مقاله
جایزه فیلدز سال ۲۰۱۴

مدال فیلدز ۲۰۱۴

ترجمه: علی نوروزی *

این مقاله ترجمه مقاله‌ای به مشخصات زیر است:
2014 Fields Medals, Notices of the AMS, Vol 61, No 9, 1074-1081.

در تاریخ ۱۳ آگوست ۲۰۱۴ در مراسم افتتاحیه کنگره بین‌المللی ریاضی در سئول کره جنوبی مراسم اهدای مدال فیلدز برگزار گردید. گزارش خبری زیر که توسط اتحادیه بین‌المللی ریاضیات (IMU) در آن ایام منتشر شده است به بررسی و توصیف کارهای برندگان مدال فیلدز می‌پردازد.

آلین جکسون

کارهای آرتور آویلا

آرتور آویلا (Artur Avila) سهم به‌سزایی در توسعه‌ی سیستم‌های دینامیکی، آنالیز و دیگر حیطه‌های علوم ریاضی داشته، و در بسیاری مواقع مسائلی که برای مدت بسیار زیادی باز بوده‌اند را با ارائه‌ی براهین محکم اثبات کرده است. وی اهل برزیل است و گاهی اوقات آن‌جا و پاره‌ای از اوقات را نیز در فرانسه سپری می‌کند. او فرهنگ و سنت‌های این دو کشور را به خوبی با هم تلفیق می‌کند، تا نتایج قدرتمندی را به اثبات برساند. وی تقریباً تمام کارهای خود را با همکاری بیش از سی ریاضی‌دان در سرتاسر دنیا انجام داده است. آویلا قدرت تکنیکی بسیار زیاد، استعداد و سرسختی یک استاد حل مسئله و درک عمیق و اشتباه‌ناپذیر خود را به این همکاری‌ها می‌افزاید.

آرتور آویلا

دستاوردهای آویلا بسیار وسیع و گسترده‌اند و طیف وسیعی از موضوعات را شامل می‌شوند. در این‌جا تنها به بررسی چند نمونه از آن‌ها می‌پردازیم. یکی از دستاوردها عظیم او به داستان بلندی که در دهه‌ی ۱۹۷۰ آغاز شده بود، پایان داد. در آن زمان، فیزیک‌دانان به‌خصوص میشل فینبام (Mitchell Feigenbaum) تلاش خود را برای درک این موضوع که چگونه آشوب می‌تواند از دل یک سامانه‌ی خیلی ساده براید، آغاز کرده بودند. برخی از سامانه‌هایی که آن‌ها مورد مطالعه قرار دادند، بر پایه‌ی پیمایش یک قانون ریاضی مانند $3x(1-x)$ بود. با شروع از یک نقطه می‌توان خط سیر این نقطه تحت اِعمال‌های پرتکرار قانون را مشاهده کرد. می‌توان به قانون به چشم حرکت دهنده‌ی نقطه‌ی شروع با گذر زمان نگاه کرد. برای برخی نگاشت‌ها، سرانجام خط سیر بر روی مدارهای پایداری قرار می‌گیرد، اما برای برخی نگاشت‌های دیگر این خط سیرها دچار آشوب می‌شوند.

در پی بررسی و تلاش برای درک این پدیده، موضوع سامانه‌های دینامیکی گسسته دوباره بر سر زبان‌ها افتاد. موضوعی که عده‌ای از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان دهه‌ها بر روی آن کار کرده بودند. یکی از اهداف اصلی، ارائه‌ی راهکارهایی برای پیش‌بینی رفتار در بلندمدت بود. برای خط سیری که محدود به یک مدار پایدار می‌شود، پیش‌بینی مسیر سفر یک نقطه سرراست است. اما برای یک خط سیر آشوب‌زده چنین چیزی برقرار نیست. تلاش برای فهمیدن این‌که نقطه‌ی شروع پس از طی زمان طولانی دقیقاً به کجا می‌رود، همانند این است که بخواهیم پیش‌بینی کنیم که پس از پرتاب یک میلیون بار یک سکه، پرتاب یک‌میلیون و یکم شیر است یا خط. اما می‌توان با استفاده از ابزارهای آشوب، پرتاب سکه را به‌صورت احتمالاتی مدل کرد. می‌توان این کار را برای خط سیر نیز انجام داد. ریاضی‌دانان دریافته بودند که خیلی از نگاشت‌هایی که آن‌ها مطالعه می‌کردند، در داخل یکی از دو دسته‌بندی زیر قرار می‌گیرند: "منظم"، یعنی خط سیرش پس از گذشت زمان پایدار می‌شود، یا "تصادفی"، یعنی خط سیر از خودرفتاری آشوب‌زده نشان می‌دهد که می‌توان آن را به‌صورت تصادفی مدل کرد. این دوگانگی میان منظم و تصادفی در خیلی از مواقع ثابت شده بود و امید بر این بود که به زودی یک درک کامل از این موضوع حاصل گردد. این امید در سال ۲۰۰۳، در مقاله‌ای که آویلا به همراه ویلینگتون دملو (Welington de melo) و میخائیل لیبیچ (Mikhail Lyubich) به چاپ رساند، به حقیقت پیوست. آویلا و همکارانش کلاس وسیعی از سامانه‌های دینامیکی ـ به طور خاص آن‌هایی برآمده از نگاشت‌هایی به شکل سهموی، که به نگاشت‌های نمایی مشهورند ـ را مورد مطالعه قرار دادند. آن ها ثابت کردند که اگر یک چنین نگاشتی را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، نگاشت یا منظم و یا تثادفی خواهد بود. کار آن‌ها یک تصویر جامع و آشکار از رفتار این‌گونه سامانه‌ها ارائه کرد.

یکی دیگر از نتایج خارق‌العاده‌ای که آویلا به‌دست آورد، حاصل کار وی با جیووانی فورنی (Giovanni Forni) بر روی درهم‌سازی ضعیف بود. اگر بخواهیم دسته‌ای از کارت‌ها را فقط با برش ـ یعنی

برداشتن پشته‌ای کوچک از کارت‌ها و قرار دادن آن در زیر دسته ـ بُر بزنیم، آنگاه دسته درست درهم نخواهد شد. کارت‌ها فقط در یک الگوی دایره‌ای به حرکت در خواهند آمد. اما اگر کارت‌ها را به‌صورت معمول یعنی برگ برگ کردن آن‌ها—برای مثال اولین کارت پس از سومین کارت، دومین کارت پس از پنجمین کارت و به همین ترتیب — بُر بزنیم، دسته کاملاً درهم خواهد شد. این ایده‌ی اصلی بود که آویلا و فورنی برای مفهوم درهم‌سازی در ذهن داشتند. سامانه‌ای که آن‌ها با هم روی آن کار کردند، دسته‌ای از کارت‌ها نبود، بلکه یک فاصله‌ی بسته بود که به زیرفاصله‌های بسته تقسیم شده بود. برای مثال زیردسته می‌تواند به چهار تکه‌ی ABCD تقسیم گردد. می‌توان نگاشتی بر روی بازه، توسط تعویض جاهای زیربازه‌ها ساخت به‌طوری که برای مثال ABCD تبدیل شود به DCBA. با پیمایش نگاشت به یک سامانه‌ی دینامیکی می‌رسیم که به آن "انتقال تعویض بازه" گفته می‌شود.

