مانده‌ها دچار رقت احساسات می‌شوم، چیزی که وقتی اولین بار با آن برخورد می‌کنید غافلگیر می‌شوید، گر چه امروزه در شکل یک نظریهٔ عمومی نمایانگر شده است.

بزرگترین چیزهای شگفتی‌آور و آن‌ها که مرا بیشتر از همه تحت تأثیر قرار می‌دهند، پیوندهای غیرمنتظره بین بخش‌های به‌ظاهر کاملاً متفاوت در ریاضیات است. موارد کلاسیک از این‌ها مشتمل‌اند بر استفاده از آنالیز مختلط در نظریهٔ اعداد یا شیوه‌ای که مقاطع مخروطی یونانیان در نظریهٔ کپلر ـ نیوتن دربارهٔ مدارهای سیارات ظاهر شد. مثال‌های تازه‌تر می‌تواند عبارت باشد از پیوند بین امواج آب و نظریهٔ طیفی که در پس معادله (Korteweg-de Vries) KdV قرار دارد یا کار ووگان جونز(Vaughan Jone) و ویتن که ناورداهای چندجمله‌ای گره‌هارا با فیزیک آماری و نظریهٔ میدان کوانتومی مرتبط می‌کند.

این مثال آخری در واقع نک آیسبرگ است، تنها یک مورد از تعداد کثیری از پیوندهای زیبا و غیرمنتظره بین هندسه و فیزیک (شمارش خم‌های جبری، ناورداهای ۴ ـ خمینه‌ای دونالدسون، مانستگی فضاهای مدولی (moduli spaces)). من کل این حوزه را به لحاظ عظمتش کاملاً مبهوت‌کننده می‌یابم: راه‌های جدید متعددی را می‌گشاید، رمز و رازهای فراوانی دارد، و بخش‌های بزرگی از ریاضیات و فیزیک را اتحاد می‌بخشد. این حوزه به ریاضیات نیروی تازه می‌بخشد و موجب دلگرمی برای آینده است.

شاید لازم باشد این مطلب را با سخنی دربارهٔ ریاضیات کاربردی، به معنای موسع آن، به پایان ببرم. بخش اعظم ریاضیات یا در پاسخ به مسائل بیرونی بنیاد نهاده شده یا در پی شروع، کاربردهای نامنتظره‌ای در دنیای واقعی پیدا کرده است. این به هم پیوستگی کلی بین ریاضیات و علم جاذبهٔ مختص به خود را دارد، که در اینجا معیار مربوط باید هم جذابیت نظریهٔ ریاضی و هم اهمیت کاربردها را در بر بگیرد. آن گونه که از داستان جاری تعامل بین هندسه و فیزیک پیداست، بازخورد از علم به ریاضیات می‌تواند به‌غایت سودآور باشد، و این چیزی است که من آن را به طور مضاعف راضی‌کننده می‌یابم. ما ریاضی‌دانان نه تنها می‌توانیم به دردبخور باشیم، بلکه می‌توانیم در عین حال، تا حدی با الهام از دنیای برون، آثار هنری خلق کنیم.

★ ★ ★

دربارهٔ نویسنده:

سر مایکل آتیا استاد افتخاری دانشگاه ادینبورو است. او جوایز و لوح‌های افتخار متعددی، از جمله مدال فیلدز و جایزهٔ آبل را دریافت کرده است.

کارهای آرتور آویلا برنده جایزه فیلدز ۲۰۱۴

ولینگتون دوملو

برگردان: شیرین حجازیان *، فاطمه قانع *

نشانی مقاله:
Welington de Melo, The Work of the 2014 Fields Medalists, The Work of Artur Avila, Notices of the AMS, Vol. 62, No. 11 (2015) 1335-1337.

آرتور آویلا در سال ۲۰۱۴ به دلیل مطالعات عمیقی که در حوزه سیستم‌های دینامیکی و نظریه طیفی عملگرهای شرودینگریک ـ فرکانس انجام داده بود برنده مدال فیلدز شد. بسیاری از دستاوردهای درخشان وی در دینامیک‌های یک بُعدی، هم در حوزه حقیقی و هم مختلط، همچنین در دینامیک بیلیاردهای مسطح و نظریه طیفی عملگرهای شرودینگر با کاربردی هوشمندانه از ایده توانمند باز نرمال‌سازی، حاصل شده‌اند. وی همچنین پیشرفت‌های ژرفی در نظریه سیستم‌های دینامیکی نگهدار در ابعاد دلخواه و در ارگودیسیتی پایدار سیستم‌های هذلولوی جزئی داشته است.

