در جستجوی اَشکال: از هندسهٔ هذلولوی تا مجتمع‌های مکعبی و برعکس[2]

(بخش نخست) اریکا کلاریچ

ترجمه: علی نوروزی[*]، سعید علیخانی[*]

ویراستار: حسن حقیقی[**]

سی سال پیش ویلیام تِرستِن (William Thursten) با مطرح کردن موضوع طبقه‌بندی تمام اشکال هندسی متناهی سه‌بعدی ممکن، دریچهٔ جدیدی به سوی ریاضیات گشود. تِرستِن، که برندهٔ مدال فیلدز بود، اکثر دوران حرفه‌ای خود را در پرینستون و کورنل گذرانید. وی در مجسم کردن آن‌چه در تصور نمی‌گنجید، توانایی خارق‌العاده‌ای داشت. این توانایی تنها به اشکالی که در فضای سه‌بعدی معمولی قرار داشتند محدود نمی‌گردد، بلکه مجموعه گسترده‌تری از این اشکال، از جمله اشکال تابیده شده پیچیده‌ای که نشان می‌دهد تنها در فضاهایی با بعد بالاتر قابل نشانیدن هستند را نیز مجسم کند. جایی که، دیگر ریاضی‌دانان انبوهی از اشکال خام را می‌دیدند، او ساختار را می‌دید: یعنی تقارن‌ها، رُویه‌ها و روابط بین اشکال مختلف.

ویلیام ترستن، برکلی ۱۹۹۱. وی در ٦٥ سالگی درگذشت

ترستن در سال ۲۰۰۹ نوشت: «بسیاری از افراد، بسته به سال‌های تحصیلشان، بر این باورند که ریاضیات موضوعی خشک و صوری درباره قواعد پیچیده و در نهایت گیج‌کننده است. ریاضیاتِ خوب کاملاً بر خلاف این برداشت است. ریاضیات هنر درک کردن بشر است. وقتی ریاضیات را به‌طور کامل در ذهن‌مان متوجه می‌شویم، ریاضیات به آواز درمی‌آید».

در مرکز بینشی که ترستن داشت دو شیوه به ظاهر جدا از همِ مطالعه شکل‌های سه بعدی به هم پیوند خورده بود: هندسه، حوزه آشنای زاویه‌ها، طول‌ها، مساحت‌ها و حجم‌ها، و توپولوژی، که خواصی از یک شکل را مطالعه می‌کند که به اندازه‌گیری دقیق هندسی بستگی ندارد، خواصی که تحت کشیده شدن شکل و یا کج‌ومعوج کردن آن تغییر نمی‌کند.

برای یک توپولوژی‌دان، رُویه‌ی به شکل یک ماهی‌تابه با رُویه‌ی به شکل یک میز، یک خودکار یا یک توپ فوتبال هم‌ارز است. هم‌چنین رویه‌ی به شکل یک فنجانِ قهوه با رویه به شکل یک دونات و یا یک چنبره هم‌ارز است. از دیدگاه یک توپولوژی‌دان تعدد اشکال دوبعدی یعنی رویه‌ها، به لیست کوتاهی از رده‌های رویه‌های هم‌ارز خلاصه می‌شود. رویه‌هایی مثل کره، رویه‌هایی مانند یک چنبره و رویه‌هایی مانند چنبره اما با یک یا بیش از یک حفره. (اکثر ما فکر می‌کنیم کره و یا چنبره سه‌بعدی هستند، اما از آن‌جا که ریاضی‌دانان آن‌ها را به‌صورت رویه‌های توخالی می‌بینند، آن‌ها را اشیایی دوبعدی در نظر می‌گیرند، که برحسب مساحت رویه و نه حجم اندازه‌گیری می‌شوند).

نکته‌ی کلیدی: دیدگاهِ ترستن این بود که با متحد کردن هندسه و توپولوژی است که اشکال سه‌بعدی یا منیفلدهای سه بعدی را می‌توان فهمید. درست مانند رسته توپولوژیکی منیفلدهای دوبعدی، که رویه‌هایی از قبیل رویه ماهی‌تابه شکل یا به شکل خودکار و یا هم‌چنین کره کامل را شامل می‌شوند. ترستن حدس زد که تعداد زیادی از رسته‌های منیفلدهای سه‌بعدی وجود دارند که شامل یک نمونه بارز هستند، یک منیفلد سه‌بعدی که هندسه‌اش به قدری کامل، زیبا و بی‌نقص است که والتر نویمان (Walter Neumann) از دانشگاه کلمبیا علاقه‌مند بود بگوید این نمونه «مثل ناقوس صدا می‌دهد». حتی بیشتر، ترستن حدس زد اشکالی که مثل این نمونه بارز نیستند، می‌توانند به تکه‌هایی تقسیم گردند که چنین خاصیتی برای آن‌ها برقرار باشد.

در مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد، ترستن حدس «هندسی‌سازی» را به‌عنوان بخشی از ۲۳ مساله درباره منیفلدهای سه‌بعدی مطرح نمود که نقشه راهی به سوی درک کامل اَشکالِ سه‌بعدی پیش روی ریاضی‌دانان قرار داد (این لیست در واقع شامل ۲۴ مسأله است، اما یکی از آن‌ها، که هنوز حل نشده، بیشتر شبیه به یک راه فرعی جذاب است تا یک راه اصلی).

