در جستجوی اَشکال: از هندسهٔ هذلولوی تا مجتمع‌های مکعبی و برعکس[۳]

(بخش دوم و پایانی)

اریکا کلاریچ

ترجمه: علی نوروزی*، سعید علیخانی *

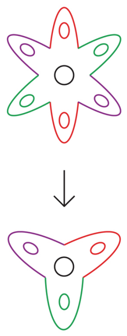
ویراستار: حسن حقیقی **

داستان پوشش

بار دیگر ریاضیدانان، برای راهنمایی بیشتر مجبور شدند به مقاله تأثیرگذار ترستن مراجعه کنند. در فهرست سؤالات مشهور او، حدس‌های بسیاری درباره ویژگی‌های منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی وجود داشتند، از جمله دو حدس که مستقیماً می‌گفت چنین منیفلدهایی شبیه چه می‌توانند باشند: حدس «هاکن مجازی» و حدس «تاربندی مجازی». حدس هاکن مجازی ادعا می‌کند که هر منیفلد سه‌بعدی هذلولوی فشرده، تقریباً هاکن است. به بیان دقیق‌تر: تبدیل منیفلد به یک منیفلد هاکن، تنها با به تعداد متناهی بار باز کردن آن به روش خاصی، امکان‌پذیر است. به این منیفلد جدید باز شده، «پوشش متناهی» منیفلد اصلی می‌گویند.

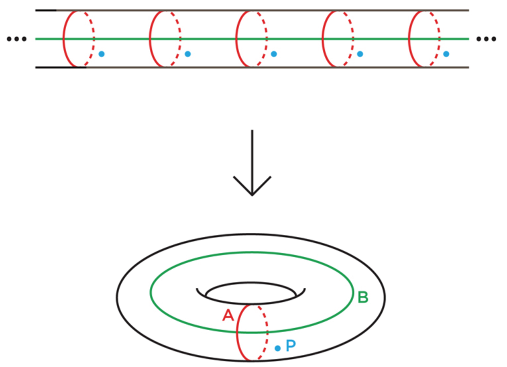
این اصطلاح که منیفلد N، یک منیفلد دیگر مانند M را می‌پوشاند، بدین معنی است که می‌توان N را به تعداد دفعات معینی بار (شاید نامتناهی بار) به دور M پیچید، به طوری که هر قسمت از M به تعداد دفعات مساوی با قطعات دیگر پوشیده شود. برای پوشش بودن، باید یک سری شرایط خوب دیگر نیز برقرار باشند، مثلاً این که N نباید بر روی خود تا شود و یا در طول عملیات پوشاندن پاره گردد. هر قسمت کوچک از M توسط یک دسته از کپی‌های یکسان در پوشش، یعنی N، پوشیده می‌شود.

برای مثال گل شش گلبرگی در شکل ۵، گل سه گلبرگی را می‌پوشاند: فقط دوبار گل شش گلبرگی را حول گل سه گلبرگی بپیچانید. هر نقطه از گل سه گلبرگی توسط دو نقطه از گل شش گلبرگی پوشش داده می‌شود، ریاضی‌دانان به این نوع پوشش، پوشش دولایه می‌گویند.



شکل ۵: گل شش گلبرگی، سه گلبرگی را می‌پوشاند.

به طور مشابه، یک استوانه به طور نامتناهی بلند، یک چنبره را به طور یکنواخت می‌پوشاند: فقط استوانه را به طور یکنواخت به تعداد نامتناهی بار به گِرد چنبره می‌پیچانیم (شکل ٦ را ببینید). هر نقطه بر روی چنبره پوشیده می‌شود: طوقه A روی چنبره توسط گردایه‌ای نامتناهی از طوقه‌های یکنواخت روی استوانه پوشیده می‌شود و این در حالی است که طوقه‌ی B روی استوانه باز می‌شود تا به صورت یک خط درآید که در امتداد ارتفاع استوانه قرار می‌گیرد.



شکل ٦: یک استوانه به طول نامتناهی بارها و بارها به گرد چنبره می‌پیچد. طوقه A روی چنبره به نامتناهی طوقه قرمز روی استوانه ترفیع می‌یابد. طوقه B روی استوانه باز می‌شود و خطی به رنگ سبز درمی‌آید. نقطه P روی چنبره به نامتناهی نقطه آبی روی چنبره ترفیع می‌یابد.

توپولوژی یک منیفلد و پوشش آن عمیقاً با هم در ارتباطند. برای بازسازی یک منیفلد از روی یک پوشش n لایه، کافی است پوشش را n بار بر روی خودش تا کنیم. به همین ترتیب برای بازسازی یک پوشش از روی یک منیفلد، منیفلد را قطعه قطعه کرده، n کپی از آن تهیه می‌کنیم سپس این n کپی را در امتداد مرزها به هم می‌چسبانیم (پوشش خاصی که به دست می‌آید ممکن است به انتخاب قطعات برای چسباندن بستگی داشته باشد). یک پوشش، در حالی که باز می‌شود، برخی ویژگی‌های توپولوژیک منیفلد را حفظ می‌کند. برای مثال استوانه نامتناهی، به خاطر می‌سپرد که طوقه A طوقه‌ای بسته در چنبره است، اما فراموش می‌کند که طوقه B نیز طوقه بسته است این فرآیند باز شدن دقیقاً آن چیزی بود که ترستن را به این واقعیت رهنمون کرد که امیدوار شود، برای یک منیفلد سه بعدی مفروض، ممکن است یک پوشش متناهی لایه تولید کرد که هاکن باشد. همانطور که قبلاً گفته‌ایم، برای یک

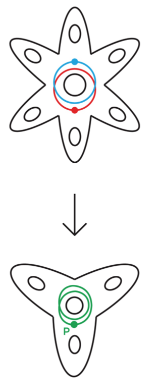
---

[۳] این مقاله ترجمه مقاله‌ای از نشریه کوانتا به نشانی زیر است:

https://www.quantamagazine.org/20121002 Getting into shapes, from hyperbolic geometry to cube complexes and back

منیفلد سه‌بعدی فشرده هذلولوی دلخواه مفروض، هیچ دلیلی وجود ندارد تا انتظار داشته باشیم هاکن باشد (یعنی یک رویه تراکم‌ناپذیر نشانیده شده داشته باشد). اما در سال ۱۹۶۸ ریاضی‌دان آلمانی، فریدهلم والدهاوزِن (Friedhelm Waldhausen) حدس زد که چنین منیفلدی باید لااقل شامل یک رویه تراکم‌ناپذیر باشد، گر چه ممکن است رویه در نقطه‌هایی خودش را قطع کند، تا یک به یک یا به عبارت درست‌تر نشانیده شده باشد.

