انجمن ریاضی ایران

آزمون نوبت اول
چهل و سومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۸/۶/۱۲

دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

---

۱. فرض کنید $a,b,c,d>0$ و $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مثبت x، دنباله $\left\{f^{2n}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.
(منظور از f^m، m بار ترکیب تابع f با خودش است.)

۲. فرض کنید دو تابع $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ هر دو پیوسته بوده و $f\circ g$ دوسویی باشد. ثابت کنید هر دو تابع f و g دوسویی هستند. (تابع دوسویی، تابعی است که یک به یک و پوشا باشد.)

۳. فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد به طوری که ۲ در آن مقسوم علیه صفر نیست و $x\in R$. اگر x با هر عنصر وارون‌پذیر در R جابجا شود، ثابت کنید x با هر عنصر خودتوان نیز جابجا می‌شود.

۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. برای هر $r>0$ و $x\in X$ تعریف کنید

$$B_r(x)=\left\{y\in X|d(x,y)<r\right\}$$

$$C_r(x)=\left\{y\in X|d(x,y)\leq r\right\}$$

ثابت کنید اگر X فشرده و x_0 نقطه‌ای از X باشد آنگاه به ازای حداکثر شمارا مقدار r داریم $\overline{B_r(x_0)}\neq C_r(x_0)$.

۵. فرض کنید X یک مجموعه و $T:X\to X$ یک تابع باشد به طوری که $A\backslash T(A)$ به ازای هر $A\subseteq X$ شمارا است. ثابت کنید $\{x\in X|T(x)\neq x\}$ شمارا است.

۶. فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که برای هر a و b در آن
$<a>\cap<bab^{-1}>=\{e\}$ یا $<a>\cap<bab^{-1}>=<a>$. همچنین فرض کنید x و y دو عنصر نابدیهی از G باشند که با هم جابجا می‌شوند و $(o(x),o(y))=1$. اگر $<x>$ در G نرمال باشد، ثابت کنید $<y>$ در G نرمال است.

موفق باشید.