با در نظر گرفتن مسئله‌ای مشابه با برش و یا بُر زدن دسته‌ی کارت‌ها، می‌توان پرسید که آیا انتقال تعویض بازه به واقع می‌تواند زیربازه‌ها را درهم سازد؟ تا مدت‌ها قبل از آن نیز معلوم بود که این کار غیرممکن است. گرچه راه‌هایی برای کمیت‌بندی درجه‌ی درهم‌سازی وجود دارد که به مفهوم درهم‌سازی ضعیف می‌انجامد. این مفهوم سامانه‌ای را توصیف می‌کند که نتوانسته به‌طور کامل درهم شود. چیزی که آویلا و فورنی نشان دادند این بود که تقریباً هر انتقال تعویض بازه، یک درهم‌سازی ضعیف است. به عبارت دیگر اگر یک انتقال تعویض بازه‌ی تصادفی را انتخاب کنیم، به‌صورت قریب به یقین می‌توان گفت که با پیمایش آن، یک سامانه‌ی دینامیکی به‌دست خواهد آمد که به‌طور ضعیف درهم است. این کار، به کاری که اخیراً آویلا با وینسنت دلکروکس (Vincent Delecroix) درباره‌ی درهم‌سازی سیستم‌های بیلیارد چندضلعی انجام دادند، نیز مرتبط می‌باشد. سامانه‌های بیلیارد، در فیزیک آماری، به‌عنوان مدل‌هایی برای حرکت ذره مطرح می‌شوند. آویلا و دلکروکس دریافتند که تقریباً تمام سامانه‌های دینامیکی دارای خصیصه‌ی به‌طور ضعیف درهم هستند. در کار اخیری که در بالا به آن اشاره شد، آویلا از دانش عمیق خود در زمینه‌ی آنالیز برای حل سؤالات سیستم‌های دینامیکی کمک گرفت. گاهی اوقات وی برعکس این کار را نیز انجام داده است. یعنی از سامانه‌های دینامیکی کمک گرفته تا مسائل آنالیز را حل کند. به‌عنوان مثال می‌توان به کار وی بر روی عملگرهای شبه تناوبی شرودینگر اشاره کرد. این عملگرها معادلات ریاضی هستند که برای مدل‌سازی سامانه‌های کوانتومی به کار گرفته می‌شوند. یکی از مطالب پرابهام در این زمینه، پروانه‌ی هافستادر(Hofstadter butterfly) است. پروانه‌ی هافستادر یک الگوی فراکتالی است که نام آن برگرفته از نام داگلاس هافستادر است. این پروانه برای اولین بار در سال ۱۹۷۶ معرفی شد. پروانه‌ی هافستادر یک طیف انرژی را ارائه می‌کند که تحت یک میدان شدید مغناطیسی حرکت می‌کند. فیزیک‌دانان زمانی که فهمیدند به ازای مقادیر پارامتری خاص در معادله‌ی شرودینگر، این طیف انرژی یک مجموعه‌ی کانتور است بسیار شگفت‌زده شدند. این مجموعه یک شی ریاضیاتی بسیار مهم بوده و ظاهراً دربر دارنده‌ی خواص ناسازگاری از چگالی و پراکندگی می‌باشد. در دهه‌ی ۱۹۸۰ ریاضی‌دان "بری سیمون(Barry Simon)" مسئله‌ی ۱۰ مارتینی را عمومی کرد (این مسئله توسط مارک کک (Mark kac) نام‌گذاری شده که پیشنهاد ده مارتینی برای هرکس که آن را حل کند، داده بود.) این مسئله می‌پرسد که آیا طیف یک عملگر خاص شرودینگر که به شبه ـ متیو شهرت دارد، مجموعه‌ی کانتور است یا نه. آویلا به‌همراه اسوتلانا جیتومیرسکایا(etlana JitomirskayaSv) به این سؤال پاسخ داد.

گر چه این راه‌حل‌ها بسیار شگفت‌انگیزند، اما این تنها بخشی از کارهای بسیار زیاد آویلا بر روی عملگرهای شرودینگر است. او در سال ۲۰۰۴ کار چند ساله‌ی خود برای ارائه‌ی یک نظریه‌ی جامع را آغاز کرد، که اوج شکوه و قدرت آن را در سال ۲۰۰۹ و در دو مقاله‌ای که به چاپ رسانید، مشاهده می‌کنیم. این کارها بیان می‌کنند که بر خلاف مورد خاص عملگر شبه ـ متیو، عملگرهای عمومی شرودینگر هنگام انتقال بین قلمروها پتانسیلی متفاوت رفتار بحرانی از خود به نمایش نمی‌گذارند. آویلا در این کار از رویکردهای نظریه‌ی سیستم‌های دینامیکی که شامل تکنیک‌های نرمال‌سازی نیز می‌شدند استفاده کرد.

به‌عنوان مثال آخر از کارهای آویلا می‌توان به نتیجه‌ی آخر وی اشاره کرد که برآمده از اثبات قضیه‌ی منظم‌سازی وی برای نگاشت‌های حافظ حجم است. این اثبات حدسی را حل می‌کند که بیش از ۳۰ سال باز مانده بود. ریاضی‌دانان امید داشتند که این حدس درست باشد اما نمی‌توانستند آن را اثبات کنند. اثبات آویلا درهای بسیاری را در حیطه‌ی تحقیقات بر روی سامانه‌ای دینامیکی هموار گشود. به‌عنوان مثال قضیه‌ی منظم‌سازی، عنصری کلیدی در پیشرفت‌های به‌دست آمده اخیر توسط آویلا، سیلوین کروویزیر(Sylvain Crovisier) و امی ویلکینسون (Amie Wilkinson) بوده است. کار آن‌ها که هنوز هم در جریان است، نشان می‌دهد که یک دیفئومورفیسم عام حافظ حجم، با آنتروپی متریک مثبت، یک سامانه‌ی دینامیکی ارگودیک است.

با ترکیب قدرت آنالیزی فراوان وی و دانش زیاد او درباره‌ی سامانه‌های دینامیکی، آویلا قطعاً در سال‌های آینده به عنوان یکی از رهبران ریاضیات باقی خواهد ماند.

زندگی‌نامه:

آرتور آویلا در سال ۱۹۷۹ در برزیل به دنیا آمده است. وی هم‌چنین شهروند فرانسه نیز می‌باشد. وی مدرک دکتری خود را در سال ۲۰۰۱ از مؤسسه‌ی IMPA ریودوژانیرو دریافت کرد. از

افتخارات پیشین او می‌توان به جایزه‌ی سالم (Salem) در ۲۰۰۶ اشاره کرد. هم‌چنین وی جایزه‌ی انجمن ریاضی اروپا در ۲۰۰۸ و جایزه‌ی تحقیقاتی جیکوب هربراند از آکادمی علوم فرانسه در سال ۲۰۰۹ ، جایزه‌ی میشل برایان در سال ۲۰۱۱، جایزه‌ی انجمن ریاضی برزیل در ۲۰۱۳ و جایزه‌ی TWAS برای ریاضیات در ۲۰۱۳ را در کارنامه‌ی خود دارد.

مراجع

- A. Avila, W. de Melo, and M. Lyubich, Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps, Inventiones Mathematicae, 2003.
- A. Avila and G. Forni, Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows, Annals of Mathematics, 2007.
- A. Avila and V. Delecroix, Weak mixing directions in non-arithmetic Veech surfaces, preprint 2013.
- A. Avila and S. Jitomirskaya, The Ten Martini Problem, Annals of Mathematics, 2009.
- A. Avlia, Global theory of one-frequency Schrödinger operators I, II, preprints 2009.
- A. Avlia, On the regularization of conservative maps, Acta Mathematica, 2010

کارهای مانجول بارگاوا

تلاش مانجول بارگاوا (Manjul Bhargava) در زمینه‌ی نظریه‌ی اعداد تأثیر شگرفی بر روی این گرایش داشت. وی یک ریاضی‌دان به شدت خلاق است که علاقه‌ی خاصی به مسائل ساده اما بسیار زیبا دارد. وی این مسائل را با ارائه دادن راه‌حل‌های بسیار زیبا و قدرتمند که بینش عظیمی در آن‌ها نهفته است، حل می‌کند.