ولادیمیر مارکوویچ (Vladimir Markovic) ریاضی‌دانی از مؤسسه تکنولوژی کالیفرنیا، می‌گوید: «ترستن این استعداد خارق‌العاده را برای پرسیدن سوال‌های درست داشت». وی هم‌چنین می‌گوید «هر کسی می‌تواند سؤالی طرح کند، اما بعید است که این پرسش منجر به یک بینش و جنبه زیبایی از موضوع شود، ولی به نظر می‌آمد شیوه سؤالات ترستن همیشه به چنین بینشی بیانجامد».

این سؤالات، الهام‌بخش نسل جدیدی از ریاضی‌دانان بود. خیلی از آن‌ها تصمیم گرفتند تحصیلات تکمیلی خود را زیر نظر ترستن ادامه دهند. ریچارد براون (Richard Brown) از دانشگاه جان هاپکینز نوشت: «کودک» درون ریاضی ترستن راه را به وی نشان می‌داد.

[2] این مقاله ترجمه مقاله‌ای از نشریه کوانتا به نشانی زیر است:

https://www.quantamagazine.org/20121002 Getting into shapes, from hyperbolic geometry to cube complexes and back

به نظر می‌رسد که وی به ریاضیات، مانند بچه‌ای که یک مراسم کارناوال را تماشا می‌کند، می‌نگرد: با هر کشف جدید شگفت‌زده و سرشار از شادی می‌شود و فقط از این‌که بخشی از کل صحنه است، خرسند می‌شود.

چند دهه پس از این که مقاله‌ی تأثیرگذار ترستن منتشر شد، ریاضی‌دانان نقشه‌ی راه وی را دنبال کردند. آن‌ها کمتر مشتاق کاربردهای ممکن بودند بلکه علاقه‌مند به فهمیدن این‌که منیفلدهای سه‌بعدی چیزی مثل یک ظرف شیرینی را در مطالعه اشکال سه‌بعدی اشغال می‌کنند بودند. اشکال دوبعدی کمی یکنواخت هستند و می‌توان آن‌ها را به راحتی مجسم و دسته‌بندی کرد. اشکال چهار، پنج و ابعاد بالاتر نیز اساساً رام‌نشدنی هستند: دامنه گوناگونی‌ها آن‌چنان گسترده است که ریاضی‌دانان تا به حال بلندپروازی‌های خود را تنها به شناخت برخی از خواص آن‌ها محدود کرده‌اند. در مقابل، برای اشکال سه‌بعدی، ساختارها اسرارآمیز و ذهن را بسیار درگیر می‌کنند، اما در نهایت قابل شناختن هستند.

در حالی که امسال مقاله ترستن وارد سی‌امین سال انتشار خود می‌شود، تمام مسائل اصلی آن به جز چهار تا، حل شده‌اند. حدس هندسی‌سازی نیز در میان مسائلی که حل شده‌اند قرار دارد. این حدس توسط ریاضی‌دان روسی، گریگوری پرلمان (Grigori Perelman) در سال ۲۰۰۲ به اثبات رسید و یکی از دستاوردهای عظیمِ ریاضیات جدید به شمار می‌آید. اما، چهار مسأله باقیمانده، در مقابل هر راه‌حلی به شدت از خود مقاومت نشان می‌دهند.

ییر مینسکی (Yair Minsky) از دانشگاه ییل گفته بود: «این نکته که ما نتوانستیم برای مدتی طولانی این مسائل را حل کنیم حاکی از این است که چیزی عمیق در آن جریان دارد».

بالاخره در ماه مارس، یان آگول (Ian Agol) از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی، با ارائه اثباتی برای حدس وایز، که هر چهار مسأله را حل می‌کرد، جامعه ریاضی را به شدت تکان داد.

ریاضی‌دانان این اثبات را پایان یک عصر می‌نامند.

دنی کالگری (Danney Calgeri) از مؤسسه تکنولوژی کالیفرنیا می‌گوید: چشم‌اندازی که ترستن از منیفلدهای سه‌بعدی در مقاله‌اش ارائه کرده بود و در زمان خودش بسیار شگفت‌انگیز بوده، اکنون کاملاً فهمیده شده است. هم‌چنین وی می‌گوید: «دیدگاه او از همه جوانب، به طرز قابل توجهی مورد تأیید قرار گرفته و نشان داده شده که تمام جزئیات کارهای وی درست بوده است».

ترستن وقتی برنده جایزه استیل شد، یعنی درست یک ماه قبل از این‌که در سن ۶۵ سالگی، در ماه اوت از دنیا برود گفت: «عادت داشتم احساس کنم دانش معینی و روش‌های تفکر معینی وجود دارد که منحصر به من بودند».

«بسیار رضایت‌بخش است که به مرحله‌ای رسیده‌ام که این مطلب دیگر درست نیست. تعداد زیادی از روش نگرش من پیروی کردند و عده زیادی قضایایی را که من یک بار سعی کردم و نتوانستم آن‌ها را به اثبات برسانم، ثابت کرده‌اند».

