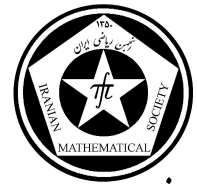


دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و سومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۸/۶/۱۳



انجمن ریاضی ایران

۷. یک فضای متریک مثال بزنید که حداکثر دارای تعداد شمارا زیرمجموعه فشرده بوده ولی تعداد ناشمارا زیرمجموعه بسته داشته باشد.
۸. فرض کنید S نیم‌گروهی با عضو همانی است. همچنین x عضوی از S می‌باشد که x^2 وارون‌پذیر است. ثابت کنید x نیز وارون‌پذیر است.
۹. ثابت کنید عدد $1 + 2^{1398}$ حداقل سه عامل اول متمایز دارد.
۱۰. فرض کنید F یک میدان با مشخصه صفر باشد و $A, B \in M_n(F)$. ثابت کنید اگر هر ترکیب خطی A و B پوچتوان باشد، آنگاه برای هر $k \geq 1$ ، $tr(A^k B) = 0$.
۱۱. فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی و $diam f(S_1) \leq 1$. ثابت کنید برای هر $r \in (0, 1)$ داریم $diam(f(S_r)) \leq r$ جایی که $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ و $diam(A)$ قطر مجموعه A است.
۱۲. دو خانواده مجزا و ناتهی F_1 و F_2 از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید به طوری که برای هر $i \in \{1, 2\}$ و هر $A, B \in F_i$ داریم $A \cap B \neq \emptyset$. نشان دهید که $1, 2, \dots, n$ را می‌توان با سه رنگ سفید، قرمز و آبی به گونه‌ای رنگ کرد که هر عضو از $F_1 \cup F_2$ با اندازه حداقل سه، حداقل دو رنگ دارد.

موفق باشید.