مانجول بارگاوا

بارگاوا در هنگام فارغ‌التحصیلی کتاب جاودانه‌ی گاوس با عنوان "کار ریاضیاتی استاندارد بر روی نظریه اعداد (Arithmeticae Disquisitiones)" را مطالعه کرد. تمام ریاضی‌دانان از وجود این کتاب باخبرند اما تعداد کمی از آن‌ها آن را مطالعه می‌کنند. چرا که علامت‌گذاری‌ها و ذات عددی این کتاب، درک آن را برای خواننده‌های امروزی سخت می‌کند. گرچه این کتاب سرچشمه‌ی الهامات بارگاوا بود. گاوس علاقه‌ی زیادی به فرم‌های دودویی درجه‌ی دو که به شکل $ax^2 + bxy + cy^2$ هستند، داشت. در این معادله a و b و c اعداد صحیح هستند. گاوس در کتابش قانون بسیار هوشمندانه‌ی ترکیب را ارائه داد که به کمک آن می‌توان از دو فرم دودویی درجه دو به یک فرم سوم دست یافت. این قانون هم‌چنان به‌عنوان یک ابزار اصلی در نظریه‌ی اعداد جبری باقی مانده است. بارگاوا پس از خواندن ۲۰ صفحه از محاسبات گاوس که درباره‌ی قانون ترکیب، به این نتیجه رسید که باید راهی بهتر از این وجود داشته باشد.

یک روز، وقتی که وی در حال بازی با مکعب روبیک بود به این راه دست یافت. بارگاوا به این فکر افتاد که هر گوشه‌ی مکعب را با یک عدد برچسب‌گذاری کند و سپس مکعب را تکه کند تا به دو مجموعه‌ی چهار عددی برسد. هر مجموعه‌ی ۴ ـ عددی به طور طبیعی تشکیل یک ماتریس می‌دهد. یک محاسبه‌ی ساده با این ماتریس‌ها جواب یک فرم دودویی درجه دو را به‌دست می‌دهد. اگر هر سه حالت تکه کردن مکعب را در نظر گیریم، سه فرم دودویی درجه دو را به‌دست خواهیم آورد. بارگاوا مشخصه‌ی هر یک از این سه فرم را به‌دست آورد (در یک فرم درجه دو، مشخصه، که برخی آن را با نام "تحت علامت مربع ریشه" می‌شناسند، کمیت اصلی است که مربوط به چندجمله‌ای می‌باشد.) وقتی بارگاوا فهمید که همانند قانون ترکیب گاوس، در این‌جا نیز مشخصه‌ها با هم برابرند، متوجه شد که یک راه ساده بصری برای بدست آوردن این قانون پیدا کرده است.

وی هم‌چنین متوجه شد که می‌تواند برچسب‌گذاری‌های مکعبی خود را برای معادلات با درجه‌های بالاتر نیز تعمیم دهد (درجه بالاترین توانی است که در یک چندجمله‌ای ظاهر می‌شود. مثلاً درجه‌ی چندجمله‌ای $x^3 - x + 1$، ۳ است.) وی سپس سیزده قانون ترکیب جدید برای چندجمله‌ای‌های درجات بالاتر کشف کرد. در زمان وی ریاضی‌دانان به قانون ترکیب گاوس به‌عنوان یک کنجکاوی نگاه می‌کردند که فقط برای فرم‌های دودویی درجه دو صادق است. قبل از کارهای بارگاوا هیچ‌کس فکر نمی‌کرد که قانون‌های ترکیب دیگری برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی بالاتر وجود دارد.

یکی از دلایل مهم‌بودن قانون ترکیب گاوس این است که این قانون اطلاعاتی در مورد میدان عددی درجه‌ی دو به ما می‌دهد. یک میدان عددی توسط بسط اعداد گویا به‌دست می‌آید. این بسط

باید به شکلی باشد که میدان ساخته شده شامل ریشه‌های گنگ یک چندجمله‌ای باشد. اگر این چندجمله‌ای از درجه‌ی دو باشد، یک میدان عددی درجه دو به‌دست می‌آید. درجه‌ی چندجمله‌ای و مشخصه‌ی آن دو کمیت پایه‌ای هستند که به میدان عددی نسبت داده شده‌اند. گر چه میدان‌های عددی اشیائی پایه‌ای در نظریه‌ی اعداد جبری هستند، هنوز برخی از ویژگی‌های اصلی آن‌ها، مثلاً این مطلب که برای یک درجه و یک مشخصه‌ی ثابت، چند میدان عددی موجود است، برای ما ناشناخته هستند. با در دست داشتن این قانون‌های جدید ترکیب، بارگاوا از آن‌ها در جهت مطالعه‌ی میدان‌های عددی استفاده کرد.

در کارهای گاوس اشاره‌ای ضمنی به مفهوم "هندسه‌ی اعداد" شده است. این مفهوم بعدها توسط هرمن مینکوفسکی (Herman Minkowski) تکمیل شد. در هندسه‌ی اعداد، می‌توان یک صفحه و یا یک فضای سه بعدی را پوشیده شده توسط یک شبکه در نظر گرفت که نقاط با مختصات صحیح را به نمایش می‌گذارد. اگر یک معادله‌ی درجه دو را در اختیار داشته باشیم، با شمارش شبکه‌ی نقاط صحیح، در یک حیطه‌ی خاص از فضای سه بعدی، می‌توان اطلاعاتی در مورد میدان عددی درجه‌ی دو مربوطه به‌دست آورد. به‌طور خاص می‌توان از هندسه‌ی اعداد استفاده کرد تا نشان داد، برای مشخطه‌هایی با مقدار مطلق کمتر از X، تقریباً X میدان عددی موجود است. در دهه‌ی ۱۹۶۰ یک رویکرد دیگر توسط هارولد داونپورت (Harold Davenport) و هانس هیلبرون (Hans Heilbronn) منجر به حل این مسئله برای میدان‌های عددی درجه ۳ شد. و پس از آن این پیشرفت متوقف شد. به همین دلیل بود که کار بارگاوا مورد استقبال بسیار واقع شد، چرا که وی توانسته بود تعداد میدان‌های عددی درجه سه و چهاری که مشخصه‌ی کراندار دارند را بشمارد. این نتایج از قانون‌های جدید ترکیب وی و ارائه‌ی جدید وی از هندسه‌ی اعداد استفاده می‌کنند. این ارائه‌های جدید قدرت بسیار زیادی به این تکنیک بخشیده‌اند. مسئله برای درجات بالاتر از ۵ هنوز باز است و برای حل آن‌ها نمی‌توان از قانون‌های ترکیب بارگاوا استفاده کرد. گرچه این امکان وجود دارد که بتوان با قوانینی مشابه با قوانین ترکیب بارگاوا به این مسائل حمله کرد.

اخیراً بارگاوا و همکارانش با استفاده از بسط وی برای هندسه‌ی اعداد موفق شدند نتایج قابل توجهی در زمینه‌ی خم‌های ابر بیضوی به‌دست بیاورند. در قلب تحقیقات وی سؤال قدیمی قرار دارد: «چه زمان یک حساب با چهار عمل اصلی یک عدد مربع به‌دست می‌دهد» است. یکی از جواب‌هایی که بارگاوا برای این سؤال پیدا کرده به طرز شگفت‌انگیزی ساده است: یک چندجمله‌ای ساده از درجه‌ی حداقل پنج با ضرایب گویا هرگز مقدار مربع نمی‌پذیرد. یک خم ابر بیضوی، نموداری با معادله‌ی به فرم $y^2 =$ یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا است. در صورتی که چندجمله‌ای از درجه‌ی سه باشد به این گراف «خم بیضوی» گفته می‌شود. خم‌های بیضوی دارای خصوصیات بسیار زیبایی هستند، و تاکنون موضوع بسیاری از تحقیقات علمی بوده‌اند. هم‌چنین این خم‌ها تأثیر زیادی در اثبات قضیه‌ی آخر فرما که توسط اندرو وایلز (Andrew Wiles) ارائه شد، داشته‌اند.

