

دانش‌آموزی به ریاضی علاقه ندارد، به خاطر نداشتن معلم ریاضی خوب و برنامه درسی مناسب است. دانش‌آموز رشته ریاضی باید ۲۰ ساعت از مجموع ۳۵ ساعت در هفته را ریاضی بخواند. این در حالی است که برخی مباحث ریاضی از جمله هندسه فضایی و مثلثات، حذف شده و درس‌هایی جای آن‌ها را گرفته‌اند که برای تدریس آن‌ها یک الی دو جلسه در سال کفایت می‌کند.

دربارهٔ موارد ذکر شده نامه‌های مفصلی به شورای عالی انقلاب فرهنگی و سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی وزارت آموزش و پرورش نوشته شده است.

به امید روزی که این اشکالات مرتفع شوند. انشالله.

* رئیس شاخه ریاضی فرهنگستان علوم

تبدیل وضعیت پیمانی به رسمی، تعداد مقالات خواسته شده باید بسیار محدود باشد. فقط در مورد تبدیل وضعیت دانشجویی به استادی است که می‌توان شروط مقاله و کتاب را لحاظ کرد.

هدایت تحصیلی یا آزادی عمل در تحصیلات؟

فردی که دانش‌آموز را به اصطلاح هدایت تحصیلی می‌کند، باید اطلاعات کافی از تحصیلات عالی داشته باشد. دانش‌آموز باید با توجه به علاقه خودش انتخاب رشته کند. این که تعداد داوطلبان در شاخه ریاضی فیزیک در سطح کشور کم یا زیاد شده، مهم نیست و این خود به خود تعدیل خواهد شد. اگر کنکور درست اجرا شود و دانش‌آموز در یک نظام سالم و بر حسب علاقه انتخاب رشته کند، در این صورت پیشرفت دانش‌آموز بسیار چشمگیر خواهد بود. اگر

مقاله برنده سال ۱۳۹۸ جایزه ریاضی کرمانی

مجید گازر، نسرین صدری *

انشعاب است و مدیریت صحیح و مناسب آن‌ها برای دستیابی به نتیجه مطلوب ضروری است. در این نوشتار منظور از سیستم دینامیکی یک دستگاه پارامتریک از معادلات دیفرانسیل معمولی است و نقطه تعادل، جوابی از این دستگاه معادلات دیفرانسیل است که به عنوان تابعی از زمان، ثابت باشد. به عنوان مثال سیستم دینامیکی یک متغیره

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) = x^3 - \lambda x \quad (1.3)$$

را در نظر بگیرید. مبدأ همواره یک نقطه تعادل برای این سیستم است و به ازای مقادیر مثبت λ دارای دو نقطه تعادل $\pm\sqrt{\lambda}$ نیز است.

به منظور معرفی مفهوم انشعاب و قابلیت کنترل آن، می‌توان به آزمایش‌های تکرارناپذیر در آزمایشگاه اشاره کرد. یک پدیدهٔ آزمایشگاهی را تکرارناپذیر می‌نامیم هر گاه نتیجهٔ آزمایش، در هر بار تکرار آن متفاوت باشد. علت وقوع چنین پدیده‌ای، وجود اختلالات کوچکی است که از بروز آن‌ها نمی‌توان جلوگیری کرد. به عنوان مثالی دیگر از پدیدهٔ انشعاب می‌توان به عملکرد دستگاه دریل در زمان ایجاد سوراخ بر روی دیوار بتونی اشاره کرد. اگر موقعیت متنه دریل

مقاله مشترک دکتر مجید گازر و دکتر نسرین صدری تحت عنوان

“Normal form truncations of the generalized cusp cases of Bogdanov-Takens singularity”

به اتفاق آرای هیئت امنای جایزه دکتر عباس ریاضی کرمانی به عنوان مقاله برتر ارائه شده در ۴۹امین کنفرانس ریاضی ایران انتخاب گردید. این مقاله پس از ارائه در ۴۹امین کنفرانس ریاضی ایران، با جمع‌بندی نتایج به دست آمده به صورت یک مقاله کامل در مجله Siam Journal of Control and Optimization به چاپ رسیده است. به عنوان رویه‌ای که در خبرنامه از این بعد برای مقالات برگزیده در جایزه‌های انجمن پیش خواهیم گرفت، از دکتر گازر خواسته شد به زبانی ساده محتوای این مقاله را توصیف و تشریح کنند.

کنترل انشعابات

در اکثر مسائل مهندسی، تغییراتی کیفی در اطراف نقطه تعادل رخ می‌دهد. هر گونه تغییر کیفی در اطراف نقاط تعادل یک سیستم را انشعاب می‌نامند. بنابراین یک خاصیت ذاتی در این مسائل، وقوع

اولیه با خواص کیفی مشابه با سیستم اولیه است [۷].
به عنوان مثال فرم نرمال سیستم

$$\dot{x} = g(x, \lambda) = x \exp(\lambda) - \sin(x), \quad (۲.۳)$$

به صورت سیستم (۱.۳) می‌باشد. بدیهی است که بررسی و آنالیز سیستم فرم نرمال (۱.۳) از سیستم (۲.۳) ساده‌تر است. نظریه فرم نرمال برگرفته از رساله دکتری پوانکاره می‌باشد. علی‌رغم بیش از یک قرن تحقیقات فعال در این زمینه هنوز دسته‌بندی فرم‌های نرمال، فرم‌های نرمال مداری و فرم‌های نرمال پارامتریک در بسیاری از موارد به عنوان مسائل حل نشده باقی مانده‌اند.

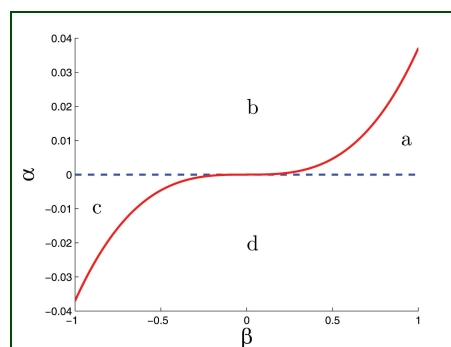
هرگونه اختلال کوچک، دینامیک یک سیستم منفرد را تغییر می‌دهد. به منظور رفع این مشکل به دنبال یک مدل ریاضی پارامتریک هستیم که رفتارهای کیفی آن به ازای پارامترهای مختلف، شامل تمامی رفتارهای کیفی ممکن برای سیستم اولیه و اختلال یافته‌های آن باشد. چنین سیستم پارامتریکی با حداقل تعداد پارامترهای ممکن شکافت جهانی^۴ نامیده می‌شود. به عنوان مثال سیستم (۱.۳) دارای یک شکافت جهانی به صورت

$$\dot{x} = G(x, \lambda, \alpha, \beta) = x^3 - \lambda x + \alpha + \beta x^2 \quad (۳.۳)$$

است. برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل منفرد دارای شکافت جهانی با تعداد نامتناهی پارامتر هستند. از طرفی در نظر گرفتن نامتناهی پارامتر در یک شکافت صرفاً از دیدگاه نظریه ریاضی، مورد توجه قرار می‌گیرد و استفاده از چنین مدل‌های ریاضی در عمل امکان پذیر نیست. از این رو مفهوم فوق را به شکافت جهانی مجانبی^۵ توسعه می‌دهیم. این مفهوم، برگرفته از مفهوم شکافت موربی مجانبی^۶ است که توسط مرداک و مالونزا از دانشگاه آیووا در سال ۲۰۰۹ میلادی معرفی شد [۱۳]. پارامترهایی که در شکافت جهانی مجانبی نقش اصلی در تعیین انشعابات را بازی می‌کنند پارامترهای مؤثر می‌نامیم.

به منظور آنالیز انشعابات ابتدا به دنبال آن دسته از پارامترهایی هستیم که تحت اختلال‌های کوچک از قبیل خطاهای مدل‌سازی و یا تغییر پارامترهای مسئله، رفتار کیفی سیستم را تغییر می‌دهند. این پارامترها، فضای پارامترهای غیرمقاوم انشعابی و فضای مکمل این فضا، پارامترهای مقاوم انشعابی نامیده می‌شوند. پارامترهای غیرمقاوم انشعابی، فضای پارامترهای مسئله را به تعداد متناهی ناحیه‌های همبند تجزیه می‌کنند به طوری که دینامیک متناظر با

نسبت به دیوار در حالت عمود نباشد و یا بر اثر لرزش دست وضعیت تنظیم شده تغییر کند، نتیجه مطلوب مشاهده نخواهد شد. این مشکل به راحتی با ایجاد یک حفره کوچک بر روی دیوار توسط چکش و میخ، قابل پیشگیری است. همچنین در سیستم دینامیکی (۱.۳) با تغییر هموار پارامتر λ از مثبت به منفی، تعداد نقاط تعادل از سه به یک تغییر می‌کند. واقعیتی را که از این چند مثال ساده می‌توان نتیجه گرفت، آن است که عوامل کوچک می‌توانند پدیده‌های منفرد را کنترل و در مسیر دلخواه و یا خلاف آن هدایت کنند. این واقعیت، لزوم میزان اهمیت و تأثیر کنترل تغییرات کیفی در پدیده‌های منفرد مسائل دنیای واقعی را بیان می‌کند.



شکل ۱. منحنی‌های غیر مقاوم انشعابی متناظر با سیستم (۱)

طبیعی‌ترین روش مدیریت تغییرات کیفی، آنالیز و کنترل انشعابات^۱ است و این روش جایگزین مناسبی برای روش‌های موجود در مهندسی کنترل می‌باشد. در بسیاری از روش‌های کنترل غیرخطی مانند خطی‌سازی با بازخورد^۲، طراح ابتدا دینامیک مسئله را به طور کامل حذف می‌کند و سپس با استفاده از کنترل‌کننده مناسب، دینامیک مطلوب را بر سیستم پیاده‌سازی می‌کند. با وجود آن که این روش کنترلی می‌تواند در بسیاری از موارد پاسخگو باشد اما به دلیل آن که از دینامیک خود مسئله استفاده نمی‌شود از چابکی بالایی برخوردار نیست. به همین دلیل طراح نه تنها از دینامیک سیستم در جهت مثبت استفاده نمی‌کند بلکه کنترل‌کننده، هزینه حذف دینامیک را نیز باید پردازد. در حالی که کنترل انشعابات ابتدا به تجزیه و تحلیل دینامیک‌های حاکم بر سیستم کنترل نشده می‌پردازد، کنترل‌کننده تنها به منظور انتخاب دینامیک مورد نظر از بین انتخاب‌های گوناگون اعمال می‌شود [۵،۴].

آنالیز انشعابات سیستم‌های غیرخطی دشوار است. از جمله ابزارهای مفید برای ساده‌سازی سیستم‌های غیرخطی، فرم نرمال^۳ است. به زبان ساده، ایده اصلی استفاده از تغییرات مختصات مجاز غیرخطی مناسب می‌باشد. فرم نرمال، سیستمی ساده‌تر از سیستم

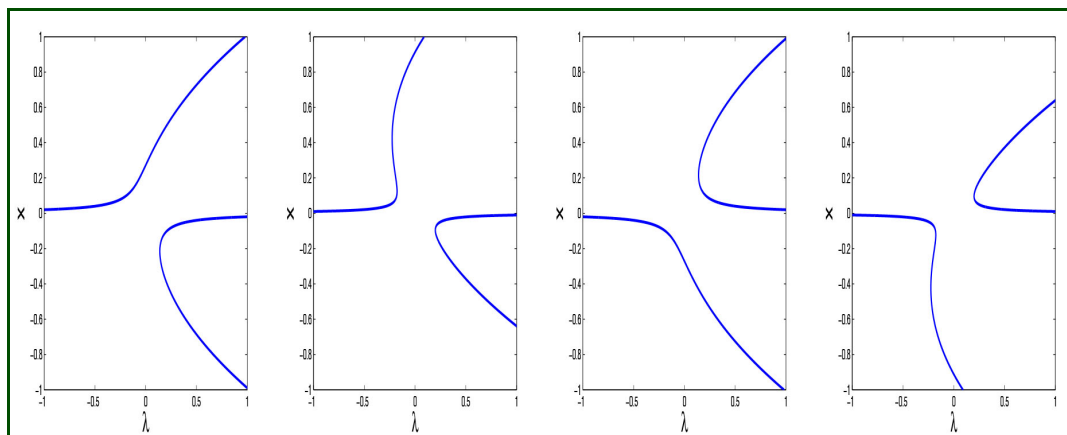
¹Bifurcation control ²Feedback linearization ³Normal form ⁴Universal unfolding ⁵Universal asymptotic unfolding ⁶Versal asymptotic unfolding

نرمال کوتاه شده^۷ انجام می‌دهند. به عنوان مثال به منظور بررسی انشعابات سیستم (۲.۳) و هر سیستم دیگر با فرم نرمال به صورت (۱.۳)، و همچنین شکافت‌های جهانی آن‌ها، بسط تیلور تا درجه ۳ کفایت می‌کند. بررسی معادل بودن رفتار کیفی سیستم اولیه و سیستم فرم نرمال کوتاه شده از جمله چالش‌های دشواری است که نادیده گرفتن آن در بسیاری از موارد، منجر به نتایج گمراه‌کننده شده است.

به منظور کنترل انشعابات سیستم‌های منفرد پس از محاسبه شکافت جهانی مجانبی و با معرفی یک الگوریتم محاسباتی، پارامترهای مؤثر در شکافت جهانی شناسایی می‌شوند و در گام دوم می‌بایست رابطه بین این دسته از پارامترها و پارامترهای سیستم اولیه مشخص گردد. در نهایت بر پایه فیزیک مسئله، به طراحی قانون کنترل بازخوردی مناسب می‌پردازیم [۵،۴].

