ریاضیات ماشینی، ریاضیات انسانی

گزارش یک سخنرانی[۳]

منوچهر ذاکر*

مقدمه

وقتی که برای سخنرانی در سمینار پنجاهمین سالگرد حدس بهزاد دعوت شدم تصمیم گرفتم موضوعی بر خلاف موضوعات متعارف سخنرانی‌های ریاضی که معمولاً بر محور یک بحث تخصصی متمرکزند، انتخاب کنم. موضوعی که در عین حال متناسب با عنوان اصلی سمینار هم باشد. بنابراین فکر کردم که موضوع «حدس بهزاد» و به طور کلی‌تر «حدس‌های یک ریاضیدان» فرصت مناسبی برای بحث دربارهٔ «حدس‌های کامپیوتری» و آنچه که می‌توان آن را تقابل «ریاضیات انسانی و ریاضیات کامپیوتری یا ماشینی» نامید، است. این که این دو نوع ریاضیات چیستند و چه تفاوتی با هم دارند در این نوشته توضیح خواهم داد. بنابراین قصد دارم علاوه بر معرفی «ماشین تولید حدس» در نظریه گراف موسوم به «گرافیتی» و بررسی حدس‌هایی که این ماشین ارائه داده است، در خصوص ماهیت «حدس‌های کامپیوتری» و تفاوت آن‌ها با «حدس‌های ساخته و پرداخته ریاضی‌دانان» و به طور کلی‌تر دربارهٔ «ریاضیات ماشینی» صحبت کنم. همچنین به این پرسش می‌پردازم که «آیا ریاضیات ماشینی قادر به تولید ریاضیاتی با کیفیت ریاضیات انسانی است یا خیر؟» جهت جذابیت و گیرایی بحث، دکتر بهزاد را به عنوان نماینده‌ای از «اردوگاه ریاضیدانان» و نرم‌افزار «گرافیتی» را به عنوان نماینده‌ای از «اردوگاه ریاضیات کامپیوتری» روبرو و در تقابل با همدیگر قرار می‌دهیم و این بحث را دنبال می‌کنیم. در این نوشته مطالب اصلی این سخنرانی به همراه توضیحات تکمیلی شرح داده می‌شود.

مدخل

به زبان نیمه فنی حدس بهزاد حاکی از این است که رأس‌ها و یال‌های هر گراف (ترکیبیاتی) را می‌توان به تعداد بیشترین درجه گراف به‌علاوه دو رنگ، رنگ آمیزی کرد به قسمی که هر دو جزء رأس و یال در گراف که با هم متصل، مجاور و یا برهم واقع هستند دارای رنگ‌های متفاوت باشند. حدس بهزاد موسوم به حدس رنگ آمیزی کلی گراف‌ها که در سال ۱۹۶۵ میلادی مطرح شد تاکنون حل نشده و در گسترش مبحث گراف‌های کلی (total graphs) نقش بسزایی داشته است.

باید گفت که تاکنون حدس‌های بسیاری در ریاضیات و شاخه‌های مختلف آن پدید آمده‌اند و میزان اهمیت، زیبایی و گستردگی آن‌ها با همدیگر متفاوت است. برخی به زودی و در مدت زمان اندکی حل شده‌اند و برخی سالیان سال لاینحل مانده‌اند. برخی آن چنان گسترده و کاربردپذیر هستند که تلاش برای حلشان منجر به پدید آمدن مباحث نوینی در ریاضیات شده است. همه این پرسش‌ها و حدس‌ها را «ریاضی‌دانان» بوجود آورده‌اند و طبیعتاً فرض بر این است که این گونه فعالیت‌ها و توانمندی‌های ریاضی از عهده ریاضی‌دانان برمی‌آید و ماهیت انسانی دارند.