سؤال اصلی در مورد خم‌های بیضوی این است که چگونه می‌توان تعداد نقاطی که بر خم واقع هستند و مختصات گویا دارند را شمارش کرد. مشخص شده است که تعداد نقاط گویا به درجه‌ی خم وابسته است. برای خم‌هایی با درجه‌ی ۱ و ۲ راه‌های مؤثری برای یافتن این اعداد گویا موجود است. قضیه‌ی گرت فالتینگز (Gerd faltings) (برنده‌ی مدال فیلدز) نشان می‌دهد که برای چندجمله‌ای‌هایی با درجه‌ی پنج و بالاتر، تعداد متناهی عدد گویای این‌چنینی موجود است. اسرارآمیزترین مورد، چندجمله‌ای‌هایی با درجه‌ی سه ـ خم‌های بیضوی ـ و درجه‌ی ۴ هستند. هنوز حتی الگوریتمی برای تشخیص این‌که یک خم داده شده از درجه‌ی چهار یا سه دارای تعداد متناهی و یا نامتناهی اعداد گویا است یا نه وجود ندارد.

چنین الگوریتمی دست‌نیافتنی به نظر می‌رسد. بارگاوا یک رویه‌ی دیگر را در پیش گرفت و پرسید: در مورد نقاط گویا بر روی یک خم ساده چه می‌توان گفت؟ در یک کار مشترک با آرول شانکار (Arul Shankar) و کریستوفر اسکینر (Christopherf Skinner) بارگاوا به این نتیجه‌ی مهم دست یافت که یک نسبت مثبت از خم‌های بیضوی دارای یک نقطه‌ی گویا، و یک نسبت مثبت از آن‌ها دارای بی‌نهایت نقطه‌ی گویا هستند. برای حالت خم‌های ابربیضوی با درجه‌ی چهار، بارگاوا نشان داد که یک نسبت مثبت از این نوع خم‌ها هیچ نقطه‌ی گویایی ندارند و یک نسبت صحیح دارای بی‌نهایت نقطه‌ی گویا هستند. این کارها بر پایه‌ی شمارش نقاط شبکه، در حیطه‌های غیرکراندار از فضای‌های با بعد بالا بودند که این حیطه‌های پیچشی در شاخک‌های پیچیده وارون می‌شوند. این شمارش بدون تکنیک هندسه‌ی اعداد بارگاوا میسر نبود.

بارگاوا از بسط هندسه‌ی اعداد خود برای بررسی خم‌های ابربیضوی با درجه‌ی بالاتر نیز استفاده کرد. همان‌طور که اشاره شد، بنا به قضیه‌ی فالتینگز برای خم‌های با درجه‌ی ۵ و بالاتر، تعداد نقاط گویا متناهی است. اما این قضیه هیچ روشی برای پیدا کردن این نقاط و یا بیان دقیق تعداد آن‌ها، ارائه نمی‌کند. یک بار دیگر بارگاوا سؤال: " برای یک خم معمول چه اتفاقی می‌افتد؟" را بیان کرد. بارگاوا فهمید که اگر درجه زوج باشد، یک خم ابربیضوی معمولی اصلاً نقطه‌ی گویا ندارد. وی با همکاری با بندیکت گراس (Benedict Gross) و با استفاده از کارهای یورگ پونن (Bjorn Poonen) و میشل استول (Michael Stoll) نتیجه‌ای مشابه برای درجات فرد به دست آورد. کارهای وی هم‌چنین

تقریب دقیقی از این‌که با افزایش درجه با چه سرعتی تعداد خم‌هایی که نقاط گویا دارند، کم می‌شوند، ارائه دادند. برای مثال کارهای بارگاوا نشان می‌دهند که بیش از ۹۹ درصد احتمال دارد که یک چندجمله‌ای معمول با درجه‌ی ۱۰، نقطه‌ی گویا نداشته باشد.

مثال آخر از کارهای بارگاوا کار وی با جاناتان هنک (Jonathan Hanke) بر روی "قضیه‌ی ۲۹۰" است. این قضیه در مورد سؤالی است که قدمت آن به دوران فرما بازمی‌گردد. این سؤال بدین شکل است: کدام فرم‌های درجه دو هستند که تمام اعداد صحیح را ارائه می‌دهند؟ برای مثال تمام اعداد صحیح جمع دو مربع نیستند. پس $x^۲ + y^۲$ تمام اعداد صحیح را ارائه نمی‌دهد. جمع سه مربع $x^۲ + y^۲ + z^۲$ نیز این خواسته را برآورده نمی‌کند. اما لاگرانژ بیان کرد که جمع چهار مربع، یعنی $x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲$، اعداد صحیح را ارائه می‌کنند. در سال ۱۹۱۶ رامانوجان(Ramanujan)، ۵۴ مثال دیگر از این فرم‌ها را بیان کرد. چه فرم‌های کلی دیگری وجود دارند؟ در اوایل سال ۱۹۹۰، جان کانوی (John H. Conway) و دانشجویانش ویلیان اشنیبرگر (William Schneeberger) و کریستوفر سیمونز (Christopher Simons) به این سؤال به شکلی متفاوت نگاه کردند و این سؤال را مطرح کردند که: آیا عددی مانند c وجود دارد که اگر یک فرم درجه‌ی دو اعداد صحیح کوچکتر از c را ارائه دهد، تمام اعداد صحیح را نیز ارائه دهد؟ پس از محاسبات بسیار زیاد آن‌ها حدس زدند که c را می‌توان به کوچکی ۲۹۰ در نظر گرفت. آن‌ها پیشرفت‌های زیادی انجام دادند اما این مسئله زمانی حل شد که بارگاوا و هنک (Hanke) تصمیم به حل آن گرفتند. آن‌ها مجموعه‌ای از ۲۹ عدد صحیح شامل ۲۹۰ پیدا کردند که اگر یک فرم درجه دو (با هر تعداد متغییر) این اعداد را ارائه دهد، آنگاه این فرم تمام اعداد صحیح را نیز ارائه می‌کند. اثبات آن‌ها بسیار خلاقانه بوده و شامل برنامه‌های سنگین کامپیوتری است.

علاوه در یک ریاضی‌دان بودن در سطح جهانی، بارگاوا یک موسیقی‌دان قابل است. او ساز هندی تابلا را با مهارت زیادی می‌نوازد. او هم‌چنین یک مدرس بسیار تواناست که جوایز متعددی در زمینه‌ی آموزش دریافت کرده است. هم‌چنین نوشتار روشن و زیبا نیز یکی از شاخصه‌های وی است.

بارگاوا درکی تیزهوشانه دارد که وی را به عمق مسائل زیبای ریاضی هدایت می‌کند. وی با برخورداری از درکی شگرف و مهارت تکنیکی زیاد با وارد شدن به هر حیطه از ریاضیات، آن را تبدیل به یک حیطه‌ی طلایی می‌کند. قطعاً در سال‌های آینده شاهد شگفتی‌های دیگری خواهیم بود که وی به ریاضیات اضافه می‌کند.

زندگی‌نامه:

مانجول بارگاوا در سال ۱۹۷۴ در کانادا به دنیا آمد و در آمریکا رشد کرد. وی هم‌چنین زمان زیادی را در هند سپری کرده است. او دکتری خود را در سال ۲۰۰۱ و زیر نظر اندرو وایلز از دانشگاه پرینستون دریافت کرد. بارگاوا در سال ۲۰۰۳ به مقام پروفسوری در دانشگاه پرینستون رسید. از افتخارات وی می‌توان به جایزه‌ی مرتن هاس (Merten M. Hasse) انجمن ریاضی آمریکا در سال ۲۰۰۳، جایزه‌ی بلومنتال در زمینه‌ی تحقیقات ریاضی پیشرفته در ۲۰۰۵، جایزه‌ی ساسترا رامانوجان (SASTRA Ramanujan) در سال ۲۰۰۵،جایزه‌ی کول (Cole) در نظریه‌ی اعداد از انجمن ریاضی امریکا در سال ۲۰۰۸، جایزه‌ی فرما در ۲۰۱۱ و جایزه‌ی اینفوسیس (Infosys) در سال ۲۰۱۲ اشاره کرد.

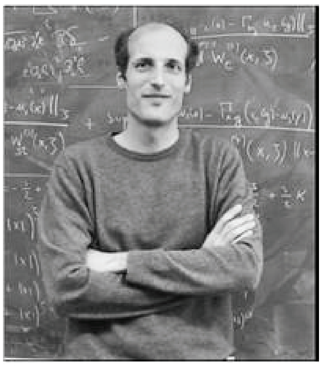
مراجع

- M. Bhargava, Higher composition laws, parts I, II, and III, Annals of Mathematics, 2004; part IV, Annals of Mathematics, 2008.
- M. Bhargava, The density of discriminants of quartic rings and fields, Annals of Mathematics, 2005.
- M. Bhargava, The density of discriminants of quintic rings and fields, Annals of Mathematics, 2010.
- M. Bhargava and B. Gross, The average size of the 2-Selmer group of the Jacobians of hyperelliptic curves with a rational Weierstrass point, in: Automorphic Representations and L-functions, TIFR Studies in Mathematics, 2013.
- M. Bhargava and A. Shankar, Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves, Annals of Mathematics, to appear.
- M. Bhargava and A. Shankar, Ternary cubic forms having bounded invariants and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0, Annals of Mathematics, to appear.
- M. Bhargava and J. Hanke, Universal quadratic forms and the 290-theorem, preprint 2011.
- M. Bhargava, Most hyperelliptic curves over Q have no rational points, preprint 2013, `http://arxiv.org/abs/1308.0395`.

- B. Poonen and M. Stoll, Most odd degree hyperelliptic curves have only one rational point, preprint 2013, http://arxiv.org/abs/1302.0061.
- M. Bhargava, A positive proportion of plane cubics fail the Hasse principle, http://arxiv.org/abs/1402.1131, preprint 2014.
- M. Bhargava and C. Skinner, A positive proportion of elliptic curves over Q have rank one, preprint 2014, http://arxiv.org/abs/1401.0233.

کارهای مارتین هایرر

مارتین هایرر (Martin Hairer) با ارائه‌ی نظریه‌ی جدید خود در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی تصادفی، تأثیر شگرفی بر این حیطه گذاشته است. با کمک نظریه‌ی وی می‌توان به مسائلی حمله‌ور شد که در گذشته نفوذ ناپذیر می‌نمودند. ریشه‌های معادلات دیفرانسیل به دوران نیوتون و لایب‌نیتز در قرن هفدهم باز می‌گردد. انگیزه‌ی اصلی در آن زمان برای مطالعه و تحقیق در این حیطه، درک حرکت سیارات در منظومه‌ی شمسی بود. قوانین حرکت نیوتون را می‌توان برای فرمول‌بندی معادلات دیفرانسیلی که برای مثال حرکت زمین به دور خورشید را توصیف می‌کنند به کار برد. یک جواب برای این‌چنین معادله‌ای، یک تابع است که مکان زمین در هر لحظه‌ی t را به ما می‌دهد. در قرون بعد معادلات دیفرانسیل به دیگر حیطه‌های علم و حیطه‌های مهندسی برای توصیف سامانه‌هایی که با گذشت زمان تغییر می‌کنند، وارد شدند.



مارتین هایرر

یک معادله‌ی دیفرانسیل که حرکت سیاره‌ای را توصیف می‌کند قطعی است. یعنی مشخص می‌کند که یک سیاره در یک زمان مشخص در آینده، دقیقاً در کجا قرار دارد. بقیه‌ی معادلات دیفرانسیل تصادفی هستند. یعنی سامانه‌هایی را توصیف می‌کنند که عناصری از تصادف را به ارث برده‌اند. نمونه‌ای از این معادلات، معادلاتی هستند که پیش‌بینی می‌کنند قیمت سهام در آینده چگونه تغییر پیدا خواهد کرد. این‌چنین معادله‌ای در بر دارنده‌ی عباراتی است که نوسانات قیمت در بازار سهام را ارائه می‌کند. اگر کسی بتواند دقیقاً این نوسانات را پیش‌بینی کند، از قیمت دقیق سهام در آینده‌خبردار خواهد بود (و البته بسیار ثروتمند می‌شود!!). گر چه این نوسانات به قیمت اولیه‌ی سهام بستگی دارند، به صورت ذاتی تصادفی و غیر قابل پیش‌بینی هستند. معادله‌ی قیمت سهام نمونه‌ای از یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی است.

در معادله‌ی حرکت سیاره، سامانه تنها با توجه به یک متغیر یعنی زمان، تغییر پیدا می‌کند. به چنین معادله‌ای معادله‌ی دیفرانسیل معمولی یا ODE(ordinary differential equation) گفته می‌شود. بر عکس معادلات دیفرانسیل جزئی یا PDEها(partial differential equations) معادلاتی هستند که سیستم‌هایی با بیش از یک متغیر را توصیف می‌کنند. برای مثال مکان و زمان. بسیاری از PDEها غیرخطی هستند. یعنی عبارت داخل آن‌ها دارای خصوصیات ساده نیست. برای مثال ممکن است منجر به یک توان نمایی شوند. رفتار بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می‌توان به وسیله‌ی PDEهای غیرخطی توصیف کرد. پس درک این معادلات یک هدف اساسی برای ریاضی‌دانان و دانشمندان است. البته PDEهای غیرخطی یکی از سخت‌ترین اشیای ریاضی هستند و درک آن‌ها بسیار دشوار می‌باشد. کارهای هایرر توجهات زیادی را به سمت خود کشانده، چرا که این کارها یک نظریه‌ی کلی در اختیار قرار می‌دهد که می‌توان آن را برای کلاس بزرگی از PDEهای غیرخطی به کار برد.

یک مثال برای یک PDE، تصادفی غیرخطی ـ مثالی که نقش بزرگی در کارهای هایرر بازی می‌کرد ـ معادله‌ی KPZ است. نام این معادله برگرفته از نام سه فیزیک‌دان با نام‌های مهران کاردار(Mehran Kardar) جورجیو پاریسی(Giorgio Parisi) و یی‌چنگ ژانگ (Yi-Cheng Zhang) است. این سه فیزیک‌دان این معادله را در سال ۱۹۸۹ برای توصیف حرکت سطوح مشترک رشد کننده ارائه کردند. برای به‌دست آوردن درک بهتری از طبیعت این معادله، مدل ساده شده‌ی زیر را برای نشست پرتابه در نظر گیرید. ذرات به سمت یک زیرلایه حرکت می‌کنند، و هنگام رسیدن در آن گیر می‌کنند. در پی این اتفاق ارتفاع زیرلایه در طول زمان به‌صورت خطی افزایش پیدا می‌کند. در همین حال سختی آن نیز افزایش پیدا می‌کند. در این حالت معادله‌ی KPZ تغییرات وابسته به زمان زیرلایه، بین خلا و جسم صلب را توصیف می‌کند. تصادفی بودن مکان و زمان رسیدن ذرات، یک نویز سفید فضا ـ زمانی در معادله تعریف می‌کند. (در پردازش سیگنال، نویز سفید به سیگنالی گفته می‌شود که در تابع چگالی توان آن، توان به‌طور یکنواخت در همه فرکانس‌ها توزیع شده باشد[3].). پس KPZ تبدیل به یک PDE

[3] مترجم

تصادفی می‌شود که تغییرات با توجه به زمان سطح نامنظم و سخت بین خلاء بالایی و ماده‌ی متراکم شونده‌ی پایین را توصیف می‌کند. یک جواب برای معادله‌ی KPZ در هر زمان و در هر نقطه در طول یال پایینی لایه، ارتفاع سطح بالای آن را مشخص می‌کند.

چالش معادله‌ی KPZ این است که با این‌که از نظر فیزیکی درست به نظر می‌رسد، از لحاظ ریاضی با عقل جور در نمی‌آید. یک جواب برای معادله‌ی KPZ باید یک شی ریاضی باشد که ارائه دهنده‌ی سختی و ذات نامنظم سطح باشد. چنین شیئی همواری ندارد. به بیان ریاضی، دیفرانسیل‌پذیر نیست. این در حالی است که دو عبارت درون معادله بیان می‌کنند که این شی باید دیفرانسیل‌پذیر باشد. برای دور زدن این مشکل می‌توان از شیئی به نام "توزیع" استفاده کرد. اما با این حال مشکل جدیدی به وجود می‌آید. از آن‌جایی که معادله‌ی KPZ خطی است، یک عبارت مربع در خود دارد و این در حالی است که توزیع را نمی‌توان مربع کرد. به همین دلیل معادله‌ی KPZ خوش تعریف نبود. با این‌که محققان تلاش کردند با استفاده از چند راه و کلک تکنیکی این موانع را برای حالت خاصی از معادله‌ی KPZ از پیش رو بردارند، اما مسئله‌ی بنیادی برای مدت‌ها خوش تعریف نبود و به عنوان یک مشکل حل نشده باقی مانده بود.