ترستن استدلال کرد که چنین حالتی پیش آید، ممکن است بتوان یک پوشش متناهی پیدا کرد به‌طوری که رویه به نوعی باز شود و تمام تقاطع‌های رویه با خودش از بین برود. پوشش‌های متناهی اغلب می‌توانند چنین ساده سازی‌ای را به دست دهند. برای مثال خمی که در گل سه گلبرگی در شکل ۷ دو بار به دور حفره مرکزی می‌گردد، هیچ اندازه کشیدن و یا انتقال آن نمی‌تواند از قطع شدن خم توسط خودش در یک نقطه از آن جلوگیری کند. امااگر در گل شش گلبرگی از یک نقطه‌ی انتخابی خم، مانند P، شروع به باز کردن آن نمائیم، خم قرمز حاصل (که ریاضی‌دانان آن را «ترفیع» خم اصلی می‌نامند) یک بار دور حفره مرکزی می‌گردد و هرگز خودش را قطع نمی‌کند. (ترفیع دومی، یعنی خم آبی، نیز وجود دارد که خم قرمز را در دو نقطه قطع می‌کند که نقطه تقاطع در گل سه گل برگی می‌پوشاند).



شکل ۷: خم سبز درگل سه گلبرگی خودش را قطع می کند، اما ترفیع آن در گل ۶ گلبرگی، خم‌های قرمز و آبی، هیچ‌گاه خودشان را قطع نمی‌کنند (اگر چه یکدیگر را قطع می‌کنند).

ترستن، در مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۲ منتشر کرد، پیشنهاد کرد برای یک منیفلد سه‌بعدی هذلولوی فشرده مفروض، باید بتوان با باز کردنی مشابه، رویه‌های نشانیده شده در یک پوشش متناهی را تولید کرد. به عبارت دیگر، منیفلد سه‌بعدی باید «به طور مجازی» هاکن باشد. یک منیفلد هاکن، همان‌طور که در بالا بحث شد، می‌تواند با چسباندن مرز دیواره‌های یک چندبر به روشی خاص، ساخته شود. آنگاه، حدس هاکن مجازی ایجاب می‌کند که هر منیفلد سه‌بعدی هذلولوی فشرده می‌تواند ابتدا با به‌طور مناسب چسباندن چندبر و سپس با تا کردن شکل حاصل به تعداد متناهی به دورخودش، ساخته شود. ترستن ادامه می‌دهد و حتی مطلبی قویتر از این را نیز بیان می‌کند: هر منیفلد سه‌بعدی فشرده‌ی هذلولوی را می‌توان به طور مجازی تاربندی کرد، به این معنا که دارای پوششی متناهی است که «تاربندی» شده است. منیفلدی که «بر روی دایره تاربندی می‌شود» آن طور که ریاضی‌دانان می‌گویند. با مختصری ضخیم کردن یک رویه، تا جایی که سه‌بعدی شود، سپس با به هم چسباندن رویه‌های مرزی داخلی و خارجی، بر اساس هر آرایشی که دو رویه، نقطه به نقطه به طور هموار بر هم منطبق شود (چنین چسباندنی در فضای معمولی، بدون آن‌که بخش‌هایی از منیفلد حاصل خودش را قطع کند، قابل انجام نیست، معهذا به‌طور مجرد می‌توان آن را مورد مطالعه قرار داد). این منیفلد را تاربندی شده می‌نامند، چرا که اگر رویه ضخیم آن را تا جایی بکشیم که رویه‌های مرزی از هم دور شوند، آنگاه مرزها را به اطراف بچرخانیم تا قبل از به هم چسباندن روبه‌روی هم قرار گیرند، می‌توانید تصور کنید که منیفلد حاصل مثل یک دستبند است که در هر نقطه روی رشته دستبند دارای نامتناهی مهره به شکل رویه نازک است. این مهره‌ها، تارها نامیده می‌شود.

هر منیفلد تاربندی شده هاکن است اما عکس این مطلب درست نیست. پس حدس تاربندی کردن مجازی قوی‌تر از هاکن مجازی است، و ترستن نیز در مورد درست بودن آن شک داشت. وی در مقاله‌ی سال ۱۹۸۲ بیان می‌کند: «این‌که این سؤال به ظاهر درست، شانسی قوی برای درست بودن داشته باشد» بسیار دورتر از آنی بود که ترستن بتواند آن را در مقاله سال ۱۹۸۲ مطرح کند.

ترستن در اصل، حدس هاکن مجازی را در تلاش‌های اولیه‌اش برای حمله به حدس هندسی سازی‌اش، حدسی که قبلاً آن را برای منیفلدهای سه‌بعدی هاکن به اثبات رسانده بود، مطرح کرد. اگر حدس هاکن مجازی درست می‌بود، آنگاه هر منیفلد سه‌بعدی فشرده، یک پوشش هاکن متناهی می‌داشت. در این صورت، ترستن امیدوار بود که بتواند از ساختار هندسی روی پوشش، برای ساختن یک ساختار هندسی روی منیفلد اصلی استفاده کند. سه دهه بعد، درست پس از آن که پرلمان حدس هندسی‌سازی را با ابزارهایی متفاوت ثابت کرد، حدس هاکن مجازی و حدس به‌طور مجازی تاربندی کردن، حل نشده باقی مانده بودند. این حدس‌ها و دو حدس مرتبط دیگر، تنها سؤال‌هایی از ۲۳ مسأله ترستن بودند که حل نشده باقی مانده بودند. داده‌های کامپیوتری قویاً پیشنهاد می‌کرد که حدس هاکن مجازی درست است. ترستن و ناتان دانفیلد از دانشگاه ایلینوی توانستند از یک لیست کامپیوتری شده بیش از ۱۰۰۰۰ منیفلد سه‌بعدی هذلولوی، پوشش هاکن متناهی برای هر کدام از آن‌ها پیدا کنند. اما این شواهد کامپیوتری، اثبات نبودند.

