دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

انجمن ریاضی ایران

۷) یک فضای متریک مثال بزنید که حداکثر دارای تعداد شمارا زیرمجموعهٔ فشرده بوده ولی تعداد ناشمارا زیرمجموعهٔ بسته داشته باشد.

پاسخ: $\mathbb{Z}$ را با متریک اقلیدسی درنظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های فشرده عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های متناهی. تعداد زیرمجموعه‌های متناهی نیز شمارا است. از طرفی همه زیرمجموعه‌ها بسته هستند و تعداد همه زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}$ ناشمارا است.

۸) فرض کنید S نیم‌گروهی با عضو همانی است. همچنین x عضوی از S می‌باشد که x^2 وارون‌پذیر است. ثابت کنید x نیز وارون‌پذیر است.

پاسخ: فرض کنیم e عضو همانی باشد. طبق فرض مسئله عضوی مانند y وجود دارد که $x^2y = e = yx^2$ یعنی $x(xy) = e = (yx)x$ پس x یک معکوس چپ و یک معکوس راست داشته و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

(اصولاً اگر $AB = e = B'A$ آنگاه $B = B'$ دلیل: داریم $B = eB = (B'A)B = B'(AB) = B'e = B'$)

۹) ثابت کنید عدد $۲^{۱۳۹۸} + ۱$ حداقل سه عامل اول متمایز دارد.

پاسخ: راه حل اول:

$$\begin{aligned} ۲^{۱۳۹۸} + ۱ &= ۲^{۱۳۹۸} + ۲^{۷۰۰} + ۱ - ۲^{۷۰۰} \\ &= (۲^{۶۹۹} + ۱)^۲ - ۲^{۷۰۰} = (۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱)(۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱) \end{aligned}$$

از طرفی $(۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱, ۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱) = ۱$. برای دیدن این نتیجه :

فرض کنید $r | ۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱, r | ۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱$.بنابراین $r | (۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱) - (۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱) = ۲^{۳۵۱}$ بنابراین r باید توانی از ۲ باشد و $r | ۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱$. لذا $r = ۱$. همچنین $۲^{۱۳۹۸} + ۱ \overset{۵}{\equiv} (۲^۲)^{۶۹۹} + ۱ \overset{۵}{\equiv} (-۱)^{۶۹۹} + ۱ \overset{۵}{\equiv} ۰$

بنابراین $۵ | ۲^{۱۳۹۸} + ۱$. اما

$۲^{۱۳۹۸} + ۱ \overset{۲۵}{\equiv} (۲^{۱۰})^{۱۳۹} \cdot ۲^۸ + ۱ \overset{۲۵}{\equiv} (-۱)^{۱۳۹} \cdot ۶ + ۱ \equiv -۵$

پس $۲۵ \nmid ۲^{۱۳۹۸} + ۱$.

حال می‌دانیم که $۵ | ۲^{۱۳۹۸} + ۱$، $۵^۲ \nmid ۲^{۱۳۹۸} + ۱$ ،

$۲^{۱۳۹۸} + ۱ = (۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱)(۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱), (۲^{۶۹۹} + ۲^{۳۵۰} + ۱, ۲^{۶۹۹} - ۲^{۳۵۰} + ۱) = ۱$

در نتیجه $۲^{۱۳۹۸} + ۱$ دارای حداقل سه عامل اول است.

راه حل دوم:

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} ۲^{۱۳۹۸} + ۱ &= (۲^۶)^{۲۳۳} + ۱ \\ &= (۲^۶ + ۱)((۲^۶)^{۲۳۲} - (۲^۶)^{۲۳۱} + \cdots - ۲^۶ + ۱) \end{aligned}$$

داریم $۲^۶ \overset{۶۵}{\equiv} -۱$ و $۲^۶ + ۱ = ۶۵ = ۵ \times ۱۳$ پس

$$\begin{aligned} (۲^۶)^{۲۳۲} - (۲^۶)^{۲۳۱} + \cdots - ۲^۶ + ۱ &\overset{۶۵}{\equiv} \underbrace{۱ + ۱ + \cdots + ۱}_{۲۳۳} \\ &= ۲۳۳ \overset{۶۵}{\equiv} ۳۸ \end{aligned}$$

یعنی جمله اخیر عامل ۵ و ۱۳ ندارد، پس لزوماً بر یک عدد اول دیگر بخش‌پذیر است.

۱۰) فرض کنید F یک میدان با مشخصه صفر باشد و $A, B \in M_n(F)$. ثابت کنید اگر هر ترکیب خطی A و B پوچتوان باشد، آنگاه برای هر $k \geq ۱$، $tr(A^k B) = ۰$.

پاسخ: قرار دهید $f(x) = \mathrm{tr}((A + xB)^{k+۱})$. با توجه به اینکه هر ترکیب خطی A و B پوچتوان است و اینکه اثر هر ماتریس پوچتوان نیز صفر است، نتیجه می‌شود که f به عنوان تابعی از x متحد با صفر است. همچنین واضح است که f یک چندجمله‌ای برحسب x می‌باشد. پس تمام ضرایب آن صفر می‌باشد (توجه کنید که میدان F لزوماً نامتناهی است).

ازآنچه گفته شد نتیجه می‌شود که ضریب x هم باید برابر با صفر باشد. اما ضریب x برابر است با

$$\mathrm{tr}(BA^k + ABA^{k-۱} + \cdots + A^k B)$$

که به وضوح برابر است با $(k + ۱)\mathrm{tr}(A^k B)$ (توجه کنید که همواره داریم $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$) بنابراین $(k + ۱)\mathrm{tr}(A^k B) = ۰$ و چون F میدانی با مشخصه صفر است داریم $\mathrm{tr}(A^k B) = ۰$.

۱۱) فرض کنید $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ تحلیلی و $\operatorname{diam} f(S_1)\leq 1$. ثابت کنید برای هر $r\in(0,1)$ داریم $\operatorname{diam}(f(S_r))\leq r$، جایی که $S_r=\{z\in\mathbb{C}\mid \ |z|=r\}$ و $\operatorname{diam}(A)$ قطر مجموعه A است.

پاسخ: فرض کنید $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$ دو زاویه دلخواه باشند. قرار دهید

$$g(z)=f(ze^{i\theta_1})-f(ze^{i\theta_2}).$$

روشن است که تابع $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ نیز تحلیلی و $g(0)=0$ پس تابع

$$h(z)=\begin{cases}\frac{g(z)}{z}, & z\neq 0\\ g'(0), & z=0\end{cases}$$

نیز روی $\mathbb{C}$ تحلیلی است. بنابه فرض برای هر $|z|=1$ داریم

$$|h(z)|=|g(z)|\leq 1$$

پس از اصل ماکزیمم نتیجه می‌شود که برای هر $r\in(0,1]$ و هر $|z|=r$ داریم $|h(z)|\leq 1$ ولی در این حالت $|h(z)|=\frac{|g(z)|}{r}$ یعنی برای هر $|z|=r$ داریم $|g(z)|\leq r$ و این دقیقاً حکم مسئله است.

۱۲) دو خانواده مجزا و ناتهی F_1 و F_2 از زیرمجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ را درنظر بگیرید به‌طوری‌که برای هر $i\in\{1,2\}$ و هر $A,B\in F_i$ داریم $A\cap B\neq\emptyset$. نشان دهید که ۱، ۲، ...، n را می‌توان با سه رنگ سفید، قرمز و آبی به گونه‌ای رنگ کرد که هر عضو از $F_1\cup F_2$ با اندازه حداقل سه، حداقل دو رنگ دارد.

پاسخ: C را خانواده همه مجموعه های مینیمال در $F_1\cup F_2$ در نظر بگیرید، قرار دهید $G_1=F_1\cap C$ و $G_2=F_2\cap C$

حالت اول: $G_1\neq\emptyset$ و $G_2=\emptyset$ (به طور مشابه برای حالت $G_1=\emptyset$ و $G_2\neq\emptyset$). $g\in G_1$ و $x\in g$ را دلخواه در نظر بگیرید. x را سفید، رنگ اعضای واقع در $g\setminus\{x\}$ را آبی و رنگ اعضای واقع در $\{1,2,\dots,n\}\setminus g$ را قرمز رنگ کنید.

حال عضو دلخواه $e\in F_1\cup F_2$ را که $|e|\geq 3$ در نظر بگیرید. اگر e شامل x باشد که حکم بدیهی است. اگر e شامل x نباشد آنگاه $e\nsubseteq g\setminus\{x\}$ زیرا g در $F_1\cup F_2$ مینیمال است. همچنین $e\nsubseteq\{1,\dots,n\}\setminus g$ زیرا اگر $e\subseteq\{1,\dots,n\}\setminus g$ آنگاه $e'\in G_1$ که $e'\subseteq e$ وجود دارد و لذا $e'\cap g=\emptyset$ ولی این تناقض است زیرا $e',g\in F_1$.

حالت دوم: $G_1\neq\emptyset$ و $G_2\neq\emptyset$

$g_1\in G_1$ و $g_2\in G_2$ را چنان در نظر بگیرید که $|g_1\cup g_2|$ کمترین ممکن باشد. $x\in g_1\setminus g_2$ و $y\in g_1\setminus g_2$ را نیز انتخاب کنید این کار امکان پذیر است زیرا g_1 و g_2 در $F_1\cup F_2$ مینیمال هستند و G_1 و G_2 نیز مجزا هستند.

x و y را سفید، اعضای $g_1\cup g_2\setminus\{x,y\}$ را آبی و اعضای $\{1,2,\dots,n\}\setminus(g_1\cup g_2)$ را قرمز رنگ آمیزی کنید.

برای عضو دلخواه $e\in F_1\cup F_2$ که $|e|\geq 3$، اگر e شامل x یا y باشد که حکم بدیهی است. همچنین با توجه به انتخاب g_2,g_1، $e\subseteq g_1\cup g_2\setminus\{x,y\}$ نیز ممکن نیست. فرض کنید $e\subseteq g_1\cup g_2\setminus\{x,y\}$ اگر $e\in F_1$ آنگاه $|e\cup g_2|<|g_1\cup g_2|$ و اگر $e\in F_2$ آنگاه $|e\cup g_1|<|g_1\cup g_2|$ که این با انتخاب g_1 و g_2 در تناقض است.

اگر $e\subseteq\{1,\dots,n\}\setminus(g_1\cup g_2)$ آنگاه $e\cap g_1=e\cap g_2=\emptyset$ لذا از آنجا که $g_i\in F_i$، $e\notin F_1$ و $e\notin F_2$ که این نیز متناقض است.