پارامترهای هر ناحیه با یکدیگر معادل هستند. به عبارت دیگر فضای پارامترها به دسته‌های هم‌ارزی تقسیم می‌گردند و تنها مطالعه نماینده هر کلاس برای بررسی انشعابات کفایت خواهد کرد [۸،۵،۴]. به عنوان مثال برای شکافت جهانی (۳.۳) منحنی‌های غیر مقاوم انشعابی با ضابطه $\alpha = \frac{1}{37}\beta^3$ و $\alpha = 0$ که در شکل (۱) رسم شده‌اند، فضای پارامترهای مسئله را به چهار ناحیه همبند (a) ، (b) ، (c) و (d) تقسیم می‌کنند. وضعیت نقاط تعادل در هر ناحیه به طور کیفی در شکل (۲) رسم شده است.

فرم‌های نرمال غالباً بسط‌های نامتناهی دارند. اما بسط تیلور نامتناهی، هم برای بررسی‌های نظری آنالیز انشعابات و هم در مورد زمینه محاسبات رایانه‌ای فرم نرمال به عنوان یک محدودیت تلقی می‌شود. به همین دلیل معمولاً سیستم فرم نرمال را تا یک درجه مشخص کوتاه می‌کنند و تجزیه و تحلیل انشعابات را بر روی فرم



شکل ۲: دیاگرام کیفی نقاط تعادل متناظر با ناحیه‌های (a) - (d) برای سیستم (۳)

به طور خلاصه انجام تمام چالش‌های زیر به منظور هر گونه کنترل انشعابات و طراحی کنترل‌کننده‌ها لازم است:

مناسب در برخورد با تمام چالش‌های فوق برای دو خانواده از انشعابات ارائه شده است [۵،۴]، همچنین نتایج حاصل برای طراحی کنترل‌کننده مسیر کشتی استفاده شده است [۴].

مراجع

[1] G. Chen, D.J. Hill, X. Yu, *Bifurcation Control Theory and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin 2003.

۱. محاسبات فرم نرمال و یافتن رابطه بین پارامترهای سیستم اولیه و پارامترهای مؤثر.
۲. محاسبه شکافت مجانبی جهانی و معادل بودن رفتارهای کیفی سیستم اولیه و شکافت مجانبی جهانی.
۳. آنالیز انشعابات شکافت جهانی و نگاشت آن بر حسب پارامترهای مؤثر.

۴. محاسبات بر حسب ضرایب نمادین و ارائه الگوریتم‌های محاسباتی و پیاده‌سازی بر روی رایانه.

در پژوهش‌های انجام شده توسط نگارنده نتایج لازم و راهکارهای

⁷Truncated normal form

- parametric normal forms*, J. Differential Equations, **252** (2012) 1003–1031.
- [8] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1985.
- [9] B. Hamzi, W. Kang and A. J. Krener, *The Controlled Center Dynamics*, *SIAM J. Multi-scale Modeling and Simulation* **3** (2005) 838–852.
- [10] B. Hamzi, J.S.W. Lamb, D. Lewis, *A Characterization of Normal Forms for Control Systems*, J. Dynamics and Control Systems **21** (2015) 273–284.
- [11] A.J. Krener, W. Kang, D.E. Chang, *Control bifurcations*, *IEEE Transaction on Automatic Control* **49** (2004) 1231–1246.
- [12] J. Murdock, *Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems*, Springer, New York 2003.
- [13] J. Murdock, D. Malonza, *An improved theory of asymptotic unfoldings*, *J. Differential Equations* **247** (2009) 685–709.
- [2] L.O. Chua, H. Kokubu, *Normal Forms for Nonlinear Vector Fields, Part I: Theory and Algorithm*, *IEEE Transaction on Circuits and Systems* **35** (1988) 863–880.
- [3] M. Gazor, M. Kazemi, *Singularity: A Maple library for local zero bifurcation control of scalar smooth maps*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineering Computational and Nonlinear Dynamics, **15** (2019).
- [4] M. Gazor, N. Sadri, *Bogdanov–Takens singularity: Bifurcation controller designs for the generalized cusp plants and an application to ship control*, *SIAM J. Control and optimization*, **57** (2019) 2122–2151.
- [5] M. Gazor, N. Sadri, *Bifurcation control and universal unfolding for Hopf-zero singularities with leading solenoidal terms*, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **15** (2016) 870–903.
- [6] M. Gazor, N. Sadri, *Bogdanov–Takens singularity of Chua circuit system: \mathbb{Z}_2 symmetry breaking and bifurcation control*, 19 pages, preprint, (2020).

* دانشگاه صنعتی اصفهان

[7] M. Gazor, P. Yu, *Spectral sequences and*

