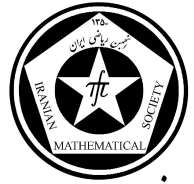


دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹



انجمن ریاضی ایران

۱) فرض کنید $a, b, c, d > 0$ و $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مثبت x ، دنباله $\{f^{2n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.
(منظور از f^m ، m بار ترکیب تابع f با خودش است.)

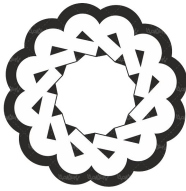
پاسخ: تابع $g(x) = f^2(x)$ یک تابع صعودی، پیوسته و کراندار برای $x > 0$ است زیرا

$$g'(x) = f'(x)f'(f(x)) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \times \frac{ad-bc}{(cf(x)+d)^2} \geq 0.$$

و

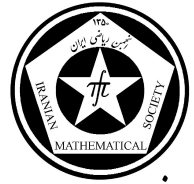
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = f\left(\frac{a}{c}\right)$$

عدد $x > 0$ را در نظر بگیرید. اگر $x \leq g(x)$ بنا بر صعودی بودن g ، $g(x) \leq g^2(x) \leq g^3(x) \leq \dots$ پس دنباله‌ی $x, g(x), \dots$ صعودی و کراندار و در نتیجه همگرا است. در حالت $x > g(x)$ هم، $x > g(x) > g^2(x) > \dots$ و کراندار و همگرا است.



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹



انجمن ریاضی ایران

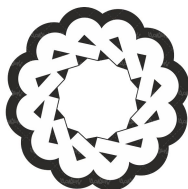
۲) فرض کنید دو تابع $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هر دو پیوسته بوده و $f \circ g$ دوسویی باشد. ثابت کنید هر دو تابع f و g دوسویی هستند. (تابع دوسویی، تابعی است که یک به یک و پوشا باشد.)

پاسخ: چون $f \circ g$ دوسویی است پس الزاماً g یک به یک و f پوشا است. اگر g پوشا نباشد، برد آن یک بازه باز $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ است که $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ و حداقل یکی از a یا b عدد است. بدون کاستن از کلیت فرض کنید a باشد. چون g پیوسته و یک به یک است پس اکیداً یکنواست بنابراین مثلاً صعودی است پس

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = a$$

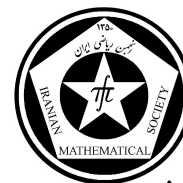
ولی f نیز پیوسته است پس $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x) = f(a)$

از طرفی $f \circ g$ نیز دوسویی و پیوسته است پس اکیداً یکنواست. بنابراین $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$ برابر $-\infty$ یا $+\infty$ است. این تناقض نشان می‌دهد که g نیز پوشاست، پس g دوسویی و $f = (f \circ g) \circ g^{-1}$ نیز دوسویی است.



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

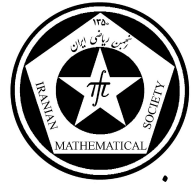
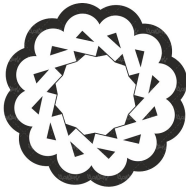
آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹



انجمن ریاضی ایران

(۳) فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد به طوری که 2 در آن مقسوم علیه صفر نیست و $x \in R$. اگر x با هر عنصر وارون پذیر در R جابجا شود، ثابت کنید x با هر عنصر خودتوان نیز جابجا می شود.

پاسخ: فرض کنید e یک عضو خودتوان R باشد. در این صورت $1 = 4e^2 - 4e + 1 = (2e - 1)^2$. پس $2e - 1$ وارون پذیر است. پس $x(2e - 1) = (2e - 1)x$. در نتیجه $2(xe - ex) = 0$ و چون 2 مقسوم علیه صفر نیست نتیجه می شود $xe = ex$.



۴) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. برای هر $r > 0$ و $x \in X$ تعریف کنید

$$B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}, \quad C_r(x) = \{y \in X | d(x, y) \leq r\}$$

ثابت کنید اگر X فشرده و x_0 نقطه‌ای از X باشد آنگاه به ازای حداکثر شمارا مقدار r داریم

$$\overline{B_r(x_0)} \neq C_r(x_0)$$

پاسخ:

لم: اگر $x \in C_r(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$ آنگاه وجود دارد $n \in \mathbb{N}$ که

$$d(x, x_0) = r, \quad B_{\frac{1}{n}}(x) \cap \overline{B_r(x_0)} = \emptyset$$

اثبات لم: چون $x \in C_r(x_0)$ پس $d(x, x_0) \leq r$ و چون $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ پس $d(x, x_0) < r$

$$d(x, x_0) = r$$

حال چون $x \notin \overline{B_r(x_0)}$ پس وجود دارد $\varepsilon > 0$ که $B_\varepsilon(x) \cap \overline{B_r(x_0)} = \emptyset$ اکنون n را عددی بزرگتر

از $\frac{1}{\varepsilon}$ بگیرید.