آرتور آویلا در ریودوژانیرو برزیل متولد شد و تا پایان دوره دکتری خود در انستیتوی ریاضیات محض و کاربردی (IMPA) در سال ۲۰۰۱، در همان شهر اقامت داشت. وی پیش از شروع دوره پسادکتری در کالج دو فرانس پاریس، به همراه همکارانش توصیف کاملی از دینامیک متداول نگاشت‌های تک مدی بازه‌ای، یعنی نگاشت‌های بازه‌ای هموار با یک نقطه بحرانی نامسطح یکتا، ارائه داده بود. تا آن زمان می‌دانستند که فضای نگاشت‌های تک مدی شامل دو ناحیه جدا از هم است که دینامیک در آن‌ها کاملاً شناخته شده بود. برای نگاشت‌های واقع در ناحیه منظم، یک نقطه ثابت جاذب یکتا وجود دارد و مسیرهای متناظر با تقریباً هر شرط اولیه، با معیار اندازه لبگ، به‌طور مجانبی به این نقطه تناوبی جاذب همگرا هستند. بنابراین در اینجا رفتار دینامیکی متداول، تناوبی

---
* دانشگاه شهید بهشتی

خواهد بود. برای نگاشت‌های ناحیه تصادفی دینامیک آشوبناک است، البته با یک توصیف آماری خوب: یک اندازه ناوردای مطلقاً پیوسته وجود دارد که دینامیک یک مدار متداول را کنترل می‌کند؛ بدین معنا که که متوسط زمانی هر مشاهده‌پذیر فیزیکی برابر است با متوسط مکانی آن نسبت به این اندازه. به ویژه، فرکانس ملاقات هر مدار متداول با هر بازه برابر است با اندازه آن بازه. در متمم این دو ناحیه نگاشت‌هایی وجود دارند که دینامیک آن‌ها به طور کامل توصیف شدنی است ولی نگاشت‌هایی نیز هستند که دینامیک بسیار غیرعادی دارند. این رفتارهای دینامیکی متفاوت تا آن زمان در خانواده نگاشت‌های درجه دوم $x \in [۰, ۱] \to q_\mu = \mu x(۱ - x)$ که پارامتر μ به بازه $[۰, ۴]$ تعلق دارد، ظاهر شده بود. بنابر قضیهٔ دشواری که در [18] و [20] به اثبات رسیده است، مجموعه مقادیری از پارامتر μ که متناظر با نگاشت‌های منظم است، مجموعه‌ای باز و چگال می‌باشد. از طرف دیگر در [20] نشان داده شد که مجموعه مقادیری از پارامتر μ که متناظر با نگاشت‌های تصادفی است، مجموعه‌ای با اندازه لبگ مثبت است و بنابر نتایج [22] متمم این دو مجموعه دارای اندازه لبگ صفر ولی بُعد هاسدرف مثبت است. نتایج اصلی در [5] و [9] بیان می‌کند که برای خانواده های متداول یک بعدی از نگاشت‌های تک مُدی ناحیه سوم مشاهده نمی‌شود؛به این معنی که مجموعه مقادیری از پارامتر که متناظر با نگاشت‌های ناحیه سوم است دارای اندازه لبگ صفر می‌باشد. همچنین برای یک خانواده یک پارامتری متداول از نگاشت‌های تک مُدی، تجزیه‌ای از فضای پارامتر با خواصی همانند خانواده نگاشت‌های درجه دو مذکور داریم.

نتیجه مهم دیگری که در اوان حرفه‌ای وی به دست آمد و در [10] منتشر گردید، اثبات صلب بودن غیر منتظره فضای نگاشت‌های تک مُدی است. در این مقاله ثابت می‌شود که یک مجموعه بزرگ R از نگاشت‌های تک مُدی وجود دارد به طوری که هر خانواده متداول یک پارامتری آن را در مجموعه‌ای از مقادیر پارامتر با اندازه لبگ کامل در متمم مجموعه پارامترهای منظم، قطع می‌کند. به علاوه، هر دو نگاشت در R که مزدوج توپولوژیکی باشند، در واقع مزدوج هموار هستند. به ویژه، نویسندگان یک فرمول ترکیبیاتی برای محاسبه ضربگرهای تمام نقاط تناوبی نگاشت‌های واقع در R به دست آوردند.

اخیراً، آویلا و لیوبیچ در دینامیک‌های یک بعدی مختلط، چند خاصیت اساسی درباره هندسه مجموعه جولیای چند جمله‌ای‌های درجه دوم از نوع فایگنباوم را توصیف کردند، [6]، [7]، [2]، [3]، [4]. به ویژه وجود مثال‌هایی از چنین چندجمله‌ای هایی با مجموعه‌های جولیایی از اندازه لبگ مثبت، ثابت گردید.

در بیشتر این نتایج آویلا از نظریه باز نرمال‌سازی به عنوان یک ابزار اساسی استفاده می‌کند. این نظریه در دهه ۱۹۷۰ با نتایج تجربی دو فیزیکدان به نام‌های فایگنبام و کلت ـ ترسه در مورد گذار دینامیک در خانواده‌های نگاشت‌های تک مدی از حالت ساده به آشوبناک، آغاز شد. آن‌ها حدسی را صورت‌بندی کردند که در بردارنده یک عملگر غیرخطی روی فضای نگاشت‌های تک مدی است. اثبات این حدس و تعمیم‌هایی از آن، در آثار ریاضیدانانی مانند سالیوان، مک مولن و لیوبیچ مشاهده می‌شود. سرانجام آویلا و لیوبیچ در [16] اثباتی بسیار مفهومی و ساده‌تر از یک حدس کلی را ارائه دادند که برای فضای نگاشت‌های تک مُدی، با درجه بالاتری از بحرانی بودن، نیز برقرار است.

حوزه دیگری از سیستم‌های دینامیکی که آویلا دستاوردهای مهمی در آن دارد، دینامیک تبدیلات تبادل بازه‌ای، بیلیاردهای چندضلعی منظم و خواص ارگودیک جریان تیخمولر ژئودزیکی در فضای مدولی دیفرانسیل‌های آبلی روی یک رویه ریمان است. فرض کنید افراز $I_n \cdots I_۱$ از بازه $[۰, ۱]$ در $d \neq ۲$ کپی از این بازه داده شده باشد و σ جایگشتی از $\{۱, \cdots, d\}$ باشد. نگاشت $T : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$ را با ضابطه

$$T(x) = x - \sum_{J<i} \lambda_j + \sum_{\sigma j < \sigma i} \lambda_j$$

وقتی $x \in I_i$، تعریف می‌کنیم، که در اینجا λ_j طول بازه I_j است. این آن چیزی است که تبدیل تبادل بازه‌ای نامیده می‌شود و به‌طور کامل توسط جایگشت σ و بردار $(\lambda_۱, \cdots, \lambda_d)$ که به یک سادک در $\mathbb{R}^{d+}$ تعلق دارد، مشخص می‌شود. بنابراین فضای چنین نگاشت‌هایی دارای بعد متناهی است. یک زیرمجموعه را متداول گوییم هرگاه متمم آن دارای اندازه لبگ صفر باشد. ویچ ثابت کرد که برای هر جایگشت تحویل‌ناپذیر، تبدیل تبادل بازه‌ای متداول به طور یکتا ارگودیک است. در سال ۱۹۸۰ کاتوک نشان داد که هیچ تبدیل تبادل بازه‌ای، آمیخته نیست. یادآوری می‌کنیم که یک تبدیل حافظ اندازه $f : (X, \mu) \to (X, \mu)$، آمیخته است هر گاه به ازای هر دو مجموعه اندازه‌پذیر A و B داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} [\mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)] = ۰]$$

و این تبدیل آمیخته ضعیف است اگر

$$\lim_{N\to\infty} \frac{۱}{N} [\mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)] = ۰.$$