مینسکی می‌گوید: «وقتی ترستن این سؤال را مطرح کرد، حدس هاکن مجازی سؤال کوچکی به نظر می‌رسید. مااین سؤال سرسختانه در مقابل هر راه‌حلی مقاومت کرد و بر این نکته که چقدر کم درباره این حوزه می‌دانیم، نوری تابانید. این سؤال به ما نشان داد بی‌اطلاعی ما در این زمینه خیلی عمیق و زیاد است».

ساختن رویه‌ها:

در ۲۰۰۹، ایده‌های تیره و تار اطراف حدس هاکن، به سوی روشن شدن حرکت کردند. در آن سال مارکویچ (Markovic) و جرمی کان (Jeremy Kahn) که در آن زمان در دانشگاه استونی بروک بودند و هم اکنون در دانشگاه براون هستند، اثباتی برای یک مرحله کلیدی در جهت اثبات حدس مجازی هاکن ارائه دادند. نتیجه به دست آمده، که به «قضیه رویه‌ی تراکم‌ناپذیر» معروف است، بیان می‌کند که هر منیفلد سه‌بعدی هذلولوی فشرده، «حتما شامل یک رویه‌ی تراکم‌ناپذیر (که ممکن است به جای نشانیده شدن در آن، خودش را نیز قطع کند) می‌باشد.

اثبات مارکویچ و کان مثالی بسیار برجسته از تعامل میان توپولوژی و هندسه می‌باشد. قضیه رویه تراکم‌ناپذیر قضیه‌ای کاملاً توپولوژیکی است اما برای اثبات آن مارکویچ و کان از ساختارهای غنی‌ای که هندسه هذلولوی عرضه می‌دارد، استفاده کردند. کان و مارکویچ برای ساختن یک رویه در درون یک منیفلد سه‌بعدی، از یک خاصیت اشکال هذلولوی به نام «آمیختن نمایی» استفاده کردند. بدین معنا که اگر از یک همسایگی کوچک درون منیفلد شروع کنید، جهتی را انتخاب کنید، و تصور کنید که همسایگی انتخاب شده در امتداد یک رودخانه شروع به جاری شدن می‌کند و به طور تقریبی در جهت انتخاب شده حرکت می‌کند و به تدریج گسترش پیدا می‌کند و به دور منیفلد می‌پیچد و از هر جهت ممکن به هر نقطه ممکن می‌رسد. بیشتر از آن، خیلی سریع گسترده می‌شود، یا به طور دقیق‌تر به طور نمایی. این خاصیت آمیختن، فقط مختص منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی است و تقریباً از این واقعیت ناشی می‌شود که، در فضای هذلولوی، برخلاف هندسه اقلیدسی، خطوط مستقیم یا ژئودزی‌ها، خم شده و از هم دور می‌شوند. اگر یک همسایگی کوچک درون قرص هذلولوی انتخاب کرده و اجازه دهیم در جهت خاصی به حرکت درآید، همسایگی به صورت نمایی به سرعت گسترش می‌یابد. درون یک منیفلد فشرده سه‌بعدی، جریان یافتن یک همسایگی که به صورت نمایی به سرعت رشد می‌کند، به دلیل متناهی بودن گستره منیفلد، این همسایگی بارها و بارها به دور منیفلد میپیچد و خود را به دفعات می‌پوشاند. علاوه بر این، که این سخت‌تر ثابت می‌شود، همسایگی به طور یکنواخت به دور منیفلد می‌پیچد، یعنی از تمام نقاط منیفلد به تعداد تقریباً یکسان عبور می کند.

بیش از ۲۵ سال است که ریاضی‌دانان خاصیت آمیختن نمایی را فهمیده‌اند و به طور تمام و کمال آمار این «جریان ژئودزیک» را تجزیه و تحلیل کرده و به طور تقریبی فهمیده بودند که چه موقع و چند بار یک همسایگی مفروض، هنگامی که در سراسر منیفلد جریان می‌یابد، از یک نقطه می‌گذرد. اما تا زمانی که کان و مارکویچ قضیه رویه تراکم‌ناپذیر را به اثبات نرسانده بودند، ریاضی‌دانان هرگز نتوانسه بودند به طور موفقیت آمیزی این خاصیت آمیختن را مهار کنند و برای ساختن ساختارهای توپولوژیک در یک منیفلد به خدمت بگیرند. (ریاضی‌دان دیگری، به نام لوئیس بوون (Lewis Bowen) از دانشگاه تگزاس $A\&M$، نیز قبلاً تلاش کرده بود تا از خاصیت آمیختن نمایی برای ساختن رویه‌های تراکم‌ناپذیر در منیفلدهای سه‌بعدی استفاده کند، اما کارش به موانع تکنیکی برخورد کرد.)

برای مشاهده این که چگونه آمیختن نمایی به ما کمک می‌کند که ساختارهای توپولوژیکی و هندسی را بسازیم، اجازه دهید آن را برای کاری ساده‌تر از ساختن رویه‌ها، به کار بریم: ساختن یک طوقه ژئودزیک بسته که طولش نزدیک عدد بزرگ مطلوب ما، یعنی R باشد.

برای ساختن طوقه مورد نظرمان، اجازه دهید یک نقطه را روی منیفلد و جهتی دلخواه را نیز برای شروع انتخاب کرده‌ایم. سپس یک فواره چرخان آب را تصور کنید، که یک همسایگی کوچک اطراف آن نقطه را احاطه کرده و تقریباً آن جهتی را که انتخاب کرده‌ایم نشانه رفته است، روشن کرده‌ایم. قطرات آب در طول مسیرهای ژئودزیک خارج می‌شوند و مادامی که R به اندازه کافی بزرگ است، آمیختن جریان، به این معناست که در طی زمان، قطرات آب فاصله‌ای برابر R را طی می‌کنند، آن‌ها در سراسر منیفلد به طور یکنواخت پخش می‌شوند. به خصوص، حداقل یک قطره‌ی (در واقع بسیاری) پرتاب شده، به نزدیک نقطه شروع و در امتداد جهت انتخاب شده باز می‌گردد. سپس به سادگی می‌توانیم یک پل کوچک بسازیم که مسیر پیموده شده قطره را، که مسیری ژئودزیک است، به نقطه شروع وصل کند تا طوقه‌ای بسازیم که به طور کامل ژئودزیک است و طول کل آن تقریباً برابر R است. نشان دادن این که این طوقه را با کمی کشیدن آن در منیفلد، می‌توانیم به یک طوقه کاملاً ژئودزیک تبدیل کنیم، چندان دشوار نیست.

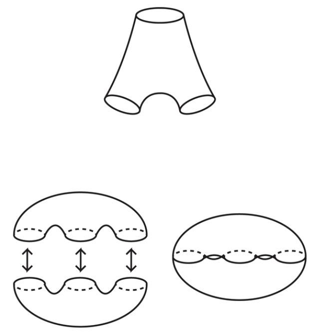
توجه داشته باشید که این روش، تنها یک طوقه ژئودزیک با طولی نزدیک به R به ما نمی‌دهد. هر نقطه‌ی منیفلد و هر جهت شروع اولیه‌ای در این فرایند می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و بسیاری از قطرات آب به نزدیکی نقطه شروعشان باز خواهند گشت، در واقع، به این ترتیب می‌توانیم تعداد بسیاری از چنین طوقه‌هایی بسازیم. این یک اصل عمومی ساختن ساختار با استفاده از خاصیت آمیختن نمایی است.

کَلِگِری گفته، «به طور نمایی آمیختن» بیان می‌کند که «هر ساختاری را که روی منیفلد پیدا کردید، می‌توانید به وفور روی منیفلد آن را پیدا کنید» کان و مارکویچ از رهیافتی مشابه تمرین ساختن طوقه استفاده کردند تا شکلی شبیه یک زوج پای شلوار درست کنند. از دیدگاه توپولوژیکی این رویه هم‌ارز با یک کره با سه حفره (به عبارت عامیانه، یک حفره کمر و دو حفره ران‌ها) است. زوج پای شلوارها بلوک‌های سازنده تمامی رویه‌های فشرده به جز چنبره و کره هستند، برای مثال چسباندن دو پای شلوار و کمر آن به هم دیگر یک چنبره دوتایی درست می‌کند. (شکل ۸ را ببینید) برای هر عدد داده شده و به اندازه کافی بزرگ R، کان و مارکویچ نشان دادند ساختن تعداد زیادی زوج پاهای شلوار به‌طوری که لبه‌های هر پای شلوار، طولی نزدیک به R داشته باشند و تقریباً

ژئودزیک باشند، امکان‌پذیر است. به این معنا که هر لبه پاهای شلوار از نقطه‌نظر هندسه هذلولوی بیشتر تخت به نظر می‌رسند.

همچنین آن‌ها نشان دادند در هر لبه یک زوج پای شلوار، زوج پای شلوار دیگری نیز وجود دارد که تقریباً در جهت مخالف قرار دارند. کان و مارکویچ با به هم دوختن این شلوارها در نقاط مناسب، یک خانواده بزرگ از رویه‌های فشرده ساختند که با مختصر تاب داشتن در محل دوخته شدن، تقریباً به‌طور کامل ژئودزیک هستند. رویه‌های تقریباً ژئودزیک، به عنوان رویه‌های تراکم‌ناپذیر در منیفلدهای سه‌بعدی‌شان شناخته شده‌اند. به این ترتیب روش ساختن رویه‌های فشرده‌ی منتسب به کان و مارکویچ، قضیه رویه تراکم‌ناپذیر را به اثبات رسانید.

کَلِگَری می گوید: «روش آنها، همچنین نشان داد که یک منیفلد سه‌بعدی، تنها یک رویه تراکم‌ناپذیر ندارد، بلکه همه نقاط آن ساختاری غنی از رویه‌های تقریباً ژئودزیک دارد».



شکل ۸: یک زوج از پاهای شلوار(بالا)، که با چسباندن دو پای شلوار یک چنبره دوگانه تشکیل می‌شود (پایین سمت راست).

کار کان و مارکویچ سبب شد تا جایزه سال ۲۰۱۲ مؤسسه تحقیقاتی کِلِی به آن‌ها تعلق بگیرد. این جایزه، هر ساله، توسط مؤسسه ریاضی کِلِی، برای ارج نهادن پیشرفت‌های مهم ریاضی، اهدا می‌شود.

جفری براک (Jeffrey Brock) از دانشگاه براون در مقاله‌ای درباره کان و مارکویچ می‌گوید: «تکنیک‌های کان و مارکویچ، به همان اندازه‌ی نتایج‌شان با صلابت و جذاب هستند و الهام‌بخش افراد بسیاری خواهد بود تا بتوانند رشته مطالب را دنبال کنند و آن‌ها را خاتمه دهند»

یک ساختار پنهان:

برای ریاضی‌دانانی که تلاش می‌کنند حدس هاکن مجازی را به اثبات برسانند، کار کان و مارکویچ یک نقطه آغاز را به دست داده است. آن‌ها نشان دادند که هر منیفلد یقیناً شامل رویه‌ای تراکم‌ناپذیر است. اما این رویه، به جای این که نشانده شده باشد، ممکن است خودش را قطع کند، شاید در بسیاری نقاط. برای رسیدن از نتایج کان و مارکویچ به اثبات حدس هاکن مجازی، ریاضی‌دانان باید یک پوشش متناهی برای منیفلد بیابند که در آن، درست مانند مثال گل‌های شش گلبرگی و گل‌های سه گلبرگی، رویه به یک خانواده از رویه‌هایی که خودشان را هرگز قطع نمی‌کنند ترفیع یابد (اگر چه آن‌ها ممکن است یکدیگر را قطع کنند). اگر چنین کاری امکان‌پذیر باشد، هر کدام از این رویه‌ها در این پوشش می‌تواند رویه‌ای نشانده شده و تراکم‌ناپذیر باشد، که این به معنای هاکن بودن پوشش است. اما چگونه می‌توان چنین پوششی پیدا کرد؟ دانفیلد می‌گوید: «یک شکاف عمیق میان نتایج کان و مارکویچ و حدس هاکن مجازی وجود دارد. یافته‌های آن‌ها بسیار مهم بود اما در آن زمان چندان معلوم نبود که آیا این نتایج برای به دست آوردن رویه‌های نشانده شده مفید خواهد بود.»

کارهای کان و مارکویچ توجه دانیل وایز (Daniel Wise) از دانشگاه مک گیل در مونرئال را به خود جلب کرد. تلاش‌های وایز معطوف به این واقعیت بود که چه موقع پوشش‌های متناهی، خودتقاطعی‌های یک شیء توپولوژیک را برطرف می‌کند. اما کارهای وی در زمینه «مجتمع‌های مکعبی» بود، اشیایی که به ظاهر شباهت چندانی به منیفلدهای سه‌بعدی ندارند. یافته‌های کان و مارکویچ این اجازه را به وایز داد که به دیگر ریاضی‌دانان نشان دهد که این دو مفهوم زیاد هم از یکدیگر دور نیستند.

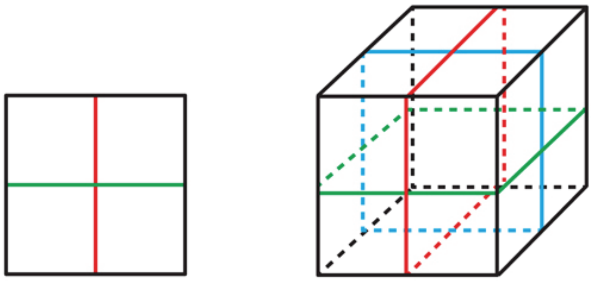
یک مجتمع مکعبی درست همان چیزی است که از اسمش برمی‌آید: گردایه‌ای از مکعب‌ها، با این تفاوت که در این‌جا، مکعب‌ها تنها به آن مکعب‌های سه‌بعدی که ما در ذهن داریم اشاره ندارند، بلکه به اشکالی اشاره دارند که در هر فضایی از هر بعدی می‌توانند قرار داشته باشند و تمام نقاطی را شامل شوند که مختصات آن‌ها مثلاً بین ۱− و ۱+ است. برای مثال، یک مربع می‌تواند یک مکعب دوبعدی تلقی شود و یک پاره‌خط هم مکعبی یک بعدی است. مکعب‌های درون یک مجتمع مکعبی می‌توانند در رأس‌ها، در امتداد یال‌ها، وجوه دوبعدی وجه‌های با بعد بالاتر به یکدیگر متصل شده باشند.

مجتمع‌های مکعبی، موجوداتی هستند که با منیفلدهای سه‌بعدی خیلی متفاوت هستند، برای آن‌ها که تازه با این موجودات آشنا شده‌اند باید گفت، آن‌ها حتی منیفلد هم نیستند زیرا محل تلاقی دو مکعب از بعد متفاوت هیچ‌گاه فضای معمولی از هر بعدی را تشبیه نمی‌کند. با این وجود، مجتمع‌های مکعبی وضعیت ساده شده‌ای هستند که در آن، یک جنبه کلیدی یک رویه، که در یک منیفلد سه‌بعدی نشسته، را می‌توان مطالعه کرد: این واقعیت که چنین رویه‌ای، حداقل به صورت موضعی، محیط خود را به دو طرف تقسیم می‌کند.

اگر هدف شما مطالعه اشیایی باشد که یک شکل را به دو طرف تقسیم می‌کند، مکعب‌ها نقطه‌ی شروعی طبیعی خواهند بود. چرا که از میان تمام اشکال ممکن، مکعب‌ها برخی از ساده‌ترین چنین اشیایی را در بردارند: «ابرصفحه‌ها» که میانه یک مکعب را برش می‌دهند. یک مربع دو ابرصفحه دارد خطوط عمودی و افقی که مربع را به دو نیم تقسیم می‌کنند. همچنین مکعب سه ابرصفحه دارد (شکل ۹). و به همین ترتیب یک مکعب nـ بعدی، nـ ابرصفحه دارد که همگی در مرکز ثقل مکعب هم دیگر را قطع

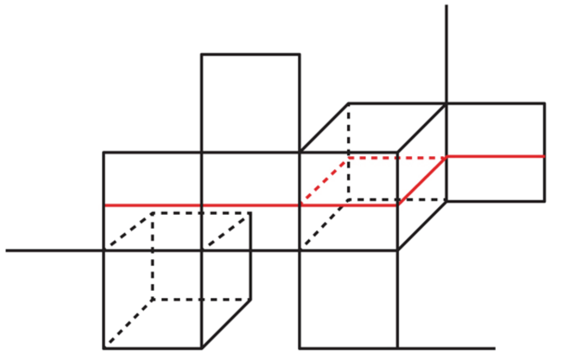
می کنند.

وایز می‌گوید: «ابرصفحه‌ها همانند رویه‌ها در منیفلدهای سه‌بعدی هستند، با این تفاوت که می‌توان آن‌ها را بلافاصله دید. پیدا کردن رویه‌ها سخت است، اما ابرصفحه‌ها در دسترس شما هستند، تا بتوانید با آن‌ها شروع کنید.»



شکل ۹: مربع سمت چپ دو ابرصفحه دارد. مکعب نیز سه ابرصفحه دارد.

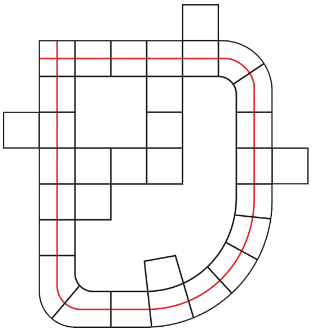
اگر با یک ابرصفحه درون یک مکعب از یک مجتمع مکعبی شروع کنیم، تنها یک راه برای گسترش دادن ابرصفحه به ابرصفحه‌هایی در مکعب‌های مجاور وجود دارد. پس از آن، دقیقاً یک راه برای گسترش دادن آن ابرصفحه‌ها به مکعب‌های مجاورشان وجود خواهد داشت، و این عمل به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. به این ترتیب با دادن یک ابرصفحه در یک مجتمع مکعبی، یک راه منحصر بفرد برای گسترش دادن آن به یک ابرصفحه برای کل مجتمع مکعبی وجود دارد (شکل ۱۰ را ببینید).



شکل ۱۰: ابرصفحه‌ی سمت راست مربع به طریقی منحصربفرد گسترش پیدا می‌کند تا کل مجتمع مکعبی را بپوشاند.

این ویژگی، یک تمایز بی‌روح با منیفلدها به‌وجود می آورد. چرا که در منیفلدها یک قطعه کوچک رویه می‌تواند به هر تعداد و به هر طریق به یک رویه کامل گسترش داده شود. آگول می‌گوید: «مجتمع‌های مکعبی و ابرصفحه‌هایشان زیبا، شفاف و با صلابتند، فارغ از نرمی و سستی منیفلدهای سه‌بعدی و رویه‌های درون آن‌ها.»

مادامی که یک ابرصفحه را در میان یک مجتمع مکعبی گسترش می‌دهیم، ممکن است به مکعبی که شروع کردیم برسیم و با ابرصفحه‌ای عمود بر ابرصفحه اولیه از میان آن بگذریم (شکل ۱۱). به عبارت دیگر، ابرصفحه گسترش داده شده ممکن است نشانیده شده نباشد. درست همانند رویه‌های درون یک منیفلد سه‌بعدی، می‌توان پرسید که آیا مجتمع مکعبی یک پوشش متناهی دارد به طوری که ابرصفحه‌هایی که متقاطع‌اند، به ابررویه‌های نشانده شده ترفیع یابند؟ این یعنی روایت هاکن مجازی بودن برای مجتمع مکعبی.



شکل ۱۱: مادامی که ابرصفحه‌ی مربع «گوشه‌ی سمت چپ بالایی را از طریق دیگر قسمت‌های مجتمع مکعبی گسترش می‌دهیم، این ابرصفحه به مکان اولیه خود بازگشته و خودش را به صورت متعامد قطع می‌کند.

سال‌ها پیش، وایز و فردریک هگلاند (Feredric Haglund) از دانشگاه پاریس یک رده‌ی «ویژه» از مجتمع‌های مکعبی را تعریف کردند که یکی از ویژگی‌های خوب آن‌ها این بود که فقط دارای ابرصفحه‌های نشانده شده (بدون خود تقاطعی) بودند. در طی دهه گذشته وایز تکنیک‌های بسیار زیادی برای تشخیص این‌که آیا یک مجتمع مکعبی ویژه است، یعنی دارای ابرصفحه‌های نشانده شده می‌باشد یا خیر، ابداع کرده است. در سال ۲۰۰۹ وایز یک «شاهکار» ۲۰۰ صفحه‌ای، آن طور که دانفیلد گفته بود، منتشر کرد که در آن بسیاری از یافته‌هایش درباره مجتمع‌های مکعبی «ویژه»، همچون «قضایای ترکیب»، که نشان می‌داد چگونه می‌توان مجتمع‌های «ویژه» را در کنار هم قرار داد تا یک مجتمع جدید به دست آورد و تضمین می‌کرد هنوز به طور مجازی «ویژه» است، را به طور مشروح بیان کرده بود. در این مقاله، وایز حدسی را ارائه کرده بود که به طور خیلی تقریبی می‌گفت هر مجتمع مکعبی که هندسه آن، مثل هندسه هذلولوی به اطراف خم می‌شود، «به طور مجازی» ویژه است، یعنی دارای یک پوشش متناهی ویژه است. این اظهاریه، به حدس مشهور است. وایز متقاعد شده بود که وقتی یک شکل داده شده شبیه به یک مجتمع مکعبی است، یعنی وقتی بتواند «مکعبی شده» باشد، ساختار مجتمع مکعبی کلید باز کردن بسیاری از ویژگی های شکل اولیه خواهد بود. وی می‌گوید: «مجتمع مکعبی رازی بود که افراد نمی‌دانستند حتی باید درباره آن سؤال کنند. مجتمع مکعبی یک ساختار ذاتی پنهان و بنیادی است».

چهارچوب مکعبی:

وایز هیجان‌زده و شیفته اشکال مکعبی‌سازی شده بود، اما در ابتدای کار، دوستان ریاضی‌دان وی، به خاطر وسواس وی نسبت به این اشکال، به او می‌خندیدند.

بلافاصله بعد از این‌که کان و مارکوویچ قضیه رویه تراکم‌ناپذیر را به اثبات رساندند، وایز و برگِرون مقاله‌ای به چاپ رسانیدند و نشان

دادند که وجود رویه تراکم‌ناپذیر در یک منیفلد سه‌بعدی هذلولوی فشرده، روشی برای مکعبی‌سازی آن به دست می‌دهد به‌طوری که رویه‌ها در منیفلدهای سه‌بعدی، دقیقاً به ابرصفحه‌ها در مجتمع مکعبی حاصل متناظر می‌گردد.

نکته کلیدی در روش ساختنی وایز و برگرون، واقعیتی بود که کان و مارکویچ به اثبات رسانده بودند، یعنی این واقعیت که چگونه می‌توان، نه یک رویه، بلکه تعداد زیادی رویه ساخت. به دنبال رهیافتی برای مکعبی سازی، به پیشتازی میشا ساگیو در ۲۰۰۳، وایز و برگرون شروع به جمع آوری یک خانواده بزرگ از رویه‌های کان و مارکویچ کردند، به اندازه‌ای که یک منیفلد سه‌بعدی را بتوان به یک چندبر فشرده تقسیم کرد.

حال یک نقطه اشتراک این رویه‌ها را در نظر بگیرید، مثلاً n، رویه در این نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. اندیشه ساگیو این بود که چنین تقاطعی را به عنوان سایه، تقاطع n ابررویه در یک مکعب n ـ بعدی در نظر بگیرد. مجتمع مکعبی متناظر به منیفلد سه‌بعدی، به طور تقریبی با قرار دادن یک مکعب n ـ بعدی برای هر تقاطع n ـ رویه (ساختن واقعی، به منظور پرداختن به توپولوژی‌های متنوع، کمی پیچیده‌تر است)، ساخته می‌شود. دو مکعب در مجتمع، مجاور یکدیگرند اگر نقاط تقاطع دو منیفلد سه‌بعدی به توسط یک وجه یکی از چندبرها متصل شده باشند.

دانفیلد گفته بود «مجتمع مکعبی در این جا، دقیقاً چگونگی تقاطع رویه‌ها با یکدیگر را ضبط می‌کند».

وایز و برگرون نشان دادند که این مجتمع مکعبی با منیفلد اصلی «به طور هموتوپی هم‌ارز» است، به این معنا که مجتمع مکعبی می‌تواند کنار هم قرار گیرد و یا به اطراف کشیده شود (شاید با تخت‌سازی و کاهش بُعد یا نا تخت‌سازی) تا جایی که مجتمع مکعبی به منیفلد تبدیل شود، و برعکس. به علاوه، این هم‌ارزی هموتوپی هر رویه در منیفلد سه‌بعدی را به یک ابررویه متناظر، به‌طور هموتوپی هم ارزبا رویه، تبدیل می‌کند.

مجتمع مکعبی که بدین طریق ساخته شود در شرایط هندسی حدس وایز صدق می‌کند. به این معنا که اگر حدس وایز درست باشد این مجتمع مکعبی یک پوشش متناهی دارد که در آن هیچ ابرصفحه‌ای خودش را قطع نمی‌کند. اگر چنین پوششی وجود داشته باشد (اجازه دهید بگوئیم، پوششی با m ـ لایه) آنگاه به یاد بیاورید که این پوشش می‌تواند از مجتمع مکعبی با بریدن مجتمع و باز کردن آن به یک روش و ساختن m کپی از مجتمع، و چسباندن کپی‌ها در امتداد برش‌ها، به دست آید. نشان دادن این که دستورالعمل ساخت پوشش مستقیماً می‌تواند دستورالعملی برای ساخت یک پوشش متناهی برای منیفلد سه‌بعدی به دست دهد چندان دشوار نیست، و رویه‌های کان ـ مارکویچ که برای ساختن مجتمع مکعبی مورد استفاده قرار گرفت، به رویه‌های نشانده شده ترفیع می‌یابند. به عبارت دیگر اگر حدس وایز درست باشد، آنگاه حدس هاکن مجازی هم درست است.

وایز می‌گوید «این معاوضه عجیب است. ممکن است مجتمع مکعبی شما، برای مثال ۱۰۰۰۰ ـ بعدی باشد، بنابراین به نظر می‌رسد که تا اندازه‌ای کار در حال بدتر شدن است. اما با این که مجتمع مکعبی بسیار بزرگ است، بسیاری از خواص آن به راحتی قابل فهمیدن است، بنابراین خیلی ارزشمند هستند. ترجیح می‌دهیم چیزی داشته باشیم که بزرگ اما سازمان یافته است، تا این که یک منیفلد سه‌بعدی داشته باشیم.»

حتی پس از این که وایز و برگرون ارتباط میان مجتمع‌های مکعبی و حدس هاکن مجازی را بیان کردند، بسیاری از توپولوژیست‌ها خودشان را از مجتمع‌های مکعبی دور نگاه داشتند. شاید این بدین خاطر بود که مقاله ۲۰۰ صفحه‌ای وایز بسیار دلهره‌آور می‌نمود، یا شاید مجتمع‌های مکعبی با نوع فضاهایی که آن‌ها برای مطالعه استفاده می‌کردند خیلی تفاوت داشت.

برگرون می‌گوید: «این ایده‌ها برای کسانی که با هندسه هذلولوی به خوبی آشنا هستند بسیار اسرارآمیز است.»

اما یک ریاضی‌دان بود که هم بر موضوع منیفلدهای سه‌بعدی مسلط بود و هم بر موضوع مجردتر بررسی‌های ترکیبیاتی که زبان رایج رهیافت وایز بود، مسلط بود.

برگرون می‌گوید: «گمان می‌کنم یان آگول تنها فرد متخصص منیفلدهای سه‌بعدی بود که خیلی زود فهمید ایده‌های وایز برای توپولوژیِ منیفلدهای سه‌بعدی می‌تواند مفید باشند.» آگول بلافاصله شروع به مطالعه شاه‌کار وایز کرد و متقاعد شد که تمام اجزای مربوط به حدس وایز درستند. آگول برای مدتی روی حدس هاکن مجازی کار کرده بود. وی متوجه شد که رویکرد وایز، که رویه‌های نرم را به ابرصفحه‌های شفاف تحلیل می‌برد، دقیقاً همان ابزاری است که به آن نیاز دارد. وی می‌گوید: «مجتمع مکعبی یک چهارچوب برای ساختن پوشش متناهی در اختیار ما قرار می‌دهد.»

برای ساختن یک پوشش متناهی ویژه از یک مجتمع مکعبی وایز برگرون، آگول ابتدا (به‌طور مجرد) با برش در امتداد ابر صفحه‌ها مجتمع مکعبی را تبدیل به تکه‌های کوچک لِگو کرد. سپس به وجوه این تکه‌ها رنگ‌هایی نظیر کرد، به طوری که هر دووجهی که در یک گوشه با همدیگر در تلاقی بودند، رنگ‌های مختلفی داشته باشند. سپس آگول نشان داد که یک راه برای چسباندن تعداد متناهی از کپی‌های قطعات لِگو به همدیگر وجود دارد به‌طوری‌که رنگ‌های اطراف و سطح وجوه کاملاً با هم مطابقت داشته باشند. در این حالت هر ابرصفحه‌ی گسترش یافته فقط یک رنگ خواهد داشت. مجتمع مکعبی حاصل یک پوشش متناهی برای مجتمع مکعبی اصلی خواهد بود، و تمامی ابرصفحه‌های آن نشانده شده خواهد بود. زیرا هر دو ابرصفحه‌ای که یکدیگر را قطع می‌کنند دارای رنگ‌های متفاوت هستند، و بنابراین یک ابرصفحه که خودش را قطع کرده باشد نخواهد بود.

در دوازدهم ماه مارس آگول اعلام کرد که حدس وایز و در نتیجه حدس هاکن مجازی را ثابت کرده است. دانفیلد می‌گوید: «این مهیج‌ترین خبر از زمان اثبات حدس هندسی‌سازی توسط پرلمان بود». این خبر به سرعت در میان متخصصان منیفلدهای سه

بعدی منتشر شد، و مجتمع‌های مکعبی به ناگاه موضوع مشترک بحث‌های داغِ میان آن‌ها تبدیل گردید. آگول می‌گوید: «تا الان، فکر نمی‌کنم جامعه ریاضی به این واقعیت پی برده باشد که کار وایز تا چه اندازه قدرتمند است. فکر می‌کنم نتایج من افراد بیشتری را از پیشرفت حیرت‌انگیزی که وایز در این زمینه به وجود آورده، آگاه خواهد کرد». وایز می‌گوید اکنون ریاضی‌دانان شروع به فهم این نکته کرده‌اند که «هر زمان که شما چیزی را مکعبی کنید، دارید تمام انواع اسرار ساختارها را کشف می کنید».

پایان یک دوره:

اثبات آگول از حدس وایز، با یک تیر، چهار نشان را زد: نه تنها حدس هاکن مجازی را به اثبات رسانید، بلکه سه سؤال دیگر از ۲۳ سؤال ترستن را که حل نشده بوند را نیز پاسخ داد. در طی سال‌های منجر به این اثبات، آگول و بقیه، ریاضی‌دانان نشان داده بودند که این سه سؤال، یعنی حدس به‌طور مجازی تاربندی کردن و دو سؤال تکنیکی‌تر در مورد منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی همگی از تبعات حدس وایز هستند.

در حالت حدس تاربندی مجازی، به یاد بیاورید که هدف نشان دادن این مطلب بود که هر منیفلد سه‌بعدی فشرده‌ی هذلولوی یک پوشش متناهی دارد که روی دایره تاربندی می‌شود. به این معنا که با چسباندن لبه‌های مخالف یک رویه ضخیم شده، ساخته می‌شود. از قضیه‌ی هاکن مجازی می‌دانیم که منیفلد یک پوشش متناهی دارد که هاکن است. یعنی این پوشش، یک رویه نشانده شده‌ی تراکم‌ناپذیر دارد. اگر منیفلد هاکن را بریده و در امتداد آن رویه باز کنید، چیزی شبیه به یک رویه ضخیم شده در انتهاهایش به دست خواهید آورد که می‌دانیم چه ویژگی‌های توپولوژیکی در خود نهفته دارد.

در ۲۰۰۸، بنابر آنچه کَلِگَری آن را «یک پیشرفت حیرت انگیز» می‌نامد، آگول نشان داد که منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی که در یک شرط تکنیکی معینی صدق می‌کنند به‌طور مجازی تاربندی می‌شوند. سال بعد وایز بر اساس این یافته نشان داد که تمام منیفلدهای هاکن به‌طور مجازی تاربندی شده‌اند. یعنی راهی برای باز کردن یک منیفلد هاکن برای گشودن توپولوژی پیچیده نهفته در آن وجود دارد، که به یک منیفلد تاربندی شده ساده منتهی می‌گردد. به این ترتیب، اگر یک منیفلد به‌طور مجازی هاکن باشد، آنگاه باید به‌طور مجازی نیز تاربندی شده باشد.

کَلِگَری میگوید: «گمان می‌کنم همه براین باور بودیم که درستی حدس هاکن مجازی نشان داده خواهد شد، اما حدس تاربندی مجازی خیلی دور از دسترس به نظر می‌رسید. برای من، این واقعیت که حدس تاربندی مجازی از حدس هاکن مجازی نتیجه می‌شود، یکی از غافلگیرکننده‌ترین جنبه‌های این داستان بود».

به گفته‌ی مینسکی، با اثبات حدس تاربندی مجازی «وسوسه می‌شوید که منیفلدهای سه بعدی را اشیایی ساده بپندارید. چرا که منیفلدهایی که روی دایره تاربندی می‌شوند ساده هستند». وی همچنین می‌گوید: «اما این به ما یاد می‌دهد که که منیفلدهایی که بر روی دایره تاربندی می‌شوند، به هیچ وجه ساده نیستند. آن‌ها بسیار ظریف‌تر از آنچه ما می‌پنداریم می‌باشند».

در عین حال، قضیه‌ی تاربندی مجازی می‌گوید که یک دستورالعملِ ساده و آموزنده برای تولید همه‌ی منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی فشرده می‌باشد: با یک رویه ضخیم شده شروع کنید، مرزهای داخلی و خارجی را به دلخواه خود بپیچانید و آن‌ها را به یکدیگر بچسبانید، و بعد این منیفلد را به تعداد متناهی بار به دور خودش تا کنید.

کَلِگَری می‌گوید: «اگر درباره‌ی منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی از من سؤال کنید، از شما می‌پرسم چه نوعِ منیفلدی می‌خواهید؟ چه نوعِ تاربندی‌ای و چه نوع پوشش متناهی می‌خواهید؟ «وی همچنین می‌گوید: «ما الان می‌دانیم که با انجام این روش هیچ منیفلد سه‌بعدی را از قلم نخواهیم انداخت. با این که اندکی طول خواهد کشید که ریاضی‌دانان کارهای آگول را به‌طور کامل مورد بررسی قرار دهند، بسیاری انتظار دارند که این کارها درست از آب در آیند».

مینسکی می‌گوید: «یان آگول آدمی نادقیق نیست». حال که آخرین سؤالات فهرست ترستن نیز جواب داده شده، ریاضی‌دانان در تلاشند تا بفهمند توپولوژی منیفلدهای سه‌بعدی در دوران جذاب پس از ترستن به چه شکلی خواهد بود.

ریاضی‌دانان بر این مطلب اتفاق نظر دارند که برای شناختن اشکال به توسط مکعبی کردن، کارهای زیادی باید انجام شود. اما وقتی صحبت از خود منیفلد سه‌بعدی می‌شود، یعنی ریاضی‌دانان، به انتهای یک دوره رسیده‌اند. اما آگول می‌گوید، این خود شروع یک دوره جدید است.

آگول می‌گوید: «اکثر حوزه‌های ریاضی دارای یک چنین بینش فراگیری نیستند تا کارهایی که باید در آن حوزه برای بیست سی سال آینده انجام شود را فراهم آورد.» حالا وی پیشنهاد می‌کند که توپولوژی و هندسه منیفلدهای سه‌بعدی می‌تواند شبیه دیگر حوزه‌ها شوند، که در آن ریاضی‌دانان «بی هدف در اطراف حرکت کنند» و برای پیش بردن آن حوزه تلاش کنند، حتی بدون بهره بردن از یک تصویر بزرگ از آنچه در جریان است. وی همچنین می‌گوید: «نسل بعدی ریاضی‌دانان درخواهند یافت که سؤالات مهم بعدی چه خواهند بود».

* دانشکده ریاضی دانشگاه یزد
** دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی