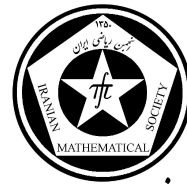


دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۷/۴/۲۰



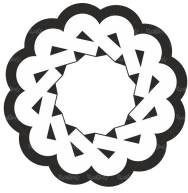
انجمن ریاضی ایران

۷) یک فضای متریک مثال بنزید که حداکثر دارای تعداد شمارا زیرمجموعه فشرده بوده ولی تعداد ناشمارا زیرمجموعه بسته داشته باشد.

پاسخ: \mathbb{Z} را با متریک اقلیدسی در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های فشرده عبارت‌اند از زیرمجموعه‌های متناهی. تعداد زیرمجموعه‌های متناهی نیز شمارا است. از طرفی همه زیرمجموعه‌ها بسته هستند و تعداد همه زیرمجموعه‌های \mathbb{Z} ناشمارا است.

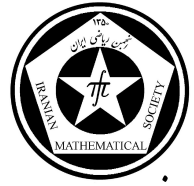
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۷/۴/۲۰



انجمن ریاضی ایران

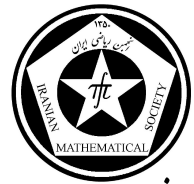
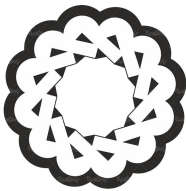
۸) فرض کنید S نیم گروهی با عضو همانی است. همچنین x عضوی از S می باشد که x^2 وارون پذیر است. ثابت کنید x نیز وارون پذیر است.

پاسخ: فرض کنیم e عضو همانی باشد. طبق فرض مسئله عضوی مانند y وجود دارد که $x^2 y = e = y x^2$ یعنی $x(xy) = e = (yx)x$ پس x یک معکوس چپ و یک معکوس راست داشته و در نتیجه معکوس پذیر است.

(اصولاً اگر $AB = e = B'A$ آنگاه $B = B'$ دلیل: داریم $B = eB = (B'A)B = B'(AB) = B'e = B'$)

کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



۹) ثابت کنید عدد $2^{1398} + 1$ حداقل سه عامل اول متمایز دارد.

پاسخ: راه حل اول:

$$\begin{aligned} 2^{1398} + 1 &= 2^{1398} + 2^{700} + 1 - 2^{700} \\ &= (2^{699} + 1)^2 - 2^{700} = (2^{699} + 2^{350} + 1)(2^{699} - 2^{350} + 1) \end{aligned}$$

از طرفی $1 = (2^{699} + 2^{350} + 1, 2^{699} - 2^{350} + 1)$ برای دیدن این نتیجه:

فرض کنید $1 + 2^{699} - 2^{350} + 1, r | 2^{699} + 2^{350} + 1, r | 2^{699} + 2^{350} + 1 - (2^{699} - 2^{350} + 1) = 2^{350}$ بنابراین r بنابر این

باید توانی از ۲ باشد و $1 + 2^{699} + 2^{350} + 1 \equiv 0 \pmod{r}$ لذا $r = 1$ ، همچنین $1 + 2^{699} + 1 \equiv (-1)^{699} + 1 \equiv 0 \pmod{r}$ و $2^{1398} + 1 \equiv (2^2)^{699} + 1 \equiv 0 \pmod{r}$

بنابراین $5 | 2^{1398} + 1$ اما

$$2^{1398} + 1 \equiv (-1)^{139} \cdot 6 + 1 \equiv 28 + 1 \equiv (2^{10})^{139} \cdot 28 + 1 \equiv 2^{1390} + 1 \pmod{25}$$

پس $25 \nmid 2^{1398} + 1$.

حال می‌دانیم که $5 | 2^{1398} + 1$ ، $5^2 \nmid 2^{1398} + 1$ ،

$$(2^{699} + 2^{350} + 1, 2^{699} - 2^{350} + 1) = 1, 2^{1398} + 1 = (2^{699} + 2^{350} + 1)(2^{699} - 2^{350} + 1)$$

در نتیجه $2^{1398} + 1$ دارای حداقل سه عامل اول است.

راه حل دوم:

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} 2^{1398} + 1 &= (2^6)^{233} + 1 \\ &= (2^6 + 1)((2^6)^{232} - (2^6)^{231} + \dots - 2^6 + 1) \end{aligned}$$

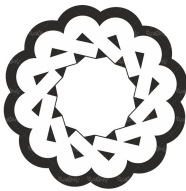
داریم $2^6 + 1 = 65 = 5 \times 13$ و $2^6 \equiv -1 \pmod{65}$ پس

$$\begin{aligned} (2^6)^{232} - (2^6)^{231} + \dots - 2^6 + 1 &\equiv \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{233} \pmod{65} \\ &= 233 \equiv 38 \pmod{65} \end{aligned}$$

یعنی جمله اخیر عامل ۵ و ۱۳ ندارد، پس لزوماً بر یک عدد اول دیگر بخش پذیر است.

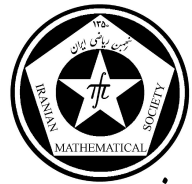
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۷/۴/۲۰



انجمن ریاضی ایران

(۱۰) فرض کنید F یک میدان با مشخصه صفر باشد و $A, B \in M_n(F)$. ثابت کنید اگر هر ترکیب خطی

$$\text{tr}(A^k B) = 0, k \geq 1$$

و B پوچتوان باشد، آنگاه برای هر x $f(x) = \text{tr}((A + xB)^{k+1})$ با توجه به اینکه هر ترکیب خطی A و B پوچتوان است و

اینکه اثر هر ماتریس پوچتوان نیز صفر است، نتیجه می‌شود که f به عنوان تابعی از x متحد با صفر است.

همچنین واضح است که f یک چندجمله‌ای بر حسب x می‌باشد. پس تمام ضرایب آن صفر می‌باشد (توجه

کنید که میدان F لزوماً نامتناهی است).

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود که ضریب x هم باید برابر با صفر باشد. اما ضریب x برابر است با

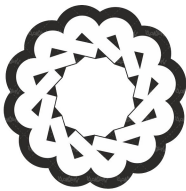
$$\text{tr}(BA^k + ABA^{k-1} + \dots + A^k B)$$

که به وضوح برابر است با $(k+1)\text{tr}(A^k B)$ (توجه کنید که همواره داریم $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$) بنابراین

$$(k+1)\text{tr}(A^k B) = 0 \text{ و چون } F \text{ میدانی با مشخصه صفر است داریم } \text{tr}(A^k B) = 0.$$

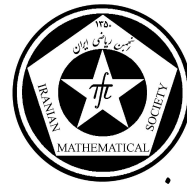
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۷/۴/۲۰



انجمن ریاضی ایران

(۱) فرض کنید $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی و $\text{diam} f(S_1) \leq 1$. ثابت کنید برای هر $r \in (0, 1)$ داریم $\text{diam}(f(S_r)) \leq r$. جایی که $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ و $\text{diam}(A)$ قطر مجموعه A است.
پاسخ: فرض کنید $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ دو زاویه دلخواه باشند. قرار دهید

$$g(z) = f(ze^{i\theta_1}) - f(ze^{i\theta_2}).$$

روشن است که تابع $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ نیز تحلیلی و $g(0) = 0$ پس تابع

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z}, & z \neq 0 \\ g'(0), & z = 0 \end{cases}$$

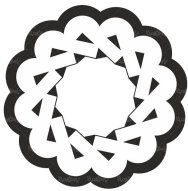
نیز روی \mathbb{C} تحلیلی است. بنابه فرض برای هر $|z| = 1$ داریم

$$|h(z)| = |g(z)| \leq 1$$

پس از اصل ماکزیمم نتیجه می‌شود که برای هر $r \in (0, 1]$ و هر $|z| = r$ داریم $|h(z)| \leq 1$ ولی در این حالت $|h(z)| = \frac{|g(z)|}{r}$ یعنی برای هر $|z| = r$ داریم $|g(z)| \leq r$ و این دقیقاً حکم مسئله است.

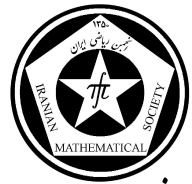
کانال تلگرام مسابقات دانشجویی @IMCUS

کانال انجمن ریاضی ایران @IranianMathematicalSociety



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت دوم
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۷/۴/۲۰



انجمن ریاضی ایران

۱۲) دو خانواده مجزا و ناتهی F_1 و F_2 از زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید به طوری که برای هر $i \in \{1, 2\}$ و هر $A, B \in F_i$ داریم $A \cap B \neq \emptyset$. نشان دهید که ۱، ۲، ...، n را می‌توان با سه رنگ سفید، قرمز و آبی به گونه‌ای رنگ کرد که هر عضو از $F_1 \cup F_2$ با اندازه حداقل سه، حداقل دو رنگ دارد.

پاسخ: C را خانواده همه مجموعه‌های مینیمال در $F_1 \cup F_2$ در نظر بگیرید، قرار دهید $G_1 = F_1 \cap C$ و

$$G_2 = F_2 \cap C$$

حالت اول: $G_1 \neq \emptyset$ و $G_2 = \emptyset$ (به طور مشابه برای حالت $G_1 = \emptyset$ و $G_2 \neq \emptyset$). $G_1 \neq \emptyset$ و $G_2 = \emptyset$ را دلخواه در نظر بگیرید. x را سفید، رنگ اعضای واقع در $g \setminus \{x\}$ را آبی و رنگ اعضای واقع در $\{1, 2, \dots, n\} \setminus g$ را قرمز رنگ کنید.

حال عضو دلخواه $e \in F_1 \cup F_2$ را که $|e| \geq 3$ در نظر بگیرید. اگر e شامل x باشد که حکم بدیهی است. اگر e شامل x نباشد آنگاه $e \subseteq g \setminus \{x\}$ زیرا $e \subseteq g$ در $F_1 \cup F_2$ مینیمال است. همچنین $e \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus g$ زیرا اگر $e \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus g$ آنگاه $e \in G_1$ که $e' \subseteq e$ وجود دارد و لذا $e' \cap g = \emptyset$ ولی این تناقض است زیرا $e', g \in F_1$.

حالت دوم: $G_1 \neq \emptyset$ و $G_2 \neq \emptyset$

$g_1 \in G_1$ و $g_2 \in G_2$ را چنان در نظر بگیرید که $|g_1 \cup g_2|$ کمترین ممکن باشد. $x \in g_1 \setminus g_2$ و $y \in g_1 \setminus g_2$ را نیز انتخاب کنید این کار امکان پذیر است زیرا g_1 و g_2 در $F_1 \cup F_2$ مینیمال هستند و G_1 و G_2 نیز مجزا هستند.

x و y را سفید، اعضای $g_1 \cup g_2 \setminus \{x, y\}$ را آبی و اعضای $\{1, 2, \dots, n\} \setminus (g_1 \cup g_2)$ را قرمز رنگ آمیزی کنید.

برای عضو دلخواه $e \in F_1 \cup F_2$ که $|e| \geq 3$ ، اگر e شامل x یا y باشد که حکم بدیهی است. همچنین با توجه به انتخاب g_1, g_2 ، $e \subseteq g_1 \cup g_2 \setminus \{x, y\}$ نیز ممکن نیست. فرض کنید $e \subseteq g_1 \cup g_2 \setminus \{x, y\}$ اگر $e \in F_1$ آنگاه

$$|e \cup g_2| < |g_1 \cup g_2| \text{ و اگر } e \in F_2 \text{ آنگاه } |e \cup g_1| < |g_1 \cup g_2| \text{ که این با انتخاب } g_1 \text{ و } g_2 \text{ در تناقض است.}$$

اگر $e \subseteq \{1, \dots, n\} \setminus (g_1 \cup g_2)$ آنگاه $e \cap g_1 = e \cap g_2 = \emptyset$ لذا از آنجا که $g_i \in F_i$ و $e \notin F_1$ و $e \notin F_2$ که این نیز

متناقض است.