کار مشترک آویلا و فورنی در [11]، مسأله اصلی در نظریه ارگودیک تبدیلات تبادل بازه‌ای را حل کرد: یک تبدیل تبادل بازه‌ای متداول به ازای هر جایگشت تحویل‌ناپذیر که یک دوران نباشد، به طور ضعیف آمیخته است. این کار با نتیجه جدید دیگری از آویلا و دلکروا، که ثابت می‌کند تقریباً تمام بیلیاردهای چندضلعی منظم، به طور ضعیف آمیخته هستند، در ارتباط است. مجدداً یکی از ابزارهای اصلی در اثبات این نتایج، یک عملگر باز نرمال‌سازی می‌باشد که از در نظر گرفتن اولین نگاشت بازگشت به یک بازه کوچک‌تر و سپس تغییر مقیاس به اندازه اولیه، تشکیل می‌شود. این عملگر، عملگر باز نرمال‌سازی راوزی ـ ویچ نامیده می‌شود. ویچ و ماسور ثابت کردند که این عملگر دارای یک اندازه

ناوردای مطلقاً پیوسته است و خواص ارگودیک آن اطلاعات مهمی درباره خواص ارگودیک یک تبدیل تبادل بازه‌ای متداول به دست می‌دهد. اندازه ناوردای مذکور متناهی نیست ولی زوریخ در [25] یک صورت شتاب یافته از یک عملگر باز نرمال‌سازی تعریف کرد که دارای یک اندازه ناوردای مطلقاً پیوسته متناهی است و به عملگر راوزی ـ ویچ ـ زوریخ معروف است. این عملگر جدید هر تبدیل تبادل بازه‌ای را به تکراری از عملگر قبلی می‌نگارد که این تکرار به آن تبدیل تبادل بازه‌ای وابسته است. دینامیک این عملگر جدید کاملاً با جریان ژئودزیکی تیخمولرکه روی فضای مدولی دیفرانسیل‌های آبلی روی رویه‌های ریمان فشرده‌ای از یک گونای مفروض عمل می‌کند، مرتبط است. زوریخ به طور تجربی وجود d نماها را کشف کرد که برای یک تبدیل تبادل بازه‌ای متداول با d بازه، انحراف متوسط ارگودیکی را از میانگین توصیف می‌کند. وی متوجه شد که این نماها توسط طیف لیاپانوف همدور راوزی ـ ویچ ـ زوریخ روی عملگر بازنرمال‌سازی، داده می‌شوند.

آویلا و ویانا در [12] حدس کونتسویچ ـ زوریخ را، که بیان می‌کند طیف لیاپانوف همدور راوزی ـ ویچ ـ زوریخ ساده است، ثابت کردند. نتیجه مهم دیگری که توسط آویلا و همکارانش در این زمینه به دست آمد، اثبات نزول نماییِ همبستگی جریان تیخمولر روی لایه‌های فضای مدولی دیفرانسیل‌های آبلی، که توسط ویچ حدس زده شده بود، می‌باشد.

