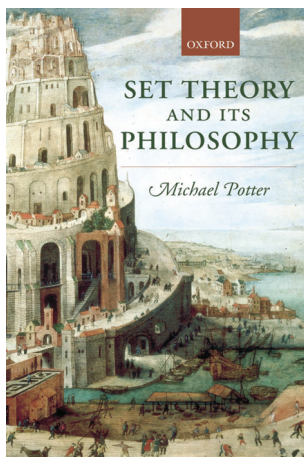


معرفی کتاب

نظریه مجموعه‌ها و فلسفه آن

Potter, Michael, *Set Theory and its Philosophy: A Critical Introduction*, Oxford: Oxford University Press, 2004.

حسن فتح‌زاده*



کوابین به درستی اشاره کرده بود که:

بحرانی که در اوایل این سده با کشف پارادوکس راسل و سایر تعارضات نظریه مجموعه‌ها در مبانی ریاضیات پدید آمد را در نظر بگیرید. از آن‌جا که این تناقضات بایستی با تدابیر غیرشهودی و موردی [مثل بازتعریف «مجموعه»] برطرف می‌شد، اسطوره‌سازی از ریاضیات حالتی تعمیدی [حسابگرانه] به خود گرفت و بر همه آشکار شد.^{۱۸}

این مشکلی است که مایکل پاتر در کتاب ستایش‌برانگیز خود نظریه مجموعه‌ها و فلسفه آن، با روی کردی هوشمندانه و عمیق از آن احتراز کرده است. وجه ریاضیاتی این رویکرد بدیع نخستین بار در سال ۱۹۷۴ در مقاله‌ای از اسکات با عنوان «اصل موضوعی کردن نظریه مجموعه‌ها» در سمپوزیوم ریاضیات محض ارائه شد. شکل نهایی این نظریه اکنون به «نظریه مجموعه‌های اسکات - پاتر» شناخته می‌شود. در این‌جا قرار نیست مجموعه‌ها مطابق معمول با اصول موضوعی جزئی و ریز معرفی شوند، بلکه نخست با تعاریف دقیق و حساب‌شده‌ای زمین بازی آماده می‌شود، سپس تنها با سه اصل موضوعی وجودی (که البته تنها اصل سوم است که به صورت مستقل، وجود یک هویت ریاضیاتی را بیان می‌دارد)،

^{۱۸} Quine, W. V. (1964), *From a Logical Point of View*, Cambridge, MA: Harvard University Press, p. 18.

دهه ریاضیات در دانشگاه یزد

مراسم دهه ریاضیات امسال در دانشگاه یزد در روز شنبه اول آذرماه ۱۳۹۳ با حضور اعضای هیأت علمی دانشکده و جمع زیادی از دانشجویان در سالن آمفی‌تئاتر اصلی دانشگاه برگزار شد. در این جلسه که توأم با جلسه معارفه دانشجویان کارشناسی و تحصیلات تکمیلی ورودی ۱۳۹۳ دانشکده ریاضی نیز بود ابتدا رئیس دانشکده آقای دکتر شاهزاده‌فاضلی و سپس مدیران چهار گروه ریاضی محض، ریاضی کاربردی، آمار و علوم کامپیوتر ضمن خوش‌آمدگویی به حاضرین، به معرفی دانشکده، گروه‌های آن و برنامه‌های آینده پرداختند. سپس آقای دکتر محمدعلی ایرانمنش دانشیار گروه ریاضی محض دانشکده سخنرانی خود را با عنوان «نگاهی اجمالی به پیشرفت ریاضیات در ایران و ضرورت نقش مؤثرتر دانشگاه یزد در این پیشرفت» ایراد نمودند که مورد استقبال و بحث و گفتگوی حاضرین قرار گرفت. در انتهای مراسم نیز از دانشجویان و دانش‌آموختگان ممتاز گروه‌های مختلف و اعضای افتخارآفرین تیم‌های مسابقه‌های ریاضی و المپیادهای دانشکده در مسابقه‌های ریاضی دانشجویی، مسابقه برنامه‌نویسی ACM ICPC، مسابقه جهانی ریاضی دانشجویی (IMC)، المپیاد ریاضی دانشجویی جنوب شرق اروپا (SEEMOUS) و رتبه‌های برتر کنکور کارشناسی و کارشناسی ارشد کشوری که دانشگاه یزد در آن‌ها شرکت فعال داشته و به همت و تلاش سخت کوشانه دانشجویان و اساتید خوب خود امتیازهای ویژه‌ای به دست آورده بود، تجلیل گردید. در این بین آقای امیر کفشدار گوهرشادی بیشترین رتبه‌ها و امتیازات را داشتند که مورد توجه و تشویق ویژه قرار گرفتند.

فرید (محمد) مالک‌قائینی
نماینده انجمن در دانشگاه یزد

مؤسسه آموزش عالی امام جواد (ع) یزد

به مناسبت دهه ریاضیات، مراسم جشنی با شعار «من ریاضی را دوست دارم» برای کودکان و نوجوانان، در سالن آمفی تئاتر مرکز آموزش عالی امام جواد (ع) یزد برگزار گردید. هدف اصلی برگزارکنندگان این جشن، علاقه‌مند کردن کودکان به درس شیرین ریاضی بود، زیرا برای ماور هستیم که علاقه‌مند کردن شخص بعد از ایجاد حس تنفر کار بسیار دشواری است. در این مراسم، که با حضور پرشور کودکان و نوجوانان برگزار شد، مسابقه و بازی‌های مختلفی انجام شد. آقای دکتر سعید علیخانی از دانشگاه یزد از همکاران مؤثر این برنامه بوده‌اند.

بهزاد کفاش

مؤسسه آموزش عالی امام جواد (ع) یزد

درونی پایگان لایه‌ها مربوط می‌شود و به نوعی می‌خواهد بگوید لایه‌ها در صورت وجود، سقف و نهایت ندارند.

۲. اصل آفرینش. برای هر لایه‌ی V لایه‌ی V' وجود دارد که $V \in V'$.

پیش از بیان اصل سوم با چند مفهوم ساده آشنا می‌شویم. تعریف. لایه‌ی روی لایه‌ی V پایین‌ترین لایه‌ای است مانند V' که $V \in V'$.

تعریف. لایه‌ی حدی لایه‌ای است که نه نخستین لایه باشد و نه لایه‌ی روی یک لایه‌ی دیگر.

۳. اصل نامتناهی. دست‌کم یک لایه‌ی حدی وجود دارد.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که چرا این اصل، اصل نامتناهی نام‌گذاری شده است. پایین‌ترین لایه‌ی حدی را V_ω می‌نامیم. قضیه: تاریخچه‌ی V_ω نامتناهی است.

(در این‌جا از تعریف ددکیند (۱۸۸۸) استفاده کرده‌ایم که بنا بر آن یک مجموعه نامتناهی است اگر هم‌عدد با یک زیرگردایه سره‌ی خود باشد.)

اصل سوم یک حکم وجودی را ابراز می‌دارد و از این‌جا نظریه مجموعه‌ها پایه‌گذاری می‌شود.

بخش دوم کتاب به اعداد اختصاص دارد و تلاش می‌کند ریاضیات را در نظریه مجموعه‌ها بنشانند. در این بخش هیجان‌انگیزترین و لذت‌بخش‌ترین بحث‌های کتاب را می‌یابیم. نشان دادن حساب در نظریه مجموعه‌ها به طبیعی‌ترین و اصولی‌ترین شیوه صورت می‌گیرد. بیابید به آغاز این ماجرا نگاهی بیاندازیم. نخست تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

تعریف. فرض کنید r رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد. زیرمجموعه‌ی B از A را r -بسته نامیم، هرگاه $r[B] \subseteq B$.

تعریف. فرض کنید r رابطه‌ای روی مجموعه‌ی A باشد. اشتراک تمام زیرمجموعه‌های r -بسته‌ی A که شامل B باشند را r -بستار B می‌نامیم و با $Cl_r(B)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. یک جبر ددکیند ساختاری است مانند (A, f) به‌طوری‌که f تابعی یک‌به‌یک روی A است و وجود دارد $a \in A - f[A]$ که $A = Cl_f(a)$ اکنون به راحتی می‌توان قضیه‌ی زیر را اثبات کرد.

قضیه: تحت یک‌ریختی یک و تنها یک جبر ددکیند وجود دارد.

این همان مجموعه‌ی اعداد طبیعی است که با چند تعریف مقدماتی و ساده می‌توان حساب را روی آن بنا کرد. در ادامه با تعریف و اثبات وجود خط گویا و خط حقیقی، نشان دادن ریاضیات در نظریه مجموعه‌ها به زیباترین شکل به انجام می‌رسد. نکته‌ی مهم این است که پاتر در این‌جا از مجموعه‌های حاضر و آماده‌ی اعداد

نظریه مجموعه‌ها روی این فضای پیش‌ساخته بنا می‌شود. کار مهم و تعیین‌کننده‌ی این فضا سازی بر عهده‌ی نظریه‌ی «لایه‌ها و تاریخچه‌ها» است. برای این کار از مفهوم حداقلی «گردایه» آغاز می‌کنیم.

تعریف. اگر $\Phi(x)$ یک فرمول باشد، ترم $\iota x(\neg U(y) \wedge (\forall x)(x \in y \leftrightarrow \Phi(x)))$ را «گردایه تمام x ‌هایی که $\Phi(x)$ می‌نامیم» و آن را با نماد اختصاری $\{x : \Phi(x)\}$ نمایش می‌دهیم.

$\iota x\Phi(x)$ نمایش یک توصیف خاص است و به معنای « x یکتایی که $\Phi(x)$ است. در صورت عدم وجود چنین x یکتایی، این ترم به چیزی ارجاع نمی‌دهد.)

در این تعریف از محمول $U(x)$ برای نمایش اتم‌ها استفاده شده است. البته می‌توان بدون استفاده از اتم‌ها نظریه مجموعه‌ها را بنا کرد، اما به دلایل معرفت‌شناختی، پاتر ترجیح می‌دهد آن‌ها را نیز به نظریه‌ی خود راه دهد. به هر حال این بخش از داستان به راحتی قابل جداسازی و حذف از نظریه است.

در همین نقطه‌ی ابتدایی و پیش از معرفی اصول نظریه مجموعه‌ها، نخستین قضیه‌ای که اثبات می‌شود، قضیه‌ی معروف به پارادوکس راسل است:

قضیه (پارادوکس راسل): $\{x : x \notin x\}$ وجود ندارد.

تعریف. b را یک گردایه نامیم هرگاه $b = \{x : x \in b\}$. اکنون وقت آن است که به نظریه‌ی «لایه‌ها و تاریخچه‌ها» پردازیم. تعریف. انباشت a را چنین تعریف می‌کنیم: $acc(a) = \{x : U(x) \vee (\exists b \in a)(x \in b \vee x \subseteq b)\}$.

تعریف. ν را یک تاریخچه نامیم هرگاه $(\forall V \in \nu)(V = acc(\nu \cap V))$.

تعریف. انباشت یک تاریخچه را یک لایه می‌نامیم. به‌طور دقیق‌تر اگر ν یک تاریخچه باشد، $acc(\nu)$ را در صورت وجود، لایه‌ای با تاریخچه‌ی ν می‌نامیم.

حال می‌توانیم «مجموعه» را تعریف کنیم.

تعریف. یک گردایه مجموعه نامیده می‌شود اگر زیرگردایه یک لایه باشد.

نخستین اصل موضوعه‌ای که مطرح می‌شود وجود «مجموعه‌ها» را وابسته به وجود «لایه‌ها» می‌کند.

۱. شمای اصل جداسازی. $\{x \in V : \Phi(x)\} (\forall V)$ وجود دارد.

چنان‌که می‌بینیم هنوز هیچ حکم وجودی مستقلی تا این‌جا مطرح نکرده‌ایم. در اصل موضوعه‌ی دوم نیز هم‌چنان حکم وجودی وابسته‌ای را بیان می‌داریم. این اصل به ساختار

مصوبات شورای اجرایی انجمن

اهم مصوبات و تصمیمات ۲۴امین نشست (۱۳۹۳/۶/۵):

- آقای دکتر واعظپور گزارشی از مسکن انجمن ارائه نمودند. با خرید آپارتمان خیابان فاطمی با حدود مبلغ ۵۸۰/۰۰۰/۰۰۰ تومان موافقت شد.
- با توجه به مذاکرات آقای دکتر عبدالهی با آقای دکتر مهرداد رئیس ISC، در خصوص چاپ بولتن، مقرر شد اولین شماره آماده چاپ بولتن به ISC ارسال شود.
- در خصوص جایزه دکتر بهزاد، آقای دکتر سیدمنصور واعظپور گزارشی ارائه نمودند و پوسترهای آن هم رؤیت شد و پوسترها و نامه‌های آن مورد تأیید قرار گرفت.
- درباره خانم دکتر مریم میرزاخانی برنده مدال فیلدز بحث شد؛ آقای دکتر رجبعلی پورپیشنهاد دادند ساختمانی به نام ایشان در تهران نامگذاری شود.
- با توجه به پیشنهادات اعضا با تأسیس جایزه مریم میرزاخانی موافقت اصولی شد و مقرر گردید فعلاً پیگیری ساختمان در اولویت قرار گیرد.
- با حضور رؤسای پیشین انجمن مصوب شد خانم دکتر مریم میرزاخانی به عنوان عضو افتخاری انتخاب شوند. (طبق بند ۳-۶ ماده ۶ اساسنامه انجمن ریاضی ایران)
- آقای دکتر ایرانمنش گزارشی از کنگره IMU که در کره برگزار شد ارائه نمودند. هم چنین پیشنهاداتی در خصوص تأمین هزینه IMU ارائه دادند.
- با تشکیل کمیته امور بانوان موافقت اصولی و مقرر شد در جلسات بعدی مبنای آن معین گردد.
- نامه دانشگاه شهید باهنر کرمان در خصوص برگزاری «دهمین سمینار دوسالانه جبر خطی و کاربردهای آن» در سال ۹۸ از طرف معاون پژوهشی و فناوری دانشگاه مطرح و با برگزاری آن موافقت شد.
- نامه درخواست آقای دکتر عرفانیان مبنی بر برگزاری «هفتمین کنفرانس ترکیبیات جبری ایران» در روزهای ۲۴ و ۲۵ مهرماه ۱۳۹۳ مطرح و با برگزاری این کنفرانس موافقت شد.
- نامه مورخ ۲۱ مردادماه آقای دکتر عباس سالمی در خصوص عملکرد خانم مولود بیات مطرح و به دلیل تلاش‌های بی وقفه خانم بیات در قرار دادن کلیه شماره‌های الکترونیکی بولتن بدون هیچ تأخیری و پی‌گیری‌های ایشان

گویا و حقیقی استفاده نمی‌کند و با استفاده از مجموعه‌ی اعداد طبیعی ω (که در فصل پیش وجود و یکتایی آن را اثبات کرده بود) و صرفاً در قالب نظریه مجموعه‌ها به تعریف و اثبات وجود و یکتایی آن‌ها (تحت یک ریختی) می‌پردازد.

برای نمونه برای اثبات وجود خط شمارا (که قرار است مجموعه‌ی اعداد گویا در آن نشانده شود) مجموعه‌ی $\{\Phi\} - \mathbb{Q}(\omega)$ که $\mathbb{Q}(\omega)$ (مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های متناهی ω است) را در نظر می‌گیرد با ترتیبی روی آن، که این گونه تعریف می‌شود: اگر $A < B$ اگر و تنها اگر $A \neq B$ و کوچک‌ترین عضوی که تنها در A یا B (و نه هر دو) وجود دارد در A واقع شده باشد. پس از اثبات این که این مجموعه یک خط شمارا است، در برهانی الهام بخش اثبات می‌شود که هر خط شمارایی با این خط یک ریخت است. این فصل، شاهکار زیبایی و هوشمندی در بخش ۲ و البته در کل کتاب است. برای آشنایی با نحوه‌ی ورود به این بحث و قضایای آن به فصل ۷ کتاب مراجعه کنید.

در بخش سوم به گونه‌ای تکنیکال و حرفه‌ای به اعداد اصلی و ترتیبی پرداخته می‌شود و گسترش جالب توجهی در نظریه مجموعه‌ها صورت می‌گیرد.

موضوع بحث برانگیز «اصل انتخاب» و نسبت آن با منطق و ریاضیات، یکی از موضوعات عمده‌ی بخش پایانی کتاب است. در این بخش تعارضات معروف در مبانی ریاضیات مطرح، و تحلیل و نقادی می‌شود.

بحث‌های این کتاب در موارد گوناگون با تحلیل‌هایی فلسفی همراه است که نه تنها مورد استفاده‌ی اهالی فلسفه قرار می‌گیرد، بلکه علاوه بر آن بر عمق و غنای فهم دانشجویان ریاضیات نیز می‌افزاید. هم چنین برای دانشجویان ریاضی تمرین‌های تکمیلی در انتهای هر قسمت آورده شده است که البته چندان زیاد و متنوع نیستند.

در نهایت می‌توان گفت کتاب سیاحتی خاطره‌انگیز و لذت بخش، و البته چالش برانگیز، در مبنای و هزارتوی ریاضیات است؛ سیاحتی که ما را به قلب ریاضیات، و احتمالاً ریاضیات را به قلب ما، نزدیک‌تر می‌سازد.

*دانشگاه زنجان، گروه فلسفه

★ ★ ★

حق عضویت حقوقی دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی در دوره مهر ۹۳ الی مهر ۹۴ مبلغ ۶/۰۰۰/۰۰۰ ریال و حق اشتراک کتابخانه‌ها ۱/۸۰۰/۰۰۰ ریال می‌باشد.