در یک دستاورد خارق‌العاده، هایرر با توصیف رویکردهای جدید برای معادله‌ی KPZ توانست از پس این مشکلات برآید. این رویکردها این اجازه را می‌دهند که از لحاظ ریاضی معنای دقیقی به معادله و جوابش داده شود. علاوه بر این وی در یک کار جانبی، از ایده‌های خود که برای معادله‌ی KPZ ارائه کرده بود استفاده کرد تا یک نظریه‌ی جدید به نام "نظریه‌ی ساختارهای منظم" خلق کند. این نظریه را می‌توان برای طیف وسیعی از PDEهای تصادفی به کار برد. به‌طور خاص می‌توان این نظریه را در بعدهای بالاتر نیز به کار برد.

ایده‌ی اصلی رویکرد هایرر برای حل معادله‌ی KPZ به این شکل است: به جای فرض معمول، یعنی این فرض که تأثیرات کوچک تصادفی بر روی یک مقیاس کوچک جدایی‌ناپذیر رخ می‌دهند، وی فرض کرد که تأثیرات تصادفی بر روی مقیاسی رخ می‌دهند که نسبت به مقیاسی که سامانه در آن بررسی می‌شود کوچک هستند. با حذف کردن شرط جدایی‌ناپذیری که هایرر به آن منظم کردن نویز می‌گوید، معادله‌ای به‌دست می‌آید که می‌توان آن را حل کرد. جواب حاصل، جواب KPZ نمی‌باشد، اما می‌توان آن را به‌عنوان یک نقطه‌ی شروع برای ساختن دنباله‌ای از اشیا که به‌طور محدود همگرا به جواب KPZ است استفاده کرد. هایرر این نکته‌ی اساسی را نیز اثبات کرد که جواب حدی، همواره صرف‌نظر از نوع منظم‌سازی نویز مورد استفاده، یکسان است.

نظریه‌ی کلی هایرر متوجه دیگر PDEهای تصادفی در بعد بالاتر نیز هست که خوش‌تعریف نمی‌باشند. در این نوع معادلات مانند معادله‌ی KPZ چالش اصلی این است که برای مقیاس‌های خیلی کوچک، رفتار جواب بسیار سخت، خشن و نامنظم است. اگر جواب یک تابع هموار بود، می‌شد به‌راحتی و با استفاده از بسط تیلور، که راهی برای تعریف تابع به وسیله‌ی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی بالاتر است، به ادامه‌ی کار پرداخت. اما سختی و خشن بودن جواب بدین معنی است که نمی‌توان به راحتی آن را توسط چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. در عوض هایرر برای هر معادله‌ی خاص اشیایی تعریف کرد که رفتار جواب را برای برای مقیاس‌های کوچک تقریب می‌زنند. این اشیا همان کاری را انجام می‌دهند که چندجمله‌ای‌ها در بسط تیلور انجام می‌دهند. به نظر می‌رسد که جواب در هر نقطه به شکل یک انطباق نامتناهی از این اشیاست. جواب آخر از به هم چسباندن این انطباق‌ها به‌دست می‌آید. هایرر این حقیقت مهم را نیز بیان کرد که جواب آخر به اشیای تقریب که سازنده‌ی این جواب هستند وابسته نیست.

قبل از کارهای هایرر، متخصصان پیشرفت‌های زیادی در زمینه‌ی درک PDEهای تصادفی خطی به‌دست آورده بودند، اما موانع عمده‌ای برای کار بر روی موارد غیرخطی وجود داشت. نظریه‌ی هایرر کمک بسیاری برای برداشتن این موانع کرده است. علاوه بر این کلاس معادلاتی که این نظریه برای آن‌ها به کار می‌رود، چندین مورد اساسی در بر دارد که در ریاضیات و علوم دیگر بسیار پرکار بردند. از این مهم‌تر، کارهای وی می‌تواند راهی به سوی درک پدیده‌ی عمومیت باز کند. دیگر معادلات با تغییر مقیاس به معادله‌ی KPZ همگرا می‌شوند. پس به نظر می‌رسد که در پس‌زمینه‌ی کار یک پدیده‌ی عمومی قرار دارد. کارهای هایرر از این پتانسیل برخوردارند که ابزار آنالیزی مورد نظر برای بررسی این عمومیت را تولید کنند.

قبل از ارائه‌ی نظریه‌ی ساختارهای منظم، هایرر کارهای عظیم دیگری نیز انجام داده بود. به عنوان مثال حاصل کار مشترک وی با جاناتان متینگلی (Jonathan Mattingly) به‌دست آوردن پیشرفت عظیمی در درک نسخه‌ی تصادفی معادله‌ی ناویر ـ استوکس است. این معادله یک PDE غیرخطی است که حرکت موج را توصیف می‌کند. علاوه بر این که هایرر یک ریاضی‌دان برجسته در سطح جهانی است، یک برنامه‌نویس قهار نیز می‌باشد. هنگامی که وی هنوز دانش‌آموز بود یک نرم‌افزار ویرایش صدا با نام "چاقوی ارتش سوییس برای ویرایش صدا" ساخت که به‌صورت تجاری نیز عرضه شد. کارهای ریاضی وی وابسته به کامپیوتر نیستند اما وی معتقد است که شبیه‌سازی‌های کامپیوتری برای درک بهتر مسئله بسیار مفید هستند.

با تکنیک بسیار زیاد و درک عمیق وی از سامانه‌های فیزیکی، هایرر رهبر شاخه‌ای است که به‌طور قطع بعدها بر آن تأثیرات فراوانی خواهد گذاشت.

زندگی‌نامه:

مارتین هایرر در سال ۱۹۷۵ به‌عنوان یک شهروند اتریش به دنیا آمد. وی در سال ۲۰۰۱ و در دانشگاه ژنو، زیر نظر مستقیم ژان‌پیر اکمان (Jean Pierre Eckmann) مدرک دکتری خود را اخذ نمود. وی اکنون پروفسور ارشد ریاضیات در دانشگاه وارویک است. از افتخارات وی می‌توان به جایزه‌ی وایت‌هد (Whitehead) از انجمن ریاضیات لندن در ۲۰۰۸، جایزه‌ی فلیپ رابرت‌هالم (Philip Leverhulme) در ۲۰۰۸، نشان لیاقت ولفسون (Wolfson) از انجمن سلطنتی در ۲۰۰۹ و جایزه‌ی فوروهیلیک (Fröhlich) انجمن ریاضی لندن در سال ۲۰۱۴ اشاره کرد. او در سال ۲۰۱۴ به‌عنوان یکی از اعضای انجمن سلطنتی انتخاب شد.

مراجع

- M. Hairer, Solving the KPZ equation, Annals of Mathematics, 2013.
- M. Hairer, A theory of regularity structures, Inventiones Mathematicae, 2014.

کارهای مریم میرزاخانی

مریم میرزاخانی کارهای بسیار اصیل و شگرفی در زمینه‌ی هندسه و سامانه‌های دینامیکی انجام داده است. کار وی بر روی سطوح ریمانی و فضاهای مدولی آن پلی است میان چندین شاخه‌ی ریاضی مهم مانند هندسه‌ی هذلولوی، آنالیز مختلط، توپولوژی و دینامیک. کارهای وی بر روی تک تک این شاخه‌ها تأثیرگذار بوده است. شهرت عمده‌ی وی به خاطر کارهای اولیه‌ی وی بر روی هندسه‌ی هذلولوی و کار اخیر وی که یک پیشرفت عظیم در باب سامانه‌های دینامیکی است، می‌باشد.