حوزه عملگرهای شرودینگر یک ـ فرکانس، قبل از ورود آویلا، بسیار فعال بود. به ویژه این مطلب را می‌دانستند که اگر یک پتانسیل تحلیلی را در یک ثابت جفت کردن که یک خانواده یک پارامتری از عملگرها را تولید می‌کند، ضرب کنند آنگاه برای مقادیر بسیار کوچک این ثابت، طیف این عملگر مطلقاً پیوسته است و برای مقادیر بسیار بزرگ، طیف برای مقادیر متداول فرکانس، نقطه‌ای خالص می‌باشد. در عین حال، برای مقادیر بینابینی ثابت جفت کردن اطلاعات چندانی وجود نداشت. البته این را می‌دانستند که به هر عملگر، خانواده‌ای یک پارامتری از همدورهای $SL(۲,\mathbb{R})$ که توسط انرژی پارامترسازی شده است، نظیر می‌شود و همچنین می‌دانستند که طیف هر عملگر بر مجموعه انشعاب شی دینامیکی منطبق است. این‌ها در واقع مقادیری از پارامتر هستند که همدور به ازای آن‌ها به طور یکنواخت هذلولوی نیست. آویلا، احتمالاً با الهام گرفتن از نتایج دینامیک‌های یک بعدی، سه ناحیه را در این فضای همدورها توصیف کرد: ناحیه هذلولوی یکنواخت یا UR، ناحیه ابربحرانی یا SpC و ناحیه زیر بحرانی یا SbC وی متمم این سه مجموعه را ناحیه بحرانی یا C نامید. همدورهای واقع در SpC به طور یکنواخت هذلولوی نیستند ولی نمای لیاپانف مثبت دارند و قبلاً به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته و فهمیده شده بودند. قسمتی از طیف عملگر که در این ناحیه قرار می‌گیرد به طور متداول با طیف نقطه‌ای خالص متناظر است. آویلا ثابت کرد قسمتی از طیف که در SbC قرار می گیرد متناظر است با قسمت مطلقاً پیوستهٔ اندازه طیفی. سرانجام او وجود یک نگاشت لایه‌بندی از این فضا به زیرمنیفلدهای با متمم بعد مثبت را به اثبات رسانید و نشان داد که مجموعه همدورهای بحرانی، از دیدگاه نظریه اندازه، زیر مجموعه کوچکی از این زیر منیفلدهاست [23]. به عنوان یک نتیجه، وی ثابت کرد که یک خانواده یک پارامتری متداول از همدورها، شامل همدورهای بحرانی نیست. نتیجه‌ای دیگراز ساختار آویلا بیان می‌کند که طیف یک عملگر متناظر به یک پتانسیل متداول، از دید نظریه اندازه (فراوانی)، به تعداد متناهی مجموعه‌های باز جدا از هم تجزیه می‌شود و اندازه طیفی روی هر یک از این مجموعه‌های باز، مطلقاً پیوسته و یا نقطه‌ای خالص است اگر و فقط اگر نمای لیاپانف در این ناحیه صفر و یا مثبت باشد. این نتیجه تأییدی بر این شهود فیزیکی است که به طور متداول یا در وضعیت رسانا (طیف مطلقاً پیوسته) هستیم و یا در وضعیت نارسانا (طیف نقطه‌ای خالص).

یک خانواده از عملگرهای شرودینگر که به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته است، خانواده عملگرهای تقریباً ماتیو است که به یک پدیده معروف فیزیکی به نام اثر کوانتمی هال وابسته است. این خانواده از دیدگاه فوق متداول نیست زیرا یک همدور بحرانی با ثابت جفت کردن برابر یک دارد که توسط یک تقارن به نام دوگانی آوبری به آن تحمیل می‌شود. پیش از ورود آویلا به این عرصه حقایق بسیاری در مورد این خانواده به دست آمده بود. مثلاً این که تقریباً برای تمام فرکانس‌ها و فازها، طیف در ناحیه زیربحرانی (ثابت جفت کردن کمتر از یک) مطلقاً پیوسته و در ناحیه ابر بحرانی نقطه‌ای خالص می‌باشد. همچنین می‌دانستند که طیف در هر دوی این نواحی اندازه لبگ مثبت دارد. ولی هنوز سؤالات باز بسیاری مطرح بود. آویلا تمام سؤالات در مورد اندازه طیفی سیستم تقریباً ماتیو را پاسخ داد: طیف برای تمام فرکانس‌های گنگ، به ازای مقادیر بحرانی ثابت جفت کردن، یک مجموعه کانتور است [14] که دارای اندازه لبگ صفر می‌باشد [24]؛ و برای هر فرکانس گنگ و تقریباً هر فاز، طیف تکین پیوسته است. به طور خلاصه با توجه به کارهای آویلا می‌توان گفت که اندازه طیفی دقیقاً در حالت زیربحرانی، مطلقاً پیوسته و دقیقاً در حالت ابربحرانی نقطه‌ای خالص است.

در حوزه دیگری از سیستم‌های دینامیکی، آویلا ثابت کرد که یک $C^۱-$ ـ دیفیومورفیسم حافظ حجم روی یک منیفلد فشرده را می‌توان در $C^۱-$ ـ توپولوژی با یک $C^\infty-$ ـ دیفیمورفیسم حافظ حجم تقریب زد [1]. این سؤال بیش از سی سال باز بود و اثبات آویلا بر مبنای حل یک معادله با مشتقات جزئی با درجه پایینی از نظم پذیری، انجام پذیرفت. این نتیجه با توصیف خواص ژنریک سیستم‌های دینامیکی پایسته بسیار مرتبط است زیرا ابزار اساسی دیگری به نام لم «نزدیک بودن» فقط در $C^۱-$ ـ توپولوژی شناخته شده است و برای تخمین‌های خوب انحراف، درجه بالاتری از نظم پذیری مورد نیاز است.

مراجع:

1 A. Avila, On the regularization of conservative maps, *Acta Math.* 205 (2010), 5-18.

2 A. Avila and M. Lyubich, Examples of FeigenbaumJulia sets with small Hausdorff dimension, in *Dynamicson the Riemann Sphere* (eds. P. Hjorth and C. Peterson),European Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 71-87.

3 A. Avila, M. Lyubich, Hausdorff dimension and conformal measuresof Feigenbaum Julia sets, J. *Amer. Math. Soc.* 21 (2008),305-383.

4 A. Avila, M. Lyubich, Feigenbaum Julia sets of positive area, manuscript, 2011.

5 A. Avila, M. Lyubich and W. de Melo, Regular or stochasticdynamics in real analytic families of unimodal maps, *Invent. Math.* 154 (2003), 451-550.

6 A. Avila, J. Kahn, M. Lyubich, and W. Shen, Combinatorialrigidity for unicritical polynomials,*Annals of Math.* (2) 170 (2009), 783-797.

7 A. Avila, M. Lyubich, and W. Shen, Parapuzzle of theMultibrot set and typical dynamics of unimodal maps, *J.European Math. Soc.* 13 (2011), 27-56.

8 A. Avila and C. G. Moreira, Statistical properties ofunimodal maps: The quadratic family, *Annals of Math.* (2)161 (2005), 831-881.

9 A. Avila,& C.G. Moreira, Statistical properties of unimodal maps: Smoothfamilies with negative Schwarzian derivative, GeometricMethods in Dynamics, I,*Astèrisque* 286 (2003), 81-118.

10 A. Avila,& C.G. Moreira, Statistical properties of unimodal maps: Physicalmeasgures, periodic orbits and pathological laminations, Publl. *Math. IHÉS* 101 (2005), 1-67.

11 A. Avila and G. Forni, Weak mixing for interval exchangetransformations and translation flows, *Annals of Math.* 165 (2007), 637-664.

12 A. Avila and M. Viana, Simplicity of Lyapunov spectra:Proof of the Zorich-Kontsevich conjecture, *Acta Math.* 198 (2007), 1-56.

13 A. Avila and C. G. Moreira, Hausdorff dimension and the quadratic family, manuscript, 2002.

14 A. Avila and Svetlana Jitomirskaya, The Ten Martini Problem, *Annals of Math.* 170 (2009), 303-342.

15 A. Avila, On the regularization of conservative maps, Acta Math. 205 (2010), 5-18.

16 A. Avila and M. Lyubich, The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: Exponential contraction along hybrid classes, *Publ. Math.* IHÉS114 (2011), 171-223.

17 A. Avila and S. Gouézel, Small eigenvalues of the Laplacian for algebraic measures in moduli space, and mixing properties of the Teichmüller flow, *Annals of Math.* 178 (2013), 385-442.

18 J. Graczyk and G. Swiatek, Generic hyperbolicity in the logistic family, *Annals of Math.* (2) 146 (1997), 1-52.

19 M. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps, Comm. *Math. Phys.* 81 (1981), 39-88.

20 M. Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials I, II, *Acta Math.* 178 (1997), 185-247, 247-297.

21 M. Lyubich, Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture, *Annals of Math.* (2) 149 (1999), 319-420.

22 , Almost every real quadratic map is either regular or stochastic, *Annals of Math.* (2) 156 (2002), 1-78.

23 A. Avila, Global theory of one-frequency Schrödinger operators I, II, preprint, 2009.

24 A. Avila and R. Krikorian, Reducibility or uniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles, *Ann.of Math.* (2) 164 (2006), 311-940.

25 A. Zorich, Finite Gauss measure on the space of interval exchange transformations. Lyanpunov exponents, *Ann.Inst.* Fourier (Grenoble) 46 (1996), 325-370

* دانشگاه فردوسی مشهد