انجمن ریاضی ایران

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹

دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

---

۱) فرض کنید $a, b, c, d > 0$ و $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مثبت x، دنباله $\left\{f^{2n}(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.
(منظور از f^m، m بار ترکیب تابع f با خودش است.)

پاسخ: تابع $g(x) = f^2(x)$ یک تابع صعودی، پیوسته و کران‌دار برای $x > 0$ است زیرا

$$g'(x) = f'(x)f'(f(x)) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \times \frac{ad-bc}{(cf(x)+d)^2} \geq 0.$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x) = f(\frac{a}{c})$$

عدد $x > 0$ را در نظر بگیرید. اگر $x \leq g(x)$، بنا بر صعودی بودن g، $g(x) \leq g^2(x) \leq g^3(x) \leq \dots$. پس دنباله‌ی $x, g(x), \dots$ صعودی و کراندار و در نتیجه همگرا است. در حالت $x > g(x)$ هم، $x > g(x) > g^2(x) > \cdots$ نزولی و کراندار و همگرا است.

۲) فرض کنید دو تابع $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هر دو پیوسته بوده و $f \circ g$ دوسویی باشد. ثابت کنید هر دو تابع f و g دوسویی هستند. (تابع دوسویی، تابعی است که یک به یک و پوشا باشد.)

پاسخ: چون $f \circ g$ دوسویی است پس الزاماً g یک‌به‌یک و f پوشا است. اگر g پوشا نباشد، برد آن یک بازه باز $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ است که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و حداقل یکی از a یا b عدد است. بدون کاستن از کلیت فرض کنید a باشد. چون g پیوسته و یک‌به‌یک است پس اکیداً یکنواست بنابراین مثلاً صعودی است پس

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = a$$

ولی f نیز پیوسته است پس $\lim_{x \to -\infty} f \circ g(x) = f(a)$.

از طرفی $f \circ g$ نیز دوسویی و پیوسته است پس اکیداً یکنواست. بنابراین $\lim_{x \to -\infty} f \circ g(x)$ برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. این تناقض نشان می‌دهد که g نیز پوشاست، پس g دوسویی و $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ نیز دوسویی است.

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹

دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

انجمن ریاضی ایران

۳) فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد به طوری که ۲ در آن مقسوم علیه صفر نیست و $x \in R$. اگر x با هر عنصر وارون‌پذیر در R جابجا شود، ثابت کنید x با هر عنصر خودتوان نیز جابجا می‌شود.

پاسخ: فرض کنید e یک عضو خودتوان R باشد. در این صورت $(2e-1)^2 = 4e^2 - 4e + 1 = 1$ پس $2e-1$، وارون‌پذیر است. پس $x(2e-1) = (2e-1)x$. در نتیجه $2(xe-ex) = 0$ و چون ۲ مقسوم‌علیه صفر نیست نتیجه می‌شود $xe = ex$.

۴) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. برای هر $r>0$ و $x\in X$ تعریف کنید

$$B_r(x)=\Big\{y\in X|d(x,y)<r\Big\},\ C_r(x)=\Big\{y\in X|d(x,y)\leq r\Big\}$$

ثابت کنید اگر X فشرده و x_0 نقطه‌ای از X باشد آنگاه به ازای حداکثر شمارا مقدار r داریم $\overline{B_r(x_0)}\neq C_r(x_0)$.

پاسخ:

لم: اگر $x\in C_r(x_0)\setminus \overline{B}_r(x_0)$ آنگاه وجود دارد $n\in\mathbb{N}$ که

$$d(x,x_0)=r,\ B_{\frac{1}{n}}(x)\cap\overline{B}_r(x_0)=\emptyset$$

اثبات لم: چون $x\in C_r(x_0)$ پس $d(x,x_0)\leq r$ و چون $x\notin B_r(x_0)$ پس $d(x,x_0)\not< r$ پس $d(x,x_0)=r$.

حال چون $x\notin\overline{B_r}(x_0)$ پس وجود دارد $\varepsilon>0$ که $B_\varepsilon(x)\cap\overline{B}_r(x_0)=\emptyset$ اکنون n را عددی بزرگتر از $\frac{1}{\varepsilon}$ بگیرید.

حال تعریف می‌کنیم

$$I=\Big\{r>0|\overline{B_r(x_0)}\neq C_r(x_0)\Big\}$$

از لم نتیجه می‌شود که $I=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ جایی که

$$I_n=\Big\{r>0:\ \exists x\in X, d(x,x_0)=r, B_{\frac{1}{n}}(x)\cap\overline{B}_r(x_0)=\emptyset\Big\}$$

حال کافی است ثابت کنیم برای هر n، I_n متناهی است. فرض کنیم این‌طور نباشد، پس وجود دارد دنبالهٔ $r_1,r_2,\dots$ در I_n که $r_i\neq r_j$. حال بنابر تعریف I_n، برای هر i، وجود دارد $x_i\in X$ که $d(x_i,x_0)=r_i$ و $B_{\frac{1}{n}}(x_i)\cap\overline{B_r}(x_0)=\emptyset$. بنابر فشردگی X، وجود دارد زیردنباله‌ای از دنباله x_i به طوری‌که به x^* میل می‌کند. پس وجود دارند j و kای که $d(x_j,x_k)<\frac{1}{n}$. بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $r_j<r_k$ از آنجا که $d(x_j,x_0)=r_j<r_k$ پس $x_j\in B_{r_k}(x_0)$. از طرفی چون $d(x_j,x_k)<\frac{1}{n}$ پس $x_j\in B_{\frac{1}{n}}(x_k)$ پس $B_{\frac{1}{n}}(x_k)\cap\overline{B_{r_k}}(x_0)\neq\emptyset$ که تناقض است.

۵) فرض کنید X یک مجموعه و $T : X \to X$ یک تابع باشد به طوری که $A \backslash T(A)$ به ازای هر $A \subseteq X$ شمارا است. ثابت کنید $\{x \in X \mid T(x) \neq x\}$ شمارا است.

پاسخ:

راه حل اول:

گراف جهت‌دار $\bar{G} = (X, E)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x, y) \in E \Longleftrightarrow x \neq y \ \ \& \ \ T(x) = y$$

واضح است که درجه خروجی هر راس حداکثر ۱ است. همچنین مجموعه یال‌های ورودی به هر رأس شمارا است زیرا برای هر رأس x مجموعه همه رأس‌هایی که از آنها به x یال جهت‌دار داریم همان $T^{-1}(x)$ است. اگر قرار دهیم $A = T^{-1}(x)$ آنگاه با توجه به فرض مسئله $A \backslash T(A) = A \backslash \{x\}$ شمارا است و لذا A شمارا است. توجه کنید که

$$Z = \{x \mid T(x) \neq x\} = \{x \mid deg^{+}(x) = 1\}$$

(درجه خروجی$= deg^{+}(x)$).

حال S را یک مجموعه مستقل ماکسیمال در $G[Z]$ (زیرگراف القایی روی Z) در نظر بگیرید. توجه کنید که $Z \subseteq N^{+}(S) \cup N^{-}(S) \cup S$ از طرفی $S \cap T(S) = \emptyset$ پس با توجه به فرض $S = S \backslash T(S)$ شمارا است. بنابراین با توجه به شمارا بودن درجه خروجی و ورودی هر رأس، $N^{+}(S)$ و $N^{-}(S)$ نیز شمارا هستند و لذا Z نیز شمارا است.

راه حل دوم:

قرار دهید $A = \{D \subseteq X \mid \forall p, q \in D \ \ T(p) \neq q\}$. در این صورت $(A, \subseteq)$ در شرایط لم زورن صدق می‌کند. پس عضو ماکسیمال مانند $D_{\circ}$ داریم

$$\{x \in X \mid T(x) \neq x\} \subseteq T(D_{\circ}) \cup T^{-1}(D_{\circ}) \cup D_{\circ}.$$

از طرفی چون D_0 شمارا است، $T^{-1}(D_0)$ و $T(D_0)$ نیز شمارا هستند بنابراین حکم اثبات شده است.

لم: اگر $x \in X$ آنگاه $T^{-1}(\{x\})$ شمارا است.

اثبات: $A := T^{-1}(\{x\})$ در اینصورت $T(A) \subseteq \{x\}$ پس $A \backslash T(A) \supseteq A \backslash \{x\}$ شماراست و A شماراست.

۶) فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که برای هر a و b در آن $<a> \cap <bab^{-1}> = \{e\}$ یا $<a> \cap <bab^{-1}> = <a>$. همچنین فرض کنید x و y دو عنصر نابدیهی از G باشند که با هم جابجا می‌شوند و $(o(x), o(y)) = 1$. اگر $<x>$ در G نرمال باشد، ثابت کنید $<y>$ در G نرمال است.

پاسخ: فرض کنید $\langle x\rangle \trianglelefteq G$. نشان می‌دهیم اگر K زیرگروه دوری شامل x باشد آنگاه $K \trianglelefteq G$. زیرا برای هر $g \in G$، $\langle x\rangle = \langle x\rangle \cap \langle gxg^{-1}\rangle \subseteq K \cap gKg^{-1}$ پس $K \cap gKg^{-1} \neq e$ در نتیجه طبق فرض $K \subseteq gKg^{-1}$، پس K نرمال است.

چون $xy = yx$ و $(o(x), o(y)) = 1$ نتیجه می‌شود $\langle x\rangle\langle y\rangle = \langle xy\rangle$. پس طبق آنچه که گفته شد $\langle xy\rangle$ در G نرمال است و چون $\langle y\rangle$ زیرگروه مشخصه $\langle xy\rangle$ است پس $\langle y\rangle \trianglelefteq G$.