هم‌اکنون چندین سال است سروکله برنامه‌ها و ماشین‌های کامپیوتری پیدا شده است که درست مشابه ریاضی‌دانان، حدس‌های ریاضی تولید می‌کنند. جالب اینجاست که برخی از این «حدس‌های ماشینی» مورد توجه ریاضی‌دانان و حتی ریاضی‌دانان طراز اول قرار گرفته و مقالات بسیاری نگاشته و منتشر شده‌اند که به حل و تحلیل این گونه حدس‌های کامپیوتری اختصاص دارند. البته موضوع به حدس‌های ماشینی ختم نمی‌شود و در سال‌های اخیر مفهومی به نام «ریاضیات ماشینی یا اتوماتیک» هم مطرح است. از جمله‌ی برنامه‌ها و ماشین‌های کامپیوتری که روی مباحث نظریه گراف کار می‌کنند می‌توان به گرافیتی (Graffiti) اشاره کرد که دارای حداقل دو نسخه متفاوت است و هر کدام از آن‌ها هم اینک در یک گوشه دنیا مشغول اجرای برنامه‌هایی برای تولید حدس‌های نظریه گراف هستند.

ریاضیات انسانی

خالی از لطف نیست که اشاره کنیم استفاده از لفظ ریاضیات انسانی متضمن برخی نتایج است. نخست توضیح می‌دهیم به دو دلیل این نوع ریاضیات، انسانی نامیده می‌شود. اول این که، حاصل پردازش‌ها و تراوشات ذهن و مغز انسان‌هاست. دوم این که، ویژگی‌های شناختی انسان‌ها، سلایق و خصائص انسانی در شکل گیری، جهت دهی و ارزش‌گذاری این نوع از ریاضیات (یعنی همهٔ ریاضیات کنونی) بسیار تأثیرگذار هستند.

اگرچه حوزه کاربرد و بازخورد از کاربرد در جهت‌گیری و شکل‌دهی ریاضیات بسیار مؤثر هستند ولی این قضاوت و سلیقه انسان‌هاست که قسمت‌هایی از ریاضیات را زیبا و مهم تلقی می‌کند. به نظر من، صحبت از ریاضیات انسانی در تقابل با فلسفه و باوری است که هستی شناسی ریاضیات و منشاء دستیابی به معارف ریاضی را در متافیزیک و یا ذهن پیشینی و استعلایی بشر جستجو می‌کند. منظور این نیست که ریاضیات انسانی فلسفه‌هایی از قبیل افلاطون‌گرایی و استعلایی کانتی را ابطال می‌کنند، بلکه منظور این است که پارادایم تفکر در خصوص پرسش‌های فلسفی و بنیادی در باب ریاضیات را عوض می‌کنند. مبنای این پارادایم جدید، به زبان ساده، شرایط زیستی، تجربی و شناختی انسان است. می‌توان اذعان کرد که باورهای افلاطونی در باب ریاضیات به مفهوم پوپری،

[۳] سمینار یک‌روزه دانشگاه شهید بهشتی به مناسبت پنجاهمین سالگرد حدس بهزاد، بهار ۱۳۹۵

ابطال‌ناپذیر هستند ولی در پارادایم ریاضیات انسانی، همه نظرات در بوته دشوار و بیرحم آزمایش و تبیین‌های تجربی گذاشته می‌شوند.

ریاضیات ماشینی

به واسطه گسترش توفیق‌آمیز مدل‌ها و ماشین‌های محاسباتی، ایدهٔ یافتن اثبات‌های اتوماتیک و ماشینی قضیه‌های ریاضی مطرح شد و در سال‌های اخیر پیشرفت‌های قابل توجهی در این حوزه به وقوع پیوست. باید توجه داشت که ریاضیات در کلیت خود چالش مهلکی برای نظریه هوش مصنوعی است. بر اساس این نظریه همهٔ پردازش‌های اطلاعاتی ذهن انسان قابل شبیه‌سازی به وسیله برنامه‌های کامپیوتری هستند. ریاضیات یکی از این پردازش‌های کلان است. پس بنا براین نظریه، هوش مصنوعی بایستی از عهده قابلیت‌های ریاضی‌ورزی، پیروزمندانه برآید. در سال ۱۹۸۰ میلادی ادوارد فردکین (Edward Fredkin) مدیر وقت آزمایشگاه علوم کامپیوتر انستیتوی تکنولوژی ماساچوست، برای شخصی که با استفاده از کامپیوتر به کشف بزرگی در ریاضیات نایل شود یکصد هزار دلار جایزه تعیین کرد. متخصصین علوم کامپیوتر و هوش مصنوعی دریافتند پاسخ کامل به چالش فردکین بایستی بتواند از عهده سه تکلیف کلان که در قلمرو ریاضیات انسانی قرار دارند، برآید. این سه تکلیف بزرگ عبارتند از ۱ ـ ایده‌پردازی در ریاضیات ۲ ـ اثبات ماشینی و اتوماتیک قضایای ریاضی و ۳ ـ تولید حدس‌های ریاضی. البته در این سه ردیف، موضوع بسیار مهمی از ریاضیات انسانی مورد غفلت قرار گرفته است.

ریاضیات صرفاً کشف قضایا و انباشت توده‌وار آن‌ها نیست بلکه پا به پای این روند، ریاضی‌دانان ریاضیات موجود را یکپارچه و تا حد ممکن متحد می‌سازند. تلاش‌های فکری و اثبات نتایج در راستای یکپارچه‌سازی، خود فعالیت بزرگی است که باید به‌طور مستقل مورد توجه باشد. به هر روی، تاکنون سه کارکرد بالا، یک جا و یکپارچه برآورده نشده است ولی در راستای اثبات‌های ماشینی و حدس‌های ریاضی به طور جداگانه نتایج درخشانی حاصل شده است. تعدادی برنامه و ماشین کامپیوتری که مستقل از ذهن انسان حدس‌های ریاضی تولید می‌کنند، به دست آمده است. ماشین‌های Graffiti و Graffiti.pc از جمله این موارد هستند[۴].

بحث اثبات‌های ماشینی و اتوماتیک قضایای ریاضی موضوعی بسیار گسترده و مسأله‌دار است. در این راستا، نخست باید توضیح دهیم نباید مفهوم «اثبات به کمک کامپیوتر» را با مفهوم «اثبات کامپیوتری» یکسان انگاشت. در اولی قسمتی از اثبات توسط ذهن ریاضی‌دان، جلو رفته و مابقی توسط کامپیوتر کامل می‌شود. اثبات «قضیه چهار رنگ» در نظریه رنگ‌آمیزی گراف برای رنگ‌آمیزی نقشه‌های جغرافیایی، از مصادیق «اثبات به کمک کامپیوتر» است اگر چه همواره تعابیر نادرستی از آن حتی بین خواص به عمل آمده است. مفهوم اثبات‌های اتوماتیک را می‌توان در دو سطح (الف) برنامه‌هایی که صحت یا سقم گزاره‌های معنادار یک دستگاه اصل موضوعی و استنتاجی صوری را با ارائه اثبات و با کمترین دخالت انسانی مشخص می کنند و (ب) برنامه‌هایی که قضایایی را جستجو و با اثبات تحویل می‌دهند، بیان کرد.

پروسه‌های اصل موضوعی‌سازی و صوری کردن ریاضیات که به طور جدی از اوایل قرن بیستم با هدف پاسخ به برخی معضلات فلسفی و نیل به یقین ریاضی توسط تعدادی ریاضی‌دان سرشناس به ویژه از طرف منطقیون و فرمالیست‌ها به عمل آمدند، تقریباً ناخواسته به مکانیکی و اتوماتیک کردن ریاضیات ختم شدند. دو مورد از اولین برنامه‌های کامپیوتری که قضیه ثابت کردند بر مبنای یکی از اولین نظریه‌های اصل موضوعی و صوری برای ریاضیات موسوم به پرنسیپیا متمتیکا(Principia Mathematica) که توسط راسل و وایتهد آفریده شد، طراحی شدند. اولین آن‌ها به Logic Theory Machine موسوم بود که در ۱۹۵۶ توانست ۳۸ قضیه از ۵۲ قضیه اول پرنسیپیا را خودش ثابت کند. هائو وانگ منطق دان در ۱۹۵۹ برنامه‌ای نوشت که چند صد قضیه از پرنسیپیا را در ۹ دقیقه کشف و ثابت کرد. جهت آشنایی بیشتر با مبحث ریاضیات و حدس‌های ماشینی خواننده را به مقاله مهم لارسن (Larson) ارجاع می‌دهیم[۵].