نتایج آگول نشان می‌دهد که یک دستورالعمل خاص و ساده برای ساختن تمام منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی فشرده وجود دارد. این نوع اشکال تاکنون به‌طور کامل تشریح نشده بودند.

هنری ویلتون (Henry Wilton) از کالج لندن می‌گوید: به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت الان می‌دانیم که تمامی منیفلدهای سه‌بعدی چه شکلی هستند. و این نقطه اوجی برای داستان یک موفقیت چشمگیر در ریاضیات است.

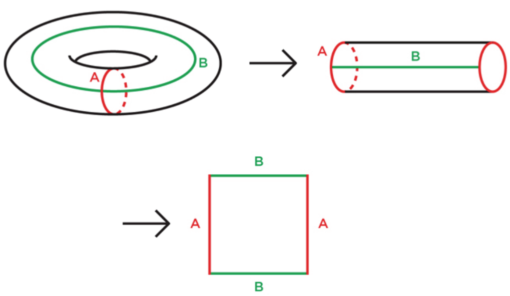
مطالعه رُویه

برنامه ترستن تلاش کرده آن‌چه را که ریاضی‌دانان بیش از یک قرن پیش برای منیفلدهای دوبعدی ثابت کرده بودند، برای منیفلدهای سه‌بعدی انجام دهند.

به‌عنوان دست گرمی برای شناختن منیفلدهای سه‌بعدی، اجازه دهید نگاهی به طبقه‌بندی رویه‌های جهت پذیر، فشرده بیندازیم. (رویه‌های متناهی که فاقد بریدگی و یا سوراخ هستند و به‌صورت سازگاری دارای یک جهت می‌باشند).

برای حمله به این مسأله، ریاضی‌دانان نشان دادند که یک رویه مفروض را می‌توان از طریق بریدن و باز کردن آن در امتداد خم‌ها، تا زمانی که کاملاً روی یک چندضلعی باز شود، به صورت گام به گام ساده کرد.

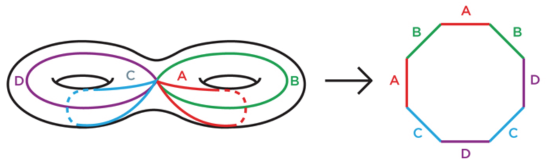
به آسانی دیده می‌شود چگونه این کار را می‌توان با، به عنوان مثال چنبره، انجام داد: ابتدا همانند شکل ۱ چنبره را در امتداد طوقه A ببرید و باز کنید تا یک استوانه به‌دست آید، سپس در امتداد طوقه B آن را برش دهید و استوانه را روی یک مربع بگسترانید.



شکل ۱: برش در امتداد حلقه‌ی A یک استوانه پدید می‌آورد. با ادامه برش در امتداد B یک مربع حاصل خواهد شد.

با روشی کمی سخت‌تر از این می‌توان دید که با بریدن رویه در امتداد چهار خم نشان داده شده در شکل ۲، یک چنبره دوگانه (چنبره با دو حفره) را به یک ۸ ضلعی تبدیل می‌کند. به‌طور مشابه برای هر چنبره n حفره‌ای، می‌توانیم در امتداد $2n$ ـ طوقه برش را

انجام و رویه را روی یک $4n$ ـ ضلعی خوابانید.



شکل ۲: برش در امتداد A و B و C و D یک هشت ضلعی به ما می‌دهد.

با داشتن یک رویه ناشناخته دلخواه با تقسیم‌کردن آن به روشی مشابه، می‌توان تلاش کرد آن را ساده‌تر کرد (و دست آخر آن را شناسایی کرد). توپولوژی‌دانان، برای انجام این کار، ثابت کرده‌اند که اگر این رویه کره نباشد، باید دارای طوقه‌هایی نشانیده شده‌ای (طوقه‌هایی که خودشان را قطع نمی‌کنند) باشند که نتوانند به یک نقطه منقبض شوند، مانند حلقه‌های A و B در چنبره. بریدن رویه در امتداد یکی از این طوقه‌ها باعث از بین رفتن برخی ویژگی‌های جالب توپولوژیکی می‌شود. ریاضی‌دانان نشان دادند که تنها تعداد متناهی برش تا رسیدن به یک چندضلعی تخت وجود دارد.

به محض این‌که رویهٔ خود را به یک چندضلعی ساده تبدیل کردیم، به گونه نسبتاً ساده‌ای می‌توان دید که چگونه می‌توان با دوباره به هم چسباندن اضلاع، شکل اصلی را بازیابی کرد، باید به یک چنبره، یا یک چنبره دوتایی، یا یک چنبره سه‌تایی، و غیره رسید. بعد از همه این‌ها، اولین به هم چسباندن، چندضلعی را به یک رویه به شکل تونل تبدیل می‌کند، و سپس به هم چسباندن بَعدی یا یک دسته تونل مانند روی رویه درست می‌کند و یا فقط یک درز باز را به هم می‌دوزد. وقتی این کار را تمام کردیم، یک رویه با تعدادی دسته، به دست می‌آید.