مریم میرزاخانی

نام سطوح ریمانی برگرفته از نام ریاضی‌دان بزرگ قرن نوزدهم، برنهارد ریمان است. وی اولین کسی بود که به اهمیت سطوح مجرد به‌عنوان سطوحی که عیناً از یک فضای محدود به‌وجود می‌آیند پی برد. ریاضی‌دانان در حدود ۱۰۰ سال پیش بر پایه‌ی کارهای ریمان به این نتیجه رسیدند که چنین سطوحی را می‌توان به صورت توپولوژیکی طبقه‌بندی کرد. به‌عنوان مثال بسته به دگردیسی و به کمک یک عدد که تعداد دستگیره‌ها را نمایش می‌دهد، می‌توان این سطوح را دسته‌بندی کرد. به این عدد، ژن دارای یک سطح گفته می‌شود. کره، ژن دارای صفر، سطح یک لیوان قهوه ژن دارای ۲ و سطح پرتزل (یک نوع نان به شکل گره[۴].) ژن دارای ۳ دارد. اگر از شکل‌های دقیق هندسی بگذریم، به ازای هر عدد صحیح و مثبت g دقیقا یک سطح با ژن g وجود دارد.

یک سطح را ریمانی گوییم هرگاه مجهز به ساختارهای هندسی اضافی باشد. می‌توان به این ساختار هندسی، به‌عنوان یک ساختار مختلط نگاه کرد. این دیدگاه به ما کمک می‌کند که آنالیز مختلط را بر روی سطوح مجرد پیاده کنیم. از آن‌جایی که اعداد مختلط دو پارامتر حقیقی دارند، یک سطح، که بر اعداد حقیقی دوبعدی است، تنها یک بعد مختلط دارد که گاهی به آن خم مختلط نیز می‌گویند. مطلب روبرو ارتباط میان سطوح ریمانی و هندسه‌ی جبری را بیان می‌کند: هر خم مختلط یک خم جبری است، به این معنی که، یک خم مختلط را، گر چه به صورت مجرد توصیف شده، می‌توان به شکل یک خم در فضای محدود استانداردی در نظر گرفت که مجموعه‌ی صفر تمام چندجمله‌ای‌های منتخب است. گرچه یک سطح ریمان، یک سطح قیاسی و تحلیلی است که به‌صورت عبارات آنالیز مختلط بر روی یک سطح مجرد تعریف می‌شوند، مشخص می‌شود که این سطوح یک توصیف جبری به وسیله‌ی معادلات چندجمله‌ای دارند.

راهی دیگر اما معادل برای تعریف یک سطح ریمان، به وسیله‌ی معرفی یک هندسه انجام می‌پذیرد که به ما اجازه می‌دهد زوایا، طول‌ها و محیط‌ها را اندازه بگیریم. یکی از مهم‌ترین این هندسه‌ها، هندسه‌ی هذلولوی است که یک مثال اصیل از هندسه‌ی نااقلیدسی بوده که توسط بولیا، گاوس و لوباچفسکی (Lobachevsky) کشف شده است. تساوی میان ساختارهای جبری مختلط و ساختارهای هذلولوی بر سطوح، در ریشه‌ی قضیه‌ی بسیار قوی ریمان برای سطوح ریمانی قرار دارد.

کارهای اولیه‌ی میرزاخانی در ارتباط با ژئودیزی‌های بسته بر سطوح هذلولوی بودند. این ژئودیزی‌ها خم‌های بسته‌ای هستند که نمی‌توان با تغییر شکل، طولشان را کم کرد. یک قضیه‌ی کلاسیک که اثبات آن به ۵۰ سال پیش بازمی‌گردد راهی دقیق برای تخمین زدن تعداد ژئودیزی‌های بسته، که طول آن‌ها کمتر از یک کران مانند L است ارائه می‌کند. تعداد ژئودیزی‌های بسته، با توجه به L به‌صورت نمایی رشد می‌کنند. به‌طور دقیق می‌توان گفت که برای

[۴] مترجم

Lهای بزرگ، مجانب e^L/L است. به این قضیه "قضیه‌ی اعداد اول برای ژئودیزی‌ها" گفته می‌شود چرا که دقیقاً مشابه "قضیه‌ی اعداد اول" برای تمامی اعداد است. این قضیه، تعداد اعداد اول کوچکتر از یک عدد را تخمین می‌زند. (در این حالت تعداد اعداد اول کوچکتر از e^L) برای Lهای بزرگ مجانب با e^L/L است.

میرزاخانی با این دید به این مسئله نگاه کرد که: چه اتفاقی برای قضیه‌ی اعداد اول برای ژئودیزی‌ها می‌افتد وقتی تنها ژئودیزی‌های بسته‌ی ساده، یعنی آن‌هایی که خودقطعی ندارند را در نظر گیریم. رفتار در این حالت بسیار متفاوت است. رشد تعداد ژئودیزی‌ها با طول حداکثر L در این حالت، به‌صورت نمایی از L نیست، و از مرتبه‌ی L^{6g-6} می‌باشد. که در آن g ژن است. میرزاخانی نشان داد که در حقیقت این عدد برای Lهای بزرگ(که به بی‌نهایت میل می‌کنند) $(C.L^{6g-6})$ است. که در آن ثابت C به ساختار هذلولوی بستگی دارد.

با این‌که این حالت درباره‌ی یک ساختار ساده ولی دلخواه هذلولوی بر روی یک سطح کاربرد دارد، میرزاخانی با در نظر گرفتن مجموعه‌ی این‌چنین ساختارهایی به‌صورت یک‌جا، آن را اثبات کرد. ساختارهای مختلط بر روی یک سطح با ژن g تشکیل یک سطح پیوسته و یا ناگسسته می‌دهند، چرا که دارای دگردیسی‌های پیوسته می‌باشند. در حالی که سطح توپولوژیکی که در زیر قرار دارد یکسان باقی می‌ماند، شکل هندسی آن در طول یک دگردیسی تغییر پیدا می‌کند. ریمان می‌دانست که این دگردیسی‌ها وابسته به پارامترهای $6g-6$ و یا "مدولی" هستند. منظور از مدولی، فضای مدولی سطوح ریمانی با ژن g و بعد $6g-6$ است. البته این مطلب هیچ چیز در مورد ساختار کلی فضای مدولی که به شدت پیچیده و رمزآلوده است بیان نمی‌کند. فضای مدولی هندسه‌ی پیچیده و خاص خودش را دارد و راه‌های مختلف نگریستن به سطوح ریمانی ما را به سمت درک‌ها متفاوتی از هندسه‌ی این سطوح و ساختارشان هدایت می‌کند. برای مثال اگر به سطوح ریمانی به شکل خم‌های جبری نگاه کنیم، به این نتیجه خواهیم رسید که فضای مدولی خود یک شی جبری است که به آن واریته جبری گفته می‌شود.

در اثبات میرزاخانی برای شمارش ژئودیزی‌های بسته، سر و کله‌ی یک ساختار دیگر نیز بر روی فضای مدولی پیدا شد. به این ساختار، سیمپلتیک گفته می‌شود. این ساختارها به‌طور خاص اجازه می‌دهند تا حجم محاسبه گردد (اما طول نه). با توجه به کارهای اولیه‌ی مک‌شین (G. McShane)، میرزاخانی ارتباطی میان محاسبات حجم بر روی یک فضای مدولی و مسئله‌ی شمارش ژئودیزی‌های بسته‌ی ساده بر روی یک سطح برقرار کرد. وی حجم‌های خاصی در یک فضای مدولی را حساب کرد، و سپس نتایج شمارش برای ژئودیزی‌های ساده‌ی بسته را از این محاسبات استنتاج کرد.

این دیدگاه میرزاخانی را به سمت بینش‌های جدید نسبت به دیگر سؤالاتی که درباره‌ی فضای مدولی مطرح می‌شود هدایت کرد. یکی از این پیامدها، اثبات جدید و غیرمنتظره‌ای برای حدس ادوارد ویتن (Edward Witten برنده‌ی مدال فیلدز ۱۹۹۰) ـ یکی از پیشروان در نظریه‌ی ریسمان ـ بود. فضای مدولی تعداد زیادی مکان هندسی در خود جای داده که این نقاط مطابقند با سطوح ریمانی با خصوصیات منحصربه‌فرد. هم‌چنین این نقاط می‌توانند با هم اشتراک داشته باشند. به ازای نقاط هندسی مناسب این اشتراک‌ها تفسیر فیزیکی دارند. بنا به درک فیزیکی و محاسباتی که لزوماً پیچیده نبودند، ویتن حدسی درباره‌ی این اشتراک‌ها بیان کرد که توجه ریاضی‌دانان را به خود جلب کرد. ماکسیم کنت‌سویچ (Maxim Kontsevich برنده‌ی فیلدز ۱۹۹۸) حدس ویتن را در سال ۱۹۹۲ با انجام محاسبات مستقیم حل کرد. پانزده سال بعد، کارهای میرزاخانی ارتباطی میان حدس عمیق ویتن درباره‌ی فضاهای مدولی و مسائل ساده‌ی شمارش ژئودیزی‌ها بر روی سطوح مجرا بنا کرد.

در سال‌های اخیر میرزاخانی به اکتشاف در دیگر جنبه‌های هندسه‌ی فضاهای مدولی پرداخته است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فضای مدولی سطوح ریمانی با ژن g خود یک شی هندسی با بعد $6g-6$ است که ساختاری مختلط و یا در حقیقت جبری دارد. علاوه بر این فضای مدولی متریکی دارد که ژئودیزی‌های آن را می‌توان به‌صورت طبیعی مطالعه کرد. با تأثیرپذیری از کارهای مارگولیس (Margulis) میرزاخانی و همکارانش یک قضیه‌ی دیگر مشابه با قضیه‌ی اعداد اول اثبات کرد که ژئودیزی‌های بسته در فضای مدولی، و نه صرفاً بر روی یک سطح را می‌شمارد. وی هم‌چنین سامانه‌های دینامیکی (سامانه‌ایی که با گذشت زمان تغییر پیدا می‌کنند) خاصی که بر روی فضای مدولی بودند را نیز مورد مطالعه قرار داد. به‌طور خاص وی اثبات کرد که سامانه‌ای به‌عنوان "جریان زمین‌لرزه" شناخته می‌شود و توسط ویلیام تورسون (William Thurston برنده‌ی فیلدز ۱۹۸۲) ارائه شده بود، آشوبی است.

اخیراً میرزاخانی به همراه الکس اسکین (Alex Eskin) و امید محمودی به دستاوردهای شگرفی در زمینه‌ی درک نوع دیگری از سامانه‌های دینامیکی بر فضای مدولی که مرتبط با رفتار ژئودیزی‌ها در فضای مدولی هستند، دست یافتند. رفتار ژئودیزی‌های نابسته در فضای مدولی بسیار غیرقابل پیش‌بینی است و به‌دست آردن یک درک از ساختار آن‌ها و چگونگی تغییر آن‌ها وقتی که اندکی دچار آشوب می‌شوند، بسیار سخت است. البته میرزاخانی و همکارانش ثابت کردند که ژئودیزی‌های مختلط و بستار آن‌ها در فضای مدولی، به جای این‌که نامنظم و یا فراکتالی باشند در واقع بسیار منظم هستند. مشخص شد که در حالی که ژئودیزی‌های مختلط اشیایی غیر جبری هستند که با استفاده از ابزار آنالیزی و هندسه‌ی

دیفرانسیلی تعریف می‌شوند، بستار آن‌ها اشیایی جبری بوده که با استفاده از عبارات چندجمله‌ای تعریف می‌شوند و بنابراین دارای خصوصیات استواری (rigidity) هستند.

این کار با تحسین فراوان دیگر محققان در این زمینه مواجه شد. اکنون محققان تلاش می‌کنند این نتیجه‌ی جدید را بسط دهند و نتایج جدیدی بر پایه‌ی آن به‌دست بیاورند. یکی از دلایل برجسته بودن این کار، قضیه‌ای است که میرزاخانی و اسکین اثبات کردند. این قضیه شبیه به نتایج شگفت‌انگیزی است که مارینا راتنر (Marina Ratner) در دهه‌ی ۱۹۹۰ مطرح کرد. راتنر استواری برای سامانه‌ای دینامیکی بر فضاهای متجانس (همگن) را بنا کرد. این فضاها، فضاهایی هستند که همسایگی هر نقطه در آن دقیقاً شبیه به همسایگی هر نقطه‌ی دیگری است. در مقابل فضای مدولی کاملاً متفاوت است یعنی هر قسمت آن کاملاً با قسمت‌های دیگر متفاوت است. دستیابی به این نکته که استواری در فضاهای متجانس یک انعکاس در دنیای فضای مدولی نامتجانس دارد حیرت‌انگیز است.

به نظر می‌رسید که به دلیل این پیچیدگی‌ها و غیر یکنواختی‌ها، کار مستقیم بر روی فضای مدولی ناممکن است. اما نه برای میرزاخانی. وی از یک بینش خاص هندسی برخوردار است که به او اجازه می‌دهد به‌طور مستقیم با هندسه‌ی فضای مدولی دست و پنجه نرم کند. مریم میرزاخانی با توانایی شگفت‌انگیز خود در حیطه‌ی وسیعی از ریاضیات و آشنایی با فرهنگ‌های مختلف ریاضی ترکیب نابی از توانایی‌های تکنیکی، بلندپروازی شجاعانه، نگرش ژرف و کنجکاوی عمیق را در خود دارد. فضای مدولی دنیایی است که هنوز قلمروهای ناشناخته‌ای برای کشف کردن دارد. میرزاخانی به قطع یکی از رهبران این اکتشاف خواهد بود.

زندگی‌نامه

وی در سال ۱۹۷۷ در تهران به دنیا آمد و در سال ۲۰۰۴ مدرک دکتری خود را در دانشگاه هاروارد زیرنظر کرتیس مک‌مولن (McMullen Curtis) دریافت کرد. بین سال‌های ۲۰۰۴ تا ۲۰۰۸ وی محقق مؤسسه‌ی تحقیقات ریاضی کلی (Clay) و استادیار دانشگاه پرینستون بود. میرزاخانی هم‌اکنون پروفسور دانشگاه استنفورد است. از افتخارات وی می‌توان به جایزه‌ی بلومنتال (Blumenthal) برای تحقیقات پیشرفته‌ی ریاضی محض در سال ۲۰۰۹ و جایزه‌ی ستر (Satter) از انجمن ریاضی آمریکا در سال ۲۰۱۳ اشاره کرد.

مراجع

- M. Mirzakhani, Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces, Inventiones Mathematicae, 2007.
- M. Mirzakhani, Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves, Journal of the American Mathematical Society, 2007.
- M. Mirzakhani, Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces, Annals of Mathematics, 2008.
- M. Mirzakhani, Ergodic theory of the earthquake flow, International Mathematics Research Notices, 2008.
- A. Eskin and M. Mirzakhani, Invariant and stationary measures for the SL2.R. action on moduli space, preprint 2013; see arXiv:1302.3320.

* دانشگاه یزد

★ ★ ★

دعوت به ارسال خبر

خبرنامه انجمن ریاضی ایران از کلیه اعضای انجمن (به‌ویژه نمایندگان محترم انجمن در دانشگاه‌ها) صمیمانه دعوت می‌کند که با ارسال اخبار (ترجیحاً الکترونیکی)، مقالات، جملات کوتاه (ترجمه یا تألیف)، گزارش همایش‌ها، نکات خواندنی، دیدگاه‌ها، آگهی‌ها و ... به نشانی iranmath@ims.ir (همراه با نشانی کامل و تلفن تماس) به اعتلای اطلاعات جامعه ریاضی کشور کمک کنند.

اخبار و مقالات ارسالی پس از تصویب، همراه با نام نویسنده در خبرنامه درج خواهد شد.

هیأت تحریریهٔ خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران