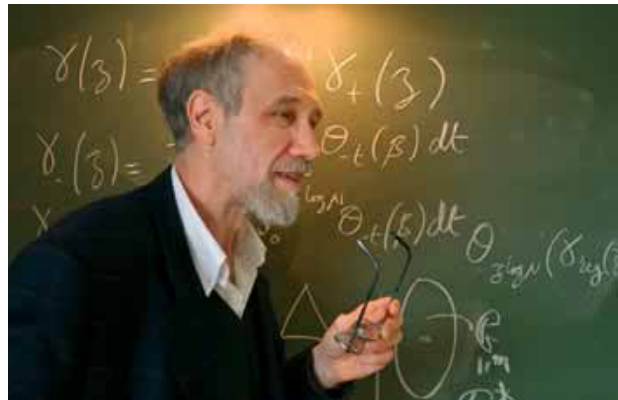
اعداد اردینال قابل اثبات است این است که سرانجام لاک پشت برنده می شود. یعنی پس از تعداد مراحل متناهی و حتی علیرغم این که شما احساس می کنید که پس از هر مرحله خرگوش یک قدم غول آسا برمی دارد، حاصل صفر می گردد!

چیزی که باور کردن آن مشکل به نظر می رسد این است که مطلب فوق را نمی توان در چهارچوب حساب پیمانو (Peano) ثابت کرد. برای اثبات از نظریه اعداد اردینال استفاده می شود! در واقع می توان نشان داد که تعداد مراحل قبل از برنده شدن لاک پشت سریع تر از تابع صریحی از  $N$  رشد می کند. با استفاده از کامپیوتر می توانید مشاهده کنید که پس از چند مرحله به صفر می رسیدیم. اما اثبات این که لاک پشت برنده می شود با استفاده از نظریه اعداد اردینال فقط یک سطر است. چگونه؟ پس از انتخاب عدد اولیه و جایگزینی پایه به ۲، ۳ و غیره آن را با عدد اردینال  $\omega$  جایگزین نماییم. مثلاً ۵ مساوی  $1 + 2^2$  است که آن را به صورت  $1 + \omega^2$  می نویسیم. عدد اخیر یک اردینال است و هر اردینال یک مجموعه خوش ترتیب و هر دنباله کاهشی از اعداد اردینال لزوماً متوقف می گردد. اکنون هنگامی که حرکت خرگوش را انجام می دهید، چیزی تغییر نمی کند، اما حرکت لاک پشت یک واحد از عدد می کاهد و به این ترتیب یک دنباله اکیداً کاهشی از اعداد اردینال به دست می آورید. این دنباله باید متوقف گردد، و به این ترتیب مطلب از پیش گفته ثابت می گردد. از  $\omega^2$  و غیره استفاده می شود، و تعجب آور نیست که فراتر از حساب پیمانو به پیش می رود. این یک نمونه از مطالبی بود که در سمینار شوکه درباره آن بحث می کردیم. اما آنچه گفته شد امروزه در فرهنگ ریاضیات فراموش شده است، اما در واقع موضوعی بی اندازه غنی می باشد. ما در یک جهان ریاضیات زندگی می کنیم که بیشتر و بیشتر تک فرهنگی می گردد. ما اصولی را منتشر می نماییم و می گوئیم که چه ریاضیاتی مهم است و چه ریاضیاتی مهم نیست. نظر من مخالف این است. باید بگذاریم مکاتب شکوفا شوند. این برای سلامت ریاضیات خیلی مهم است.

#### • جبرهای عملگری و اتفاقات دیگر: چگونه همگی این ها به وقوع پیوست؟

در سال ۱۹۷۰ به مدرسه تابستانی Les Houches [۵] (با موضوع فیزیک) رفتم که البته شوکه مرا فرستاد. در آن موقع، من درباره آنالیز غیر استاندارد کار می کردم اما پس از مدتی در این نظریه دچار مشکل شدم. ... نکته این است که به محض این که عدد غیراستاندارد داشته باشی، یک مجموعه غیراندازه پذیر به دست خواهی آورد. و در حلقه شوکه، که مکتب لهستانی را خوب درک کرده بود، می دانستیم که هر مجموعه اندازه پذیر است. بنابراین سعی در کاربرد آنالیز غیراستاندارد در فیزیک کاملاً محکوم به شکست به نظر می رسید. اما برای من به عنوان مجوز ورود به Les Houches در سال ۱۹۷۰ مفید واقع گردید. و از آن جا به عنوان وابسته انستیتو باتل [۶] انتخاب شدم و دعوتنامه ای برای رفتن به سیاتل دریافت

کردم. ... اما فکر می کنم تازه ترین و ناب ترین منبع گالوا است. شاید خیلی عجیب و غریب باشد اما من هرگز گالوا را از مخلوط قوی سادگی و باروری جدا نکرده ام.



#### • آیا مایلید چیزی درباره شوکه (Choquet) بگوئید؟

سال های اولی را که تحقیق می کردم به خاطر می آورم، به تنهایی در خانه کار می کردم، اما هر پنجشنبه در سمینار شوکه شرکت می کردم و او با ادراک و ذکاوتی که داشت پرتوافشانی می کرد. سوالات بیشماری مطرح می کرد که بی اندازه باز بودند. و این به تحقیقات من عمیقاً شکل داد. اما شوکه چیز منحصر به فردی داشت: او خیلی به مکتب ریاضی لهستان قبل از جنگ جهانی دوم نزدیک بود و لذا خیلی از مطالبی را که معمولاً جزئی از سرفصل های ریاضیات شناخته نمی شوند می دانست که البته خیلی هم جالب بودند.

فقط در ارتباط با شوکه بود که من نظریه اعداد اردینال را یاد گرفتم. ممکن است فکر کنید که این نظریه بی فایده است، اما این تفکر مطلقاً اشتباه است. به عنوان مثال، به خاطر می آورم که یک بار مؤسسه IHES [۴] یک روز آزاد دیدار از این مؤسسه را داشت. دانش آموزان سال اول دبیرستان آمده بودند که در میان آنها یک دختر با ذکاوتی تحسین برانگیز وجود داشت. بعد از این که موضوع عدم تصمیم گیری به میان آمد، من مثالی از نظریه اعداد اردینال به آنها ارائه دادم، داستان خرگوش و لاک پشت. عددی چون  $N$  انتخاب کنید، البته نه خیلی بزرگ (آن ها عدد ۵ یا چیزی نظیر آن را انتخاب کردند). دانش آموزان می دانستند چگونه یک عدد را در پایه های مختلف مانند ۲، ۳ و غیره بنویسند. من برای آنها شرح دادم که عددی را در پایه ۲ می نویسیم، آنگاه خرگوش می آید و تمام ۲ها را تبدیل به ۳ می نماید. بنابراین  $1 + 2^2 = 5$  جایگزین  $1 + 3^2 = 28$  می گردد. ... و سپس لاک پشت یک واحد از این عدد می کاهد و لذا حاصل ۲۷ می شود. در مرحله بعدی این عدد را در پایه ۳ می نویسیم یعنی  $3^3 = 27$  و بعد خرگوش همه ۳ها را به چهار تبدیل می کند و لاک پشت یک واحد از نتیجه می کاهد و  $255 = 4^4 - 1$  حاصل می گردد. عمل فوق به ترتیبی که گفته شد متوالیاً تکرار می شود. پدیده فوق العاده ای که با استفاده از نظریه

می‌کرد. دست آخر فقط یکی مانده بود، من دستم را بالا بردم و مقاله را دریافت نمودم. در راه بازگشت به خانه که با قطار [Y]RER صورت گرفت کمی کسل شده بودم. اندکی به مقاله‌ای که دریافت کرده بودم نگرستم و سپس کاملاً به پشت دراز کشیدم. به زودی تشخیص دادم که در این مقاله فرمول‌هایی وجود دارد که اگر تساوی آن‌ها را بنیم کاملاً دیوانه‌ام. این فرمول‌ها با فرمول‌های نظریهٔ تومیتا مطابقت داشتند، و این فرمول‌ها بیان می‌داشتند که بردار معینی برای عملگری که تومیتا تعریف کرده بود یک بردار ویژه است.

یک ساعت پس از رسیدنم به خانه، نامه‌ای به دیکسمیه نوشتم و گفتم پایاهای اریکی - وودز این طور هستند و نظریهٔ تومیتا هم این است و شما می‌توانید دریابید که اولین پایاها را می‌توانید از اشتراک طیف‌های عملگرهای تومیتا به دست آورید و سپس فرمول آن را نوشتم، و چون در مکتب شوکه تربیت شد بودم، همهٔ مطالب فوق را در نیم صفحه نوشتم. دیکسمیه بلافاصله جواب داد "چیزهایی که نوشتید کاملاً ناقص‌اند و من جزئیات آن را می‌خواهم" ناچار شدم که در جواب جزئیات را در سه صفحه بنویسم، که مشکل نبود، و شرح دادم که می‌توان پایائی را تعریف کرد که من آن را S (به توضیح [۱] مراجعه کنید) نامیدم. دیکسمیه قراری را مشخص کرد که پس از سمینار بعدی اش وی را ببینم. من رفتم و او را ملاقات نمودم و حرفی که به من زد این بود "Foncez" که به زبان فرانسه شکل قوی "به کارت ادامه بده" است. و این نقطهٔ آغاز پرواز بود. واقعاً شانس بزرگی نصیب شد، واقعاً خیلی مشکل نبود. با وجودی که با شفافیت نوشته نشده بود ولی پایای موردنظر در فرمول‌ها بود.

مطمئنم که اگر در پاریس مانده بودم، و اگر از لاک خود خارج نمی‌شدم، آن‌گاه به تحقیق در یک زمینه باریک ادامه می‌دادم و افق کاملاً متفاوتی را باز نمی‌کردم. من واقعاً در آن لحظات این احساس را داشتم که تنفسی از هوای تازه نصیبم شده و اجازه داده است که راهی به یک قسمت مرکزی ریاضیات پیدا نمایم. پیش از آن اعتقاد داشتم که در جهان ریاضیات دوایر هم مرکز وجود دارند، و اگر شخصی در قسمتی خارج از مرکز کار کند سعی نماید که به تدریج به قلب ریاضیات نزدیک‌تر شود.

#### • این قلب چیست؟ آیا یک چیز ذهنی است؟

منظورم از قلب ریاضیات آن قسمتی است که اصولاً به تمام قسمت‌های دیگر مربوط است. مانند این ضرب‌المثل که "تمام جاده‌ها به رُم ختم می‌گردند" منظورم این است که وقتی که یک تصویر ذهنی از یک موضوع ریاضی روشن می‌گردد، در واقع تشخیص می‌دهید که مستقل از مبحثی که شروع کرده‌اید، اگر به حد کافی دقیق به آن بنگرید، پس از مدت کوتاهی به سمت این قلب همگراست: فرمول‌های پیمانهای، توابع  $L$ ، حساب، اعداد اول، خیلی از چیزها به این مفاهیم ربط دارند. این بدان معنا نیست که این چیزها مشکل‌ترند و من از مثال اشتباه قبلی خود از پیروی کردن دربارهٔ مباحث هم مرکز متنفرم. منظورم این است که اگر به حد کافی در ریاضیات تحقیق کنید، مجبور خواهید شد که سراغ این

نمودم. من این دعوت را صرفاً به دلیل آمریکا پذیرفتم - حتی من نگاهی به برنامهٔ این انستیتو نکردم، و اتفاقی که واقع گردید این بود که توفقی در پرینستون داشتم تا برادرم را ببینم و به‌طور تصادفی کتابی از کتاب‌فروشی پرینستون خریدم. موقع خرید از بین چند کتاب با تأمل بسیار کتابی که توسط تاکه‌ساکا (Takesaki) دربارهٔ نظریهٔ تومیتا نوشته شده بود نظر مرا به خود جلب نمود و از آن جایی که می‌دانستم یک سفر طولانی با قطار در پیش رو دارم لذا کتاب را خریدم. نمی‌توانم بگویم که در طول مسافرت کتاب را خواندم، فقط آن را روخوانی کردم، زیرا مسافرت طولانی‌ام در غرب میانه آمریکا ادامه داشت و مطالب کتاب نیز خیلی سنگین بود. اما حادثهٔ خارق‌العاده‌ای که برای من اتفاق افتاد این بود که وقتی که به سیاتل رسیدم، هنگامی که برنامه را دیدم دریافتیم که تاکه‌ساکا دربارهٔ نظریهٔ تومیتا درس می‌دهد. از آن روز به خودم گفتم "خودش است، به کلاس درس دیگری به جز کلاس تاکه‌ساکا نمی‌روم"



#### • این اظهار نظر خیلی عالی نیست ....

نه، به علاوه در آن ایام من عاشق هر چیز جز ژاپن بودم، بیشتر در سطح حساسیت نسبت به چیزی کاملاً متفاوت بود، که من آن را اصلاً نمی‌دانستم. اگر بخواهیم از گذشته درس بگیریم باید اعتراف نمایم که این طرز فکر مرا کاملاً از حلقهٔ ایده‌هایی که در آن زمان مرا به خود مشغول کرده بودند واداشت. اما پس از آن اتفاق دیگری رخ داد، یعنی وقتی که از آنجا برگشتم خوشبختی دیگری به سراغم آمد. مقدار کمی از نظریهٔ تومیتا را فهمیده بودم ولی قادر به تحقیق نبودم. اما هنگامی که از سیاتل برگشتم به خودم گفتم که باید به سمیناری در پاریس دربارهٔ جبرهای عملگری بروم. به این ترتیب به سمینار دیکسمیه (Dixmier) رفتم. روز اول که به آن جا رسیدم جلسهٔ برگزاری سمینار بود و موضوع اصلی که برای سال تحصیلی در نظر گرفته شده بود کارهای تحقیقاتی اریکی - وودز (Ariki - Woods) دربارهٔ حاصلضرب‌های تانسوری بی‌نهایت بود. دیکسمیه مقالات را بین شرکت‌کنندگان به‌طور تصادفی توزیع

من ضریبی متفاوت با آن چه در کتاب ولتمن (Veltman) وجود داشت یافتیم، که مرا مجبور کرد این محاسبات را برای چندمین بار انجام دهیم تا این که ماتیلده مارکولی (Matilde Marcolli)، که هم‌اکنون با وی مشغول نوشتن یک کتاب هستم، ثابت کرد که ضریبی که ما داشتیم درستند و ضریبی که در کتاب ولتمن وجود داشتند در ویرایش دوم کتاب تصحیح شده بودند! همواره این طور ترس دائمی از اشتباه وجود دارد که هنوز هم پس از سالیان متمادی از وجودم رخت برنسته است. و می‌توان گفت که بخشی از مغز انسان دائماً در حال بازرسی و انتشار علائم اخطار دهنده است. ترس من در این باره ماندگار است. به عنوان مثال، چند سال پیش، نزد یانچیم کونتز (Joachim Cuntz) در آلمان رفتم و در برگشت که با قطار صورت گرفت نگاهی به یک مثال عجیب و غریب از کار مشترک با هانری مسکویچی (Henri Moscovici) درباره قضیه شاخص موضعی (local index theorem) انداختم. مقدار خاصی برای پارامتر اختیار نمودم و در قطار خودم را قانع نمودم که قضیه درست نیست. ضایع شده بودم - می‌توانستم این را در چشمان مردمی که در قطار وجود داشتند ببینم. احساس کردم که آن‌ها این شکست را در چهره‌ام می‌دیدند و می‌خواستند کمک کنند ... وقتی به خانه رسیدم، سعی کردم چیزی بخورم ولی نتوانستم. بالاخره، تمام شهامتم را در دو دستم نهادم و به اتاق کارم رفتم و قضیه را یک بار دیگر بررسی نمودم. و معجزه‌ای که اتفاق افتاد این بود که قضیه در این حالت درست بود ... من بارها تنش‌های این‌جوری داشته‌ام.

• چندین بار نوشته‌اید که هندسه شهودی است. در عین حال به نظر می‌رسد که فرمول‌ها در تحقیقات شما نقش اساسی دارند.

آه، بله، مطلقاً درست است. من درباره یک فرمول خیلی بهتر از یک موضوع هندسی می‌توانم فکر کنم زیرا من هرگز اعتماد ندارم که یک تصور هندسی، یک ترسیم، به حد کافی عمومی است. من واقعاً دارای فکر هندسی نمی‌باشم. هنگامی که یک مسأله هندسی وجود دارد و موفق می‌شوم آن را به زبان جبر ترجمه کنم، آن‌گاه به مطلب قشنگی دست می‌یابم. دو مرحله وجود دارد: ابتدا ترجمه، آن‌گاه تفکر جبری خالص. همواره بین طرف شهود (قسمت هندسی) و طرف محاوره‌ای (قسمت جبری) که شخص فرمول‌ها را به کار می‌برد تمایز قائل می‌شوم، و دیگر این که در طرف دوم خیلی بهتر فکر می‌کنم. برای من، جبر به مرور زمان آشکار می‌شود: می‌توانم فرمول را زنده و موجود در زمان ببینم، در صورتی که درباره هندسه چیزی خلق‌الساعه وجود دارد و من مشکلات خیلی بیشتری با آن دارم. هر چه بیشتر پیش می‌روم، فرمول‌ها تصاویر ذهنی خلق می‌نمایند.

• اغلب این‌طور نشان می‌دهید که به محاسبه عشق می‌ورزید.

مطلقاً بله. تفکر ریاضی من عمیقاً به محاسبات بستگی دارد. اما،

مطالب بروید، یعنی نمی‌توانید خارج از حیطه آن‌ها باشید. اگر چنین باشید، تا اندازه‌ای خیالتان راحت است. شما می‌توانید با دستکاری روش‌ها در مبحث به خصوص موفق به نوشتن مقالات بسیاری شوید اما اگر به طرف این قلب حرکت نکنید احساس می‌کنید که شما را کنار گذاشته‌اند. البته این یک نظر عجیب و مطمئناً ذهنی است.

• در تحقیقاتتان، نتایجی جرقه آسا داشته‌اید - مثلاً از کشف پایای  $S$  صحبت کردید. هم‌چنین حالت هم‌دور  $2 \times 2$  و چیزهای دیگری که حاصل کوشش‌های توان‌فرسای شما بوده است.

البته. این حقّه ماتریس‌های  $2 \times 2$  که دارای سادگی محض است (به توضیح [۲] مراجعه کنید) به‌طور ناگهانی به ذهنم رسید و این هنگامی بود که مدت سه ماه در حال انجام محاسبات وحشتناکی بودم، من در حال انجام محاسبات مربوط به خودریختی‌های پیمانانه‌ای با وضعیت تقریباً دوره‌ای و غیره بودم. در واقع، قبل از کشف این خاصیت هم‌دوری، به تجربه آن را دیده بودم. حقّه ماتریس  $2$  در  $2$  به‌طور شانسی به من الهام شد، اما از آن‌جا که زمینه برای هزاران مثال آمادگی داشت لذا به دنبال آن هزاران محاسبه نیز انجام شد.



برداشت من این است که هیچ‌گاه چیزی را به قیمت ارزان به دست نیآورده‌ام. تمام نتایج من حاصل آمادگی قبلی من بوده است - نشستن و کار کردن، آزمایش‌های طولانی - به امید این که در انتهای این آزمایشات یک ایده خارق‌العاده ساده به ذهنم برسد و مسأله حل بشود. بعد از این شخص باید اثبات خود را بازرسی نماید، که البته این کار باید انجام شود زیرا همیشه این ترس که اشتباه کرده باشی وجود دارد. هرگز اجازه نمی‌دهم که کسی باور کند که اگر کاری نکند نتایج خود به خود به سراغ وی خواهد آمد.

من تمام تابستان سال ۲۰۰۶ را مشغول واری فرمولی بودم که مدل استاندارد برای جاذبه در کار مشترکمان با شمس‌الدین (Shamseddine) و مارکولی (Marcolli) بود. این محاسبه یک شاهکار است: در مدل استاندارد، چهار صفحه از جملات با ضرایب  $\frac{1}{8}$ ،  $\frac{1}{4}$  و هم‌چنین سینوس و کسینوس زاویه واینبرگ (Weinberg) وجود داشت. ... و اگر همه چیز را با ضرایب تطبیق نمی‌دادیم، نمی‌توانستیم ادعا کنیم که از این محاسبه نتیجه درست حاصل می‌گردد.

حافظه‌تان می‌باشد تا این‌که بتوانید از آن‌ها در حل مسأله استفاده نمایید. این تجربه را من به دیگران توصیه می‌نمایم - خوب، البته، افراد دارای اعمال متفاوتی‌اند - البته اگر آن‌ها نخواهند به کاغذ و مواد وابسته باشند.

زیرا با کاغذ و مواد تحریک می‌شوید که بلافاصله مقاله بنویسید و چنانچه اگر قبل از آن به حد کافی فکر نکرده باشید، به جایی نخواهید رسید. شما قبل از این‌که وقت کافی داشته باشید که در قسمت محاوره‌ای مغز تصویر ذهنی مشخصی را خلق نمایید ناامید خواهید شد و طبق معمول چسب و وصله کردن و تبدیل مسائل به چیزهای کوچک‌تر آن‌ها را به حرکت درمی‌آورد.

اگر محاسبه نمایید، خیلی مهم است که اشتباه نکنید. راه‌های متعددی برای آزمایش وجود دارد، به‌عنوان مثال استفاده از راه‌های متفاوت برای رسیدن به یک نتیجه واحد. هم‌چنین شخص می‌تواند حس کند آیا نتیجه یک محاسبه درست به نظر می‌رسد یا نه. به خاطر می‌آورم هنگامی که با میشل دوبوا - بولت (Michel Dubois-Violette) کار می‌کردم، مجموعی از ۱۴۴۰ انتگرال داشتیم که هر کدام انتگرالی روی دوره تناوب یک تابع گویا از توابع تتا و مشتقات آن‌ها بود. توقع داشتیم که این مجموع یک تجزیه ساده داشته باشد. در واقع، به نتیجه ساده‌ای رسیدیم که حاصلضربی از توابع پیمانه‌ای، بیضوی و غیره بود. هنگامی که درمی‌یابید که مجموعی به آن عظمت به حاصلضرب تجزیه می‌گردد، اطمینان خاطر پیدا می‌کنید که هیچ اشتباهی در طول محاسبه رخ نداده است.

• هندسه ناجابه‌جایی چیست؟ به عقیده شما، آیا هندسه ناجابه‌جایی صرفاً نام بهتری برای جبرهای عملگری [۸] است یا این‌که زمینه‌ای نزدیک ولی متفاوت با آن است؟

بله، خیلی مهم است که شفاف صحبت کنیم. ابتدا، هندسه ناجابه‌جایی برای من عبارتست از دوگانگی بین هندسه و جبر، یا تفاوت‌های تکان‌دهنده بین قوانین جبری و قوانین محاوره‌ای. زبان معمولی هرگز از پیرانتز بین واژه‌ها استفاده نمی‌کند. این بدان معناست که در این زبان شرکت‌پذیری وجود دارد، اما قانون جابه‌جایی برقرار نیست، یعنی نمی‌توانیم آزادانه واژه‌ها را جابه‌جا کنیم. با قوانین جابه‌جایی نام من در یک پیام رمز که اخیراً یکی از دوستانم برایم فرستاد چهار دفعه ظاهر شد. (اصل متن فرانسه در [۳] نوشته می‌شود).

بنابراین جابه‌جایی به طریقی اشیاء را کدر می‌نماید. در جهان ناجابه‌جایی، که در فیزیک در سطح سامانه‌های میکروسکوپی نمایان است، ساده‌سازی با استفاده از قانون جابه‌جایی دیگر مجاز نیست. و این تفاوت بین هندسه ناجابه‌جایی و هندسه معمولی است که در آن مختصات با هم جابه‌جا می‌شوند. به نظر می‌رسد کلکی در این واقعیت که قوانین کلمات با قوانین نوشتن محاسبات جبری یکی است وجود دارد، یعنی شرکت‌پذیری و نه جابه‌جایی. دوم، برای من راه عبور به هندسه ناجابه‌جایی دقیقاً عبارتست از راه عبور

البته، محاسبه کافی نیست. شخص باید چیزها را در سطح مفهومی تفسیر نماید. گالوا یکی از نخستین افرادی بود که فهمید می‌توان محاسبه‌ای را انجام داد حتی اگر عملاً کاربردی نداشته باشد. به‌عنوان مثال، معادله درجه هفتمی در نظر بگیرید، چند جمله‌ای که گالوا به آن نسبت داد از درجه ۷! است. و شخص باید آنرا تجزیه نماید. وقتی که گالوا می‌گوید:

”به نظر من وظیفه هندسه‌دانان آینده این است که درباره این محاسبات دقت نمایند: طبقه‌بندی عملیات، آن‌ها را بر اساس مشکل بودنشان طبقه‌بندی کنید نه بر اساس فرم آن‌ها.“ یعنی شخص باید از روی محاسبات بپرد، و آن‌ها را بر حسب درجه سختی‌شان تنظیم نماید. شخص باید آن‌ها را انجام دهد اما فقط به‌عنوان یک تجربه فکری و نه با استفاده از کامپیوتر.



در مثال گالوا، می‌توانید یک تابع صریح  $F$  از ریشه‌های معادله  $E = 0$  بسازید که  $x$  مقدار متفاوت تحت جایگشت‌های ریشه‌ها می‌پذیرد - شما فقط یک فرم خطی با ضرایب گویا در نظر می‌گیرید. سپس می‌توانید به کار خود ادامه داده و ریشه‌های  $E = 0$  را به‌عنوان توابع گویایی از  $F$  بیان نمایید، این کار با استفاده از الگوریتم اقلیدس و روش حذفی امکان‌پذیر است. شخصی می‌تواند از کامپیوتر استفاده نماید، در این صورت برداشت وی به طرز وحشتناکی پیچیده می‌شود، حتی در حالتی که درجه معادله  $E = 0$  مساوی ۴ یا ۵ می‌باشد. اگر سعی کرده باشید که محاسبات را صحیح انجام دهید، خیلی سریع در پیچ و خم نتایج گرفتار خواهید شد. در جهت مخالف، چیزی که قادر به انجامش می‌باشید عبارتست از نمایش آن‌ها به صورت مجرد و ساختن موضوعات ذهنی که نمایانگر قدم‌ها و نتایج واسطه در یک سطح ایده‌آلی است. من همواره روش زیر را در مطالعاتم داشته‌ام. سختی مسأله هر چه باشد به جای این‌که ابتدا آن را روی کاغذ بیاورم، برای گردش بیرون می‌روم و سعی می‌کنم تمام مصالح را در مغزم آماده نمایم تا این‌که بتوانم به‌طور ذهنی درباره مسأله فکر کنم. فقط پس از این آمادگی است که می‌توانم به وضوح ببینم، درباره مراحل مختلف فکر کنم و شروع به ساختن یک تصویر ذهنی از مسأله بنمایم. این فرآیند دردناک شامل جمع‌آوری تمام عناصر مسأله در مغزتان و در

دیدگاه‌های فوق را از یکدیگر جدا نمایید بدون این که درستی آن را از بین برده باشید. یک دیدگاه که در سال‌های اخیر من با بیشترین فشرده‌گی روی آن کار می‌کردم عبارتست از تغییر مدل [۹] که تقریباً توسط هندسه ناچابه‌جایی به شما تحمیل می‌شود: این مطلب در مورد دیدگاه متریک که وسیله اندازه‌گیری فاصله‌هاست دیده می‌شود. این جا همان جایی است که عملگر دیراک (Dirac) نقش کلیدی ایفا می‌کند. به جای اندازه‌گیری فاصله‌ها با تعیین کوتاه‌ترین مسیر از یک نقطه به نقطه دیگر، شما به یک دیدگاه دوگان می‌رسید، که هنگام کار کردن با هندسه ناچابه‌جایی به شما تحمیل می‌گردد: تنها راه اندازه‌گیری فاصله‌ها در جهان غیرجابه‌جایی عبارتست از طیف. و این به سادگی عبارتست از فرستادن موج از نقطه  $a$  به نقطه  $b$  و سپس اندازه‌گیری تغییر فاز موج. اتفاقاً این تغییر مدل قبلاً در سامانه متریک اتفاق افتاده است، و این هنگامی بود که در دهه شصت تعریف واحد طول که عبارت بود از طول یک میله ثابت، با طول موج یک خط طیفی از اتم جایگزین گردید. بنابراین تغییری که توسط هندسه ناچابه‌جایی به شما تحمیل می‌گردد قبلاً در فیزیک اتفاق افتاده است. این مثال نمونه نشان می‌دهد که تعمیم ناچابه‌جایی باعث یک تغییر کند و ناگهانی حتی در حالت جابه‌جایی می‌گردد.

اخیراً تشخیص دادم که تنها اطلاعاتی که درباره جهان خیلی دور داریم طیفی است. من نمی‌فهمیدم که "تأمیل به سمت قرمز" [۱۰] یک تغییر فرکانسی نیست بلکه مقیاسی برای فرکانس‌ها می‌باشد. اگر در کائنات به اندازه کافی به عقب برگردیم، فرکانس‌ها با ضریبی تا ۱۰۰۰ تقسیم شده‌اند. این خیلی جالب است. و شما این را خالصانه در روش طیفی می‌بینید. این دیدگاه طیفی چیزی است که به تجربه در مطالعه شما از کائنات حاصل می‌گردد، و این یک توهم نیست. به هنگام نگاه به یک فضای هندسی از زاویه هندسه ناچابه‌جایی داشتن چنین دیدگاهی اجباری است. از این دیدگاه شخص به‌طور خیلی طبیعی به سمت اصل عمل طیفی هدایت می‌گردد، و به شخص توانایی می‌دهد که به‌طور مختصر مشکل عظیم مدل استاندارد علاوه بر جاذبه را به‌طور هندسی بگشاید. چیزی که حادث می‌گردد به‌طور ساده این است که فضای زمان ساختار ظریفی را پذیرا است، کمی مانند طیف اتم است، و مانند پیوستار یا فضای گسسته نیست، ولی مخلوطی هوشیارانه از این دو است.

در کتابی که با ماتلیده مارکولی در حال نوشتن هستم، سیصد صفحه اول کتاب به فیزیک اختصاص دارد: مدل استاندارد و بازرمال‌سازی - در ارتباط با موتیوها و گروه‌های گالوا، و سیصد صفحه آخر کتاب به تابع زتا اختصاص دارد: تشخیص طیفی آن و شکنندگی خودبه‌خود تقارن [۱۱] سامانه‌های حسابی. فعلاً داریم به انتهای نوشتن کتاب می‌رسیم و با کمال تعجب دریافته‌ایم که رابطه عمیقی بین دو قسمت به ظاهر ناپیوسته کتاب وجود دارد. در واقع یک تشابه وجود دارد، یک جدول تبدیل، بین صورت‌بندی شکنندگی خودبه‌خود تقارن که برای سامانه‌های حسابی استفاده می‌شود، توابع زتا، سامانه‌های دوگان و غیره، و صورت‌بندی که

از یک فضای کاملاً ایستا که در آن نقاط با هم حرف نمی‌زنند، به یک فضای ناچابه‌جایی که در آن نقاط به هم مربوطند، همانند اشیاء یکریخت در یک رسته. هنگامی که نقطه‌ای به نقطه دیگر مربوط است، در طرف جبری آن‌ها را توسط ماتریس نمایش می‌دهیم، دقیقاً همان‌طور که هایزنبرگ (Heisenberg) مکانیک ماتریسی سامانه‌های میکروسکوپی را یافت.



اگر شخص بخواهد که در این سطح اکیداً جبری یعنی محاسبات حرفی توقف نماید به جایی نمی‌رسد، اما نقطه واقعی پرواز هندسه ناچابه‌جایی جبر فن نیومن است: چیزی که واقعاً مرا قانع کرد که جبرهای عملگری یک زمینه حاصلخیز تحقیقاتی است هنگامی است که - علتش حقه ماتریس‌های ۲ در ۲ است - تشخیص دادم که یک جبر عملگر ناچابه‌جایی به مرور زمان متکامل می‌گردد! این جبر دارای جریانی از خودریختی‌های متعارف خارجی است و به‌ویژه دارای دوره تناوب می‌باشد! به محض این که این مطلب را بفهمید تشخیص می‌دهید که جهان ناچابه‌جایی به جای این که فقط یک تقارن محوری رنگ پریده باشد، که تعمیم بی‌معنای حالت جابه‌جایی است، دارای چهره‌های جدید و دور از انتظاری است. چون این مولد جریان زمان با استفاده از ناچابه‌جایی است.

با وجود این، من هندسه ناچابه‌جایی را با جبرهای عملگری یکی نمی‌دانم، این زمینه دارای زندگی خودش است. پدیده‌های جدیدی کشف شده‌اند و خیلی مهم است که جبرهای عملگری به خاطر خودشان مطالعه شوند - من بخش بزرگی از زندگی‌م را صرف انجام دادن این کار کرده‌ام. اما از طرف دیگر، جبرهای عملگری فقط قسمت معینی از فضای ناچابه‌جایی را زیر پوشش خود دارد، و "تنها" جبر جابه‌جایی فن نیومن عبارتست از  $L^\infty[0, 1]$ ! اگر بخواهیم مشخص‌تر بگویم، جبرهای فن نیومن فقط نظریه اندازه و  $C^*$  جبر گلفاند (Gelfand) و توپولوژی را پوشش می‌دهد. دیدهای خیلی بیشتری در فضای هندسی وجود دارد: ساختار دیفرانسیل و حیاتی‌تر از آن، متریک.

هندسه ناچابه‌جایی را مطابق آن دسته از کمیت‌هایی که با آن‌ها سروکار دارید می‌توانید به هنگام تجزیه و تحلیل فضا سازمان‌دهی کنید. اما، البته، به‌عنوان یک فرد زنده نمی‌توانید هیچ یک از

که در طرف دیگر تفکر نماییم. درست است که نام هندسه ناجابه‌جایی کمی باعث ناراحتی است، به علت این "نا" ی منفی. چیزی نفی کننده. چیزی که مهم است این است که به آن به عنوان "نه لزوماً جابه‌جایی" فکر کنیم، که به این ترتیب جابه‌جایی را نیز شامل می‌گردد. می‌توانستیم به آن ۳۶ نام دیگر بدهیم. نامی که در قسمت ریمانی بهتر می‌بود عبارت است از "هندسه طیفی". چیزی که این هندسه خیلی خوب نمایانگر آن است عبارت است از این که همه چیزهایی که ما درمی‌یابیم طیفی است، یعنی دیدن آن‌ها از دریچه نظریه مجموعه‌ها درست نیست. می‌توانستیم از نام‌های متعدد دیگری استفاده نماییم، اما مطمئناً نه از نام "کوانتوم".

#### • چرا؟

زیرا در کلمه "کوانتوم" یک انحراف وجود دارد، یعنی در ابتدا اشخاص نمی‌فهمند که کلمه کوانتوم خیلی ناجابه‌جایی نیست. در کلمه کوانتوم این کشف پلانک از فرمول تابش جسم سیاه [۱۳] نهفته است که وی از آن فهمید انرژی باید در کوانتای  $h\nu$  کوانتیزه شود.

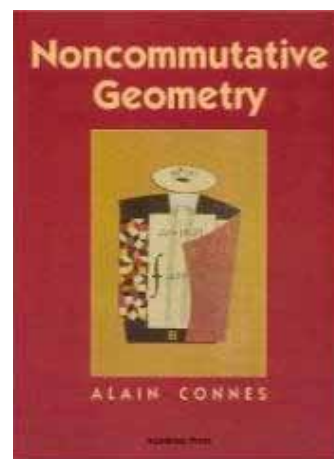
سردرگمی وحشتناکی وجود دارد که توسط افرادی که در نظریه تغییر شکل [۱۴] کار می‌کنند ایجاد شده است، این افراد باعث شده‌اند فرد اعتقاد پیدا کند که کوانتیزه کردن یک جبر فقط به معنای تغییر شکل آن به یک جبر ناجابه‌جایی است. آن‌ها یک فضای جابه‌جایی در نظر می‌گیرند و چون حاصلضرب را به ناجابه‌جایی تغییر شکل می‌دهند، لذا فکر می‌کنند که دارند کوانتیزه می‌کنند. اما این تصور کاملاً اشتباه است. فقط در صورتی موفق به کوانتیزه کردن فضا شده‌اید که تغییر شکل را به یک جبر خیلی مشخص داده باشید: جبر عملگرهای فشرده و سپس بحث صحیح بودن پیش می‌آید، صحیح بودن اندیس فردهولم (Fredholm). استفاده ناصحیح از معنای لغات ایجاد سردرگمی کرده و در فهمیدن موضوع اصلاً کمکی نمی‌کند. به این علت است که من خیلی مایل نیستم که از واژه "کوانتوم" استفاده نمایم - شاید بیشتر پر زرق و برق باشد، اما حقیقت این است که شما فقط در حالات خیلی ویژه چیزی را کوانتومی انجام می‌دهید، در غیر این صورت در حال انجام چیزی غیر جابه‌جایی هستید، همه‌اش همین است. در این صورت ممکن است این تلاش در سطح محاوره‌ای کمتر مد باشد، اما اهمیتی ندارد - این خیلی به واقعیت نزدیک‌تر است.

#### • در تحقیقاتتان چه چیزی بیشتر برایتان اهمیت دارد؟ اتحاد یا تکامل؟

تصمیم‌گیری خیلی دشوار است. هر ریاضی‌دان دارای نوعی ریسمان آریادنه (Ariadne) [۱۵] است که از نقطه شروع تحقیقاتش به آن چسبیده است و مطلقاً باید سعی نماید که آن را پاره نکند. بنابراین یک اتحاد وجود دارد، نوعی مسیر [۱۶]، که شما را مجبور می‌نماید از جایی شروع کنید، و به علت این که شما از این مکان کمی عجیب و خاص شروع کرده‌اید، لذا دارای اصالت و دیدگاهی

برای اشخاصی که سعی می‌کنند جاذبه را کوانتیزه کنند اغواکننده است.

وقتی که در حال تنظیم این فرهنگ لغات بودیم، مفهوم حالت KMS [۱۲] را در نوشته‌های دیگران یافتیم که این مفهوم در کار ما روی شکنندگی تقارن برای سامانه‌های حسابی نقش اساسی بازی می‌کند، هم‌چنین نقشی در شکنندگی تقارن الکتروضعیف (elektroweak) که در مدل استاندارد به هسته جرم می‌دهد نیز دارد. این مطلب به ما اجازه می‌دهد که بیشتر در تشابهات جستجو کنیم و به ما می‌گوید اشخاصی که سعی می‌کنند در یک فضای ثابت جاذبه کوانتمی را توسعه دهند در مسیری اشتباه سیر می‌نمایند. می‌دانیم که کائئات سرد شده است، مطلب فوق هم‌چنین پیشنهاد می‌کند که وقتی که کائئات گرم‌تر از حرارت پلانک بود، هندسه‌ای اصلاً وجود نداشت، و فقط پس از انتقال فاز شکنندگی تقارن خودبه‌خود به وجود آمد که هندسه خاصی را اختیار نمود و کائئات خاصی را که ما در آن زندگی می‌کنیم برگزید. این چیزی است که هرگز فکرش را نمی‌کردیم اگر کتابمان را با دو متن موازی نمی‌نوشتیم. البته در هیچ نقطه‌ای دیده نمی‌شود که یک قسمت کتاب واقعاً از قسمت دیگر آن استفاده می‌کند و یا به آن وابستگی دارد - اما می‌توانید یک تشابه را که بین هر دو قسمت کتاب وجود دارد ببینید.



همان‌طور که اندره ویل (Andre Weil) تذکر داد، این نوع تشابه اسرارآمیزی از بارورترین چیزها در ریاضیات است. مغز انسان هنوز از کامپیوتر جلوتر است، و امیدوارم که هم‌اکنون و برای سال‌های متمادی چنین باشد، و این مغز می‌تواند تشابهات ساختاری بین دو نظریه که محتوایشان کاملاً متفاوت به نظر می‌رسد ولی در آن‌ها پدیده‌های یکسان ظاهر می‌شوند ردیابی نماید. ترجمه هرگز صوری نخواهد بود و همواره دو متن با دو زبان متفاوت وجود خواهد داشت و هرگز یک تناظر یک به یک بین کلمات دو زبان وجود نخواهد داشت. اما علائم عجیبی وجود دارند که اگر سعی کنید که با عجله آن‌ها را به طور خیلی دقیق بنویسید بخار می‌شوند. تکه‌هایی در هر دو طرف وجود دارند که خیلی خوب قابل درک‌اند - یا این که اصلاً قابل درک نیستند. حتی اگر کلیدی برای بازگشایی چیزی نباشند، ما را محدود می‌کند، ما را مجبور می‌نماید

- [۷] RER قطار سریع‌السیر حومه پاریس است
- [۸] operator algebras جبرهای عملگری
- [۹] shift of paradigm تغییر مدل
- [۱۰] red - shift تمایل به سمت قرمز، پدیده‌ای است در امواج الکترومغناطیس مانند نور که در آن خطوط طیف نور به سمت انتهای قرمز طیف تغییر مکان می‌دهند.
- [۱۱] sportaneous symmtry breaking شکست خودبه‌خود تقارن
- [۱۲] KMS احتمالاً حروف اول جمله زیر است  
Knowledge Management System
- و در حالت کلی سامانه‌ای با پایگاه IT که بر دانش‌های مؤسسه مدیریت دارد
- [۱۳] blackbody tadiation تابش جسم سیاه
- [۱۴] deformation theory نظریه تغییر شکل
- [۱۵] Ariadne thread ریسمان آریادنه، اصطلاحی در ارتباط با اسطوره آریادنه از اساطیر یونانی است. از این اصطلاح زمانی استفاده می‌گردد که شرح داده شود مسأله‌ای با تمام قوا و سلاح ممکن حل می‌شود که در مورد مسائل ریاضی به منطق و تمام روش‌های ممکنه ریاضی اطلاق می‌شود.
- [۱۶] Trajectory مسیر

معین می‌باشید که شما را از دیگران متمایز می‌گرداند. و این امری اساسی است، زیرا در غیر این صورت همه شما را در یک قالب می‌ریزند - یعنی هر کس دارای عکس العمل یکسان نسبت به سوالات یکسان خواهد بود. اما این چیزی نیست که ما می‌خواهیم، ما افراد متفاوت با رهیافت‌های خود و با روش‌های خودشان می‌خواهیم. بنابراین در مسیرمان یک اتحاد وجود دارد، که ابداً اتحاد ریاضی نیست. اتحاد ریاضی، که شما آن را به تدریج کشف می‌کنید، هنگامی است که شما تشخیص می‌دهید که مسیرهای متفاوت افراد گوناگون به قلب تپنده ریاضی نزدیک‌تر می‌گردند. اما چیزی که فراتر از همه این چیزها احساس می‌کنم عبارت است از اتحاد، وفاداری نسبت به مسیر.



### سایر توضیحات:

- ۱- ترجمه قسمت دوم مصاحبه در شماره آینده خبرنامه تقدیم حضور خوانندگان خواهد شد.
- ۲- الن کن استاد کالج فرانسه، مؤسسه IHES و دانشگاه وندر بیلت (Vanderbilt) در آمریکا است. برخی از جوایزی که ایشان در دریافت داشته‌اند عبارتند از مدال فیلدز در سال ۱۹۸۲، جایزه کرافورد (Crafoord) در سال ۲۰۰۱ و مدال طلای مؤسسه CNRS در سال ۲۰۰۴.
- ۳- این مصاحبه توسط کاترین کلداستاین (Catherine Goldstein) مدیر تحقیقات مؤسسه CNRS و جورج اسکاندالیس (Georges Skandalis) استاد دانشگاه پاریس ۷ انجام گرفته است.

مترجم: محمدرضا درفشه  
دانشگاه تهران

### توضیحات:

- [۱] اشتراک طیف‌های عملگرهای پیمانه‌ای
- [۲] Groupe modulaire d'une algèbre de Von Neumann, C.R. Acad. Sci. Paris, sér. A - B, 274, 1972
- [۳] Je suis alen connais, et non alsacien. Sítas besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je?

### توضیحات مترجم:

- [۴] IHES مخفف چهار حرف اول مؤسسه‌ای به نام زیر می‌باشد  
Institute des Hautes Etudes Scientifique  
که مؤسسه‌ای تحقیقاتی در فرانسه است و در امور تحقیقات پیشرفته در ریاضیات و فیزیک فعالیت می‌کند و در سال ۱۹۵۸ تأسیس گردید.
- [۵] Les Houches دانشکده‌ای مشترک بین دانشگاه فوریه در گرونوبل و انستیتو ملی پلی‌تکنیک گرونوبل در فرانسه است.
- [۶] Buttelle Institute مؤسسه‌ای تحقیقاتی در ایالت اوهایو آمریکا است.