این روش بیشتر از این‌که نشان دهد یک رویه هم ارز یک کره یا نوعی چنبره است، راهی برای مجهز کردن یک رویه به یک ساختار هندسی یکنواخت، ساده به دست می‌دهد.

یک کره آشکارا دارای یک ساختار هندسی یکنواخت می‌باشد: مهم نیست که کجای آن ایستاده‌اید، هندسه آن یکسان به نظر می‌رسد. در مقابل، یک رویه به شکل دونات هر چیزی هست به جز ساختار یکنواخت، یک ناحیه از لبه خارجی دونات چنان خم می‌شود که یادآور کره است، در حالی که لبه درونی دونات بیشتر شبیه به رویه‌ای با شکل زین اسب است.

مهم نیست که چقدر تلاش می‌کنید تا یک چنبره را در فضا قرار دهید، مهم نیست که چقدر آن را می‌کشید و کج‌ومعوج می‌کنید، هیچ راهی وجود ندارد که هندسه آن را در هر نقطه یکسان کرد. برخی بخش‌ها به شکل کره خم می‌شوند و برخی دیگر به شکل زین اسبی هستند. حتی برخی قسمت‌ها نیز ممکن است تخت باشند.

به هر روی امکان این‌که چنبره را به یک ساختار هندسی مجرد مجهز کرد به‌طوری‌که در هر نقطه آن یکسان باشد، وجود دارد: فقط اعلام کنید که در هر قطعه مختصاتی کوچکِ چنبره، فاصله‌ها و زوایا را باید با اندازه‌گیری اشیا متناظرشان روی مربعی که هم‌اکنون دیدیم چنبره را چگونه از روی آن ساختیم، تعیین کرد. غیر ممکن است بتوان در فضای معمولی چنبره‌ای فیزیکی ساخت به‌طوری که تعیین طول‌ها و زوایای آن مطابق با این قاعده مجرد انجام پذیرد، اما این تعاریف از طول و زاویه به‌طور درونی سازگار می‌باشند. زیرا مربع یک هندسه تخت معمولی دارد، که نشان می‌دهد چنبره می‌تواند به یک ساختار اقلیدسی مجهز گردد.

چنبره‌ای با این هندسه، شبیه به یک بازی کامپیوتری است که در آن، زمانی که یک موجود در سمت راست صفحه نمایش است، در سمت چپ دوباره ظاهر می‌شود، و زمانی که در بالای صفحه نمایش است در پایین آن دوباره ظاهر می‌شود.

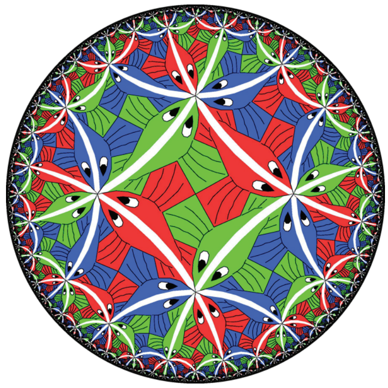
اگر تلاش کنیم همین کار را با چنبرهٔ دوگانه انجام دهیم به مانع برمی‌خوریم. دیدیم که می‌توان یک چنبره‌ی دوگانه را با به هم چسباندن یک هشت‌ضلعی به‌دست آورد. اگر بگوییم که هندسه برروی چنبرهٔ دوگانه شبیه هندسه هشت‌ضلعی است در گوشه‌های هشت‌ضلعی به مشکل بر خواهیم خورد. پس از آن‌که هشت‌ضلعی را به هم چسباندیم و چنبره دوگانه را ساختیم، همه گوشه‌ها به هم متصل می‌شوند تا تشکیل یک نقطه دهند. هر هشت گوشه از هشت‌ضلعی در این نقطه به هم می‌رسند. هر گوشه زاویه‌ای برابر ۱۳۵ درجه دارد که مجموع آن ۱۰۸۰ است (به جای ۳۶۰ درجه معمول).

پس اگر تلاش کنیم ساختاری مشابه هشت‌ضلعی به چنبره دوگانه بدهیم، به چنبره‌ای دوگانه خواهیم رسید که در همه نقاط به جز یک نقطه، یعنی نقطه‌ای که رویه در آن پیچ می‌خورد، هندسه‌ی اقلیدسی معمولی را دارد.

برای به دست آوردن یک ساختار هندسی هموار در نقاط گوشه‌ای چنبره دوگانه، نیاز داریم هر یک از هشت گوشه هشت‌ضلعی به جای زاویه ۱۳۵ درجه، زاویه ۴۵ درجه بسازند. شایان ذکر است که این چنین هشت‌ضلعی‌ای وجود دارد اما نه در صفحه اقلیدسی معمولی، بلکه در ساختار هندسی دیگری به نام هندسه قرص هذلولوی، این هندسه یک هندسه نوع سوم است که همانند هندسه اقلیدسی یکنواخت و به‌طور درونی هم‌چون هندسه کروی یا هندسه اقلیدسی سازگار است، اما چون به سختی قابل نمایش است حتی تا اوایل قرن نوزدهم به وسیله ریاضی‌دانان کشف نشده بود.

به بیانی نه چندان دقیق می‌توان گفت که هندسه هذلولوی چیزی است که اگر همه ماهی‌های شکل ۳ را یک اندازه در نظر بگیرید به آن خواهید رسید. اگر شکل ۳، واقعاً تصویر قرص هذلولوی از دریچهٔ یک لنز کج و معوج باشد که باعث می‌شود ماهی‌های نزدیک مرز کوچکتر از ماهی‌های در مرکز به نظر برسند، مثل آن

خواهد شد. روی یک دیسک هذلولوی واقعی که به‌طور نظری در آن طرف لنز قرار دارد، تمامی ماهی‌ها یک اندازه دارند.

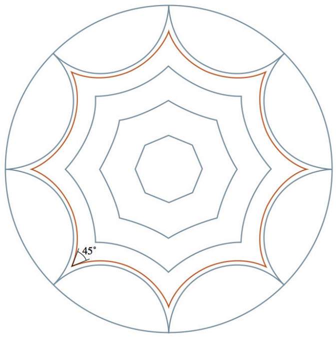


شکل ۳: هرگاه از دریچه هندسه هذلولوی به آن بنگریم، همه ماهی‌ها به یک اندازه خواهند بود. خطوطی که در امتداد تیره پشت ماهی‌ها می‌گذرند، خطوط مستقیم هندسه هذلولوی و یا ژئودزی‌ها هستند.

هیچ راهی برای رسم یک قرص هذلولوی هموار در فضای معمولی که در آن تمامی ماهی‌ها یکسان به نظر رسند وجود ندارد. اما از دیدگاه مجرد، قاعده اندازه ماهی، هندسه‌ای به دست می‌دهد که سازگاری درونی دارد و از هر نقطه، نه وقتی که توسط یک شخص خارجی از دریچه یک لنز کج و معوج به آن نگاه می‌کند، بلکه از منظر شخصی که روی قرص هذلولوی زندگی می‌کند، یکسان به نظر می‌رسد.

در هندسه هذلولوی کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، یا ژئودزی، مسیری است که برای رسیدن از یک نقطه به نقطه دیگر از کمترین تعداد ماهی‌ها عبور می‌کند. نشان داده می‌شود که چنین مسیری همواره یک نیم‌دایره عمود بر مرز قرص می‌باشد، نیم‌دایره‌هایی که از تیره پشت ماهی‌ها می‌گذرد، مثال‌هایی از این خطوط هستند. از منظر کج‌ومعوج شده یک ناظر خارجی، این چنین مسیرهایی خمیده به نظر می‌رسند، اما برای یک فرد که در داخل این قرص است، این مسیرها «خطوط مستقیم» هستند که به قول ترستن برای رانندگی در امتداد آن‌ها نیازی به چرخاندن فرمان نیست. برخلاف صفحه اقلیدسی که در آن خطوط موازی همیشه به یک فاصله هستند، در قرص هذلولوی دو خط که با هم تلاقی ندارند می‌توانند به سرعت از هم دور شوند.

از دیدگاه هندسه هذلولوی اشکالی که در تصویر ۴ هستند، همگی هشت‌ضلعی‌های منتظم با یال‌های مستقیم هستند. در یکی از این هشت‌ضلعی‌ها زوایا همگی ۴۵ درجه هستند، درست همان چیزی که برای ساختن چنبره دوگانه به آن نیاز داشتیم. اگر به شکل صحیح یال‌های این هشت‌ضلعی را به هم بچسبانیم، نتیجه یک چنبره دوگانه با یک ساختار هذلولوی یکنواخت و کامل خواهد بود.



شکل ۴: هشت‌ضلعی‌های منتظم در فضای هذلولوی، همانند آن‌چه رسم شده، می‌توانند هر زاویه داخلی دلخواه با اندازه بزرگتر از صفر و کمتر از ۱۳۵ داشته باشند. هشت‌ضلعی قهوه‌ای که همه زوایای داخلی آن ۴۵ درجه است می‌تواند به هم چسبانده شود تا یک چنبره دوگانه با هندسه هذلولوی هموار به دست دهد.

به طور مشابه می‌توانیم یک چنبره سه‌گانه را نیز به ساختار هذلولوی مجهز کرد. یک چنبره سه‌گانه را می‌توان با به هم چسباندن لبه‌های یک دوازده‌ضلعی منتظم به دست آورد. پس اگر یک دوازده‌ضلعی هذلولوی بسازیم که تمام زوایای داخلی آن ۳۰ درجه باشند، هندسه هذلولوی آن می‌تواند به‌طور هموار به یک چنبره سه گانه منتقل گردد. با ادامه این کار می‌توان چنبره‌های ۵ حفره‌ای، ٦ حفره‌ای و الی آخر را به هندسه هذلولوی مجهز کرد. رده‌بندی ما برای سطوح فشرده عبارت خواهد بود از: یک رویه با هندسه کروی (کره)، یک رویه با هندسه اقلیدسی (چنبره) و تعداد نامتناهی رویه با هندسه هذلولوی (تمامی چنبره‌هایی که بیش از یک حفره دارند).

در قرن گذشته این رده‌بندی، به‌طور باورنکردنی‌ای روشی ثمربخش برای بیان سؤالات توپولوژیکی درباره رویه‌ها، به سؤالاتی هندسی درباره رویه‌ها و برعکس به دست داد. طبقه‌بندی رویه‌ها یک مفهوم بنیادی برای بررسی اشکال دوبعدی بوده است، دستاوردی که نقطه شروعی برای تمام مطالعات بَعدی می‌باشد.

بُعد بَعدی

منیفلدهای سه‌بُعدی بسیار متنوع‌تر از منیفلدهای دوبعدی هستند، و طبیعتاً سؤالات درباره آن‌ها نیز به همان نسبت دشوارترند. حتی سؤالی به ظاهر ساده هم‌چون حدس پوانکاره، که می‌پرسد آیا کره سه‌بعدی، تنها شکل سه‌بعدی فشرده است که درآن هر طوقه می‌تواند به یک نقطه منقبض شود، بدون آن‌که در اطراف یک حفره گیر بیافتد، بعد از این‌که پوانکاره این سؤال را در ۱۹۰۴ مطرح کرد، نزدیک یک قرن بدون جواب می‌ماند.

با وجود این، ترستن به‌طور جسورانه‌ای حدس زد ارائه رده‌بندی اشکال سه‌بعدی، مشابه رده‌بندی‌ای که برای اشکال دوبعدی ارائه گردید، باید امکان‌پذیر باشد.

هندسه‌های دوبعدی اقلیدسی، کروی و هذلولوی هر کدام یک نسخه سه‌بعدی نیز دارند. اما در بعد سه، این‌ها تنها هندسه‌های

زیبای موجود در این بعد نیستند. به‌عنوان مثال هندسه‌های آمیخته‌ای وجود دارد که از یک سوی هذلولی یا کروی هستند و در سمت دیگر اقلیدسی. روی‌هم رفته هشت نوع هندسه‌ی متفاوت در بُعد سه وجود دارد که یکنواخت هستند، به این معنا که از هر نقطه‌ای در فضا که به آن‌ها بنگریم هندسه‌ی آن یکی است.

ترستن حدس زد که درست مانند رویه‌ها، منیفلدهای سه‌بعدی نیز می‌توانند به هندسهٔ طبیعی مجهز گردند. به‌خصوص وی مطرح کرد که اگر هر منیفلد سه‌بعدی فشرده را به روش خاصی برش بزنیم هر یک از تکه‌های آن را می‌توان به یکی از این هشت هندسه مجهز کرد. مینسکی می‌گوید «هدف، به‌طور کامل متحد کردن هندسه و توپولوژی در بعد سه بود».

یک رویکرد طبیعی برای اثبات این حدس، که به «حدس هندسی‌سازی» مشهور است این است که سعی کنیم همان کاری که با رویه‌ها انجام دادیم، یعنی رویه را در امتداد خم‌ها طوری برش بزنیم که تمام خواص توپولوژیکی آن باز شوند و رویه را به یک چندضلعی تخت تقلیل دهیم. برای یک منیفلد سه‌بعدی، رویکرد متناظر عبارت خواهد بود از برش دادن منیفلد در امتداد رویه‌ها تا جایی که شی ما به یک چندوجهی تقلیل پیدا کند به‌طوری که وجوه متضاد آن بتوانند به هم چسبانده شوند و شکل اصلی بازیابی شود. سپس اگر توانستیم چندوجهی را با هندسه درستی بسازیم، آن‌گاه می‌توانیم آن هندسه را به شکل اولیه منتقل نمائیم، درست مثل کاری که برای رویه‌ها انجام دادیم.

به یاد داشته باشید که برای این‌که این روش برای رویه‌ها کار کند، هر خمی که رویه را در امتداد آن برش می‌زدیم، می‌بایست در دو خاصیت صدق کند: خم به هیچ‌وجه نباید خودش را قطع کند (به زبان ریاضی، باید نشانیده شده باشد)، و هم‌چنین باید دارای این خاصیت که آن را «به‌طور توپولوژیکی جالب» می‌نامیم باشد، یعنی باید دور یک ویژگی توپولوژیکی رویه پیچ خورده باشد و نتواند به یک نقطه فرو کاهد (این خواسته تضمین می‌کند که بریدن در امتداد خم مورد نظر رویه را به‌طور توپولوژیکی ساده می‌کند).

در سال ۱۹۶۲ ریاضی‌دان سرشناس ولفگانگ هاکن (Wolfgang Haken) ثابت کرد که در واقع ساده کردن یک منیفلد سه‌بعدی به یک چندوجهی امکان‌پذیر است، مشروط بر این‌که منیفلد سه‌بعدی، شامل رویه‌ای باشد که بتوان آن را در امتداد رویه برید و در دو شرط زیر صدق کند: باید نشانیده باشد و باید «غیرقابل متراکم شدن» باشد، به این معنا که هر خم به‌طور توپولوژیکی جالب روی رویه، در منیفلد احاطه‌کننده آن نیز به‌طور توپولوژیکی جالب باشد.

بنابراین، برای مثال، یک چنبره در فضای سه‌بعدی معمولی تراکم‌ناپذیر نیست زیرا طوقه‌هایی که دور حفره چنبره می‌پیچند، از نظر چنبره به‌طور توپولوژیکی جالب هستند اما در یک فضای سه‌بعدی کامل می‌توان آن را به یک نقطه منقبض کرد. در مقابل، یک چنبره در درون یک منیفلد سه‌بعدی که با قدری ضخیم کردن رویه چنبره به دست می‌آید، به‌طوری که چنبره در آن دیگر بی‌نهایت کوچک نباشد تراکم‌ناپذیر می‌شود. برای تراکم‌ناپذیر بودن، هر ویژگی توپولوژیکی رویه، باید واقعاً بازتاب‌دهنده توپولوژی ذاتی منیفلد سه‌بعدی باشد. امروزه، یک منیفلد سه‌بعدی که یک رویه نشانیده تراکم‌ناپذیر داشته باشد منیفلد هاکن نامیده می‌شود.

اگر منیفلد سه‌بعدی ما یک رویه نشانیده شده تراکم‌ناپذیر داشته باشد، آن‌گاه برش در امتداد این رویه برخی ویژگی‌های توپولوژیک جالب منیفلد سه‌بعدی را برش خواهد داد و منیفلد ساده‌تری را جایگزین می‌سازد. علاوه بر این هاکن نشان داد تا زمانی که منیفلد شامل چنین رویه‌ای باشد، منیفلد حاصل از برش نیز، هاکن خواهد بود: دوباره شامل یک رویه نشانیده شده، تراکم‌ناپذیر خواهد بود تا بتوان منیفلد جدید را در امتداد آن برش داد. وی همچنین نشان داد که پس از طی تعداد متناهی مرحله تمام خصوصیات توپولوژیکی جالب منیفلد اصلی بریده شده و تنها یک چندوجهی باقی می‌ماند.

در اواخر دهه ۱۹۷۰ ترستن نشان داد که امکان مجهز کردن چندوجهی حاصل با یکی از هشت هندسه سه‌بعدی به‌طوری‌که این هندسه به‌طور هموار قابل انتقال به چندوجهی دوباره به هم چسبانده شده باشد و به‌طور کامل در نقاط گوشه‌ای و یال‌ها سازگار باشد، وجود درد. به بیان دیگر ترستن ثابت کرد که حدس هندسی‌سازی‌اش برای منیفلدهایی که تجزیه استاندارد آن‌ها همگی منیفلدهای هاکن هستند، درست است.

شوربختانه، برای یک منیفلد سه‌بعدی فشرده دلخواه، هیچ تضمینی نیست که چنین رویه‌ای را داشته باشد. در واقع، در اواخر دهه ۱۹۷۰ و اوایل ۱۹۸۰، ترستن جامعه ریاضی‌دانانی که روی منیفلدهای سه‌بعدی کار می‌کردند را مجاب کرده بود که منیفلدهایی که شامل یک رویه نشانیده شده، تراکم‌ناپذیر هستند (منیفلدهای هاکن) استثنا هستند و از این قاعده پیروی نمی‌کنند.

فهمیدن این‌که چگونه می‌توان حدس هندسی‌سازی برای منیفلدهای غیر هاکن را به اثبات رساند، ریاضی‌دانان را برای بیش از دو دهه به خود مشغول کرد. نهایتاً در سال ۲۰۰۲ پرلمان اثبات‌اش از این حدس را منتشر کرد، که در آن از ریاضیاتی خیلی دور از آن‌چه توسط اغلب پیروان ترستن مطالعه شده بود، بهره گرفته بود. (در ضمن، اثبات پرلمان حدس ۱۰۰ ساله پوانکاره را نیز ثابت کرد، مؤسسه کِلِی را متقاعد کرد تا جایزه یک میلیون دلاری که برای این اثبات در نظر گرفته بود به او پیشنهاد کند، که او بی‌درنگ، به دلایلی نسبتاً پیچیده آن را رد کرد).

اثبات دوران‌ساز پرلمان به رویای ترستن یعنی متحد کردن هندسه و توپولوژی حقیقت بخشید. اکنون هر سؤال توپولوژیک درباره منیفلدهای سه‌بعدی، معادلی هندسی دارد و بر عکس. اما قضیه

پرلمان بسیاری سؤالات مهم درباره این که چه منیفلدهای سه‌بعدی می‌توانند وجود داشته باشند را بی‌جواب باقی گذاشت.

ریاضی‌دانان در طبقه‌بندی منیفلدهای دوبعدی فشرده (رویه‌ها)، نه تنها نشان دادند که هر رویه را می‌شود به یک ساختار هندسی مجهز کرد، بلکه قادر بودند یک فهرست کامل از تمام منیفلدهای دوبعدی ممکن را نیز ارائه دهند. بعد سه فاقد چنین فهرستی است. هفت هندسه از هشت هندسه سه‌بعدی، همه به جز هندسه هذلولوی، به آسانی قابل درک هستند، و حتی قبل از کار پرلمان، توپولوژی‌دانان سه‌بعدی، فهرست کاملی از انواع منیفلدهایی که یکی از این هفت هندسه را می‌توان روی آن گذاشت، در اختیار داشتند. چنین اَشکالی نسبتاً ساده و کم هستند.

لیکن درست مثل رویه‌ها، در بعد سه نیز نشان داده می‌شود بیشتر منیفلدها در واقع هذلولوی هستند. ریاضی‌دانان در مقایسه با هفت هندسه دیگر، درک اندکی از حوزه وسیع حالت‌های ممکن منیفلدهای سه‌بعدی هذلولوی دارند.

نیکلاس برگرون (Nikolas Bergeron) از دانشگاه پیر و ماری‌کوری پاریس می‌گوید: «از این هشت نوع هندسه، منیفلدهای هذلولوی اسرارآمیزترین و غنی‌ترین آن‌ها هستند.»

نتیجه پرلمان این نکته را برای ریاضی‌دانان روشن ساخت که منیفلدهای هذلولوی آخر مرز هستند و آخرین منیفلدهایی که باید فهمیده شوند. اما به آنها نمی‌گوید این اشکال هذلولوی واقعاً شبیه چی هستند.

---

* دانشکده ریاضی دانشگاه یزد

** دانشگاه خواجه نصیر طوسی

★ ★ ★

پایگاه اینترنتی همایش‌های انجمن ریاضی ایران

به‌منظور یکپارچگی گردآوری تمام همایش‌ها در یک فضا و یکپارچگی همایش‌ها، کلیه همایش‌های انجمن در سامانه یکتاوب طراحی می‌گردد. تاکنون سامانه ۸امین سمینار هندسه و توپولوژی، دومین سمینار نظریه عملگرها و کاربردهای آن با استفاده از این نرم‌افزار مورد استفاده قرار گرفته است و سامانه ۴۷امین کنفرانس ریاضی ایران نیز در حال بهره‌برداری است. از مسئولین محترم همایش‌های پیش‌رو خواهشمند است جهت هماهنگی با دبیرخانه انجمن ریاضی ایران تماس حاصل نمایند.

اکرم صادقی

رئیس دبیرخانه انجمن ریاضی ایران

ریاضیات در هنر کاشی‌کاری

رضا سرهنگی [۳]

ترجمه: **محمدباقر کاظمی** *

این مقاله ترجمه مقاله‌ای از دکتر **رضا سرهنگی** استاد دانشگاه تاوسون (Towson) است که در خبرنامه روزانه کنگره بین‌المللی ریاضیات کره جنوبی SEOUL ICM 2014, 20 (August) به چاپ رسیده است

Reza Sarhangi, The Bridge Conference, Explore math, crave art in Bridge, The official newspaper of 27th international congress of Mathematicians, 2014 Seoul.

از ریاضیات متناوباً نه تنها برای تحلیل و تفسیر هنر و معماری بلکه به‌طور مستقیم برای ساخت آثار هنری بهره گرفته شده است. در دوره‌هایی از تمدن، ملت‌های مختلفی در جهان بوده‌اند که هنرمندانشان شیفته ریاضیات شده و در ضمن کار هنری تشویق و حتی مجبور شده‌اند که در عین حال یک ریاضی‌دان هم باشند همانند آنچه که در عصر طلایی بغداد (در عراق) و اصفهان (در ایران) و یا در دوره رنسانس (در اروپا) رخ داده است.

در اروپای دورهٔ رنسانس، هنر، ریاضیات، معماری، علم و موسیقی در کنار و پابه‌پای هم شکوفا شدند. هم اکنون دیگر چنین وضعیتی موجود نیست هر چند هنرمندان و دانشمندان به دنبال راهی برای رسیدن به آن درک و تبادل‌نظر متقابل گمشده هستند. بسیار دشوار می‌توان فهمید که چگونه می‌توان چنین محیط و شرایطی را فراهم ساخت تا این هدف به‌طور معنی‌داری رخ دهد.

هر چند اکنون یک شکاف و جدایی بین دانش ریاضیات و حوزه‌های عمومی فرهنگ وجود دارد اما همه انسان‌ها درک و ارزش‌گذاری خوب و ساده‌ای از شکل‌ها و الگوهای هنری و معماری دارند و به سادگی هم با موسیقی و هنرهای تجسمی و تئاتر رابطه برقرار می‌کنند اما در عین حال بسیاری از مردم یک ناسازگاری و گریز پنهانی از ریاضیات در درون خود حس می‌کنند و واقعاً آگاه نیستند که چگونه به این احساس رسیده‌اند. از طرفی بسیار و بسیار دیده‌ایم مردمی را که وقتی پیوندهای ریاضیاتی مرتبط با تجربه‌های عمومیشان به ایشان نشان داده می‌شود چه قدر مفتون و هیجان زده می‌شوند و حس کنجکاوی و زیبا دوستی آن‌ها دربارهٔ ریاضیات هم برانگیخته می‌شود.

---

[3] دکتر **رضا سرهنگی** بنیانگذار و رئیس مؤسسه Bridges است. این مؤسسه هر ساله کنفرانسی بین‌المللی بریجز را با شعار پیوندهای ریاضیات با هنر را در کشورهای مختلف برگزار می‌کند.