حال تعریف می‌کنیم

$$I = \{r > 0 | \overline{B_r(x_0)} \neq C_r(x_0)\}$$

از لم نتیجه می‌شود که $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ جایی که

$$I_n = \{r > 0 : \exists x \in X, d(x, x_0) = r, B_{\frac{1}{n}}(x) \cap \overline{B_r(x_0)} = \emptyset\}$$

حال کافی است ثابت کنیم برای هر n متناهی I_n است. فرض کنیم این‌طور نباشد، پس وجود

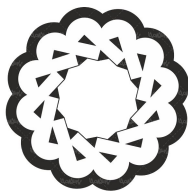
دارد دنباله r_1, r_2, \dots در I_n که $r_i \neq r_j$ حال بنابر تعریف I_n ، برای هر i وجود دارد $x_i \in X$ که

$d(x_i, x_0) = r_i$ و $B_{\frac{1}{n}}(x_i) \cap \overline{B_{r_i}(x_0)} = \emptyset$ بنابر فشردگی X ، وجود دارد زیردنباله‌ای از دنباله x_i به

طوری که به x^* میل می‌کند. پس وجود دارند j و k ای که $d(x_j, x_k) < \frac{1}{n}$ بدون کم شدن از کلیت

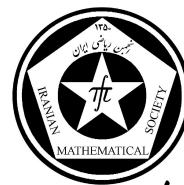
می‌توان فرض کرد که $r_j < r_k$ از آنجا که $d(x_j, x_0) = r_j < r_k$ پس $x_j \in B_{r_k}(x_0)$ از طرفی چون

$d(x_j, x_k) < \frac{1}{n}$ پس $x_j \in B_{\frac{1}{n}}(x_k)$ پس $B_{\frac{1}{n}}(x_k) \cap \overline{B_{r_k}(x_0)} \neq \emptyset$ که تناقض است.



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹



انجمن ریاضی ایران

۵) فرض کنید X یک مجموعه و $T : X \rightarrow X$ یک تابع باشد به طوری که $A \setminus T(A)$ به ازای هر $A \subseteq X$ شمارا است. ثابت کنید $\{x \in X \mid T(x) \neq x\}$ شمارا است.

پاسخ:

راه حل اول:

گراف جهت‌دار $\bar{G} = (X, E)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$(x, y) \in E \iff x \neq y \ \& \ T(x) = y$$

واضح است که درجه خروجی هر رأس حداکثر ۱ است. همچنین مجموعه یال‌های ورودی به هر رأس شمارا است زیرا برای هر رأس x مجموعه همه رأس‌هایی که از آنها به x یال جهت‌دار داریم همان $T^{-1}(x)$ است. اگر قرار دهیم $A = T^{-1}(x)$ آنگاه با توجه به فرض مسئله $A \setminus T(A) = A \setminus \{x\}$ شمارا است و لذا A شمارا است. توجه کنید که

$$Z = \{x \mid T(x) \neq x\} = \{x \mid \text{deg}^+(x) = 1\}$$

(درجه خروجی $\text{deg}^+(x)$).

حال S را یک مجموعه مستقل ماکسیمال در $G[Z]$ (زیرگراف القایی روی Z) در نظر بگیرید. توجه کنید که $S = S \setminus T(S)$ پس با توجه به فرض $S \cap T(S) = \emptyset$ از طرفی $Z \subseteq N^+(S) \cup N^-(S) \cup S$ شمارا است. بنابراین با توجه به شمارا بودن درجه خروجی و ورودی هر رأس، $N^-(S)$ و $N^+(S)$ نیز شمارا هستند و لذا Z نیز شمارا است.

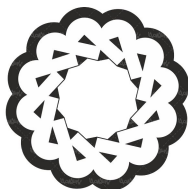
راه حل دوم:

قرار دهید $A = \{D \subseteq X \mid \forall p, q \in D \ T(p) \neq q\}$. در این صورت (A, \subseteq) در شرایط لم زورن صدق می‌کند. پس عضو ماکسیمال مانند D داریم

$$\{x \in X \mid T(x) \neq x\} \subseteq T(D) \cup T^{-1}(D) \cup D$$

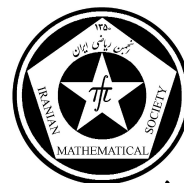
از طرفی چون D_0 شمارا است، $T^{-1}(D_0)$ و $T(D_0)$ نیز شمارا هستند بنابراین حکم اثبات شده است.
لم: اگر $x \in X$ آنگاه $T^{-1}(\{x\})$ شمارا است.

اثبات: $A := T^{-1}(\{x\})$ در اینصورت $T(A) \subseteq \{x\}$ پس $A \setminus T(A) \supseteq A \setminus \{x\}$ شماراست و A شماراست.



دانشگاه ولی عصر (عج)
رفسنجان

آزمون نوبت اول
چهل و دومین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۷/۴/۱۹



انجمن ریاضی ایران

۶) فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که برای هر a و b در آن
 $\langle a \rangle \cap \langle bab^{-1} \rangle = \langle a \rangle$ یا $\langle a \rangle \cap \langle bab^{-1} \rangle = \{e\}$. همچنین فرض کنید x و y
 دو عنصر نابدیهی از G باشند که با هم جابجا می‌شوند و $(o(x), o(y)) = 1$. اگر $\langle x \rangle$ در G نرمال
 باشد، ثابت کنید $\langle y \rangle$ در G نرمال است.

پاسخ: فرض کنید $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. نشان می‌دهیم اگر K زیرگروه دوری شامل x باشد آنگاه $K \trianglelefteq G$.
 زیرا برای هر $g \in G$ ، $\langle x \rangle = \langle x \rangle \cap \langle gxg^{-1} \rangle \subseteq K \cap gxg^{-1}$ پس $K \cap gxg^{-1} \neq e$ در نتیجه طبق
 فرض $K \subseteq gxg^{-1}$ پس K نرمال است.

چون $xy = yx$ و $(o(x), o(y)) = 1$ نتیجه می‌شود $\langle x \rangle \langle y \rangle = \langle xy \rangle$. پس طبق آنچه که گفته شد
 $\langle xy \rangle$ در G نرمال است و چون $\langle y \rangle$ زیرگروه مشخصه $\langle xy \rangle$ است پس $\langle y \rangle \trianglelefteq G$.