موانع و محدودیت‌های ریاضیات ماشینی

وقتی بخشی از ریاضیات را اصل موضوعی می‌کنیم که با یک سیستم استنتاج صوری نیز همراه باشد اولین قدم ضروری در جهت مکانیکی کردن، برداشته می‌شود ولی هنوز تا تکمیل این تکلیفِ کلان، فاصله بسیار است. حتی اگر یک مبحث یا نظریه در ریاضیات کاملاً اصل موضوعی توام با سیستم استنتاج صوری باشد، لزوماً نمی‌توان آن را به ماشین فهماند. به عنوان مثال اصول موضوع اقلیدس از هندسه اقلیدسی را به دلیل عناصر بصری و لمسی آن نمی‌توان صوری کرد ولی اصول موضوعی که تارسکی از هندسه اقلیدسی ارائه داد این قابلیت را دارد. به هر روی، علی‌رغم همه این فراز و نشیب‌ها بخشی‌هایی از ریاضیات، مکانیکی و کامپیوتری شده‌اند. این‌ها بخش‌هایی هستند که در نگاه اول نیز بسیار صوری و نمادین جلوه می‌کنند. می‌توان پنداشت مباحثی که از عناصر بصری و فضایی بهره می‌برند چالش مهلکی برای کامپیوتری شدن باشند. از جمله این قسمت‌ها می‌توان به انواع هندسه‌های سینتتیک که اشیاء را فی‌نفسه و بدون توسل به مختصات مطالعه می‌کنند، نظریه گره، توپولوژی شهودی و نظریه گراف اشاره کرد. به علاوه، بسیاری از مباحث و نظریه‌های ریاضی قالب اصل موضوعی ندارند و صرفاً «مدل‌های مفهومی» هستند. نظریه گره و گراف در این دسته قرار دارند.

[۴] http://faculty.nps.edu/rgera/Conjectures/SIAM2012/SIAM2012_DeLaVina.pdf

[۵] C. E. Larson, A survey of research in automated mathematical conjecture-making, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 69 (2005) 297-318.

با وجود این‌که نظریه گراف از اشیاء و اجزاء ساده هندسی تشکیل یافته ولی جالب اینجاست که پردازش بصری/فضایی ذهن انسان قویاً هنگامی که ریاضی‌دان مشغول کار با نمایش‌های تصویری گراف‌هاست، درگیر می‌شود. این موضوع، فعالیت‌های ریاضی‌ورزی ذهن انسان را با برخی مقولات علوم شناختی از جمله «نظریه حافظه» پیوند میزند که من آن را با هدف تفکیک پردازش شهودی از پردازش صوری/ زبانی ابداع و در یک کتاب (در دست انتشار) بررسی کرده‌ام. پس به نظر می‌رسد شهود بصری/فضایی و به طریق اولیٰ شهود، مانعی جدی برای ریاضیات ماشینی است. از طرف دیگر هر نوع دست‌آورد ریاضی هر اندازه هم که از پردازش شهودی استفاده کرده باشد، در نهایت به زبان صوری صورت بندی و بیان می‌گردد. در نتیجه چنین استنباط می‌شود که زبان ریاضی، شهود را به کناری می‌نهد. روی همین منوال افرادی مانند فایتلوویچ (Fajtlowicz) که «مخترع» گرافیتی است و برخی دیگر از متخصصین با تکیه بر آراء زبان شناختی چامسکی در باب تفکر، چنین می‌پندارند هر آنچه در ریاضی مطرح است زبان آن است و توفیق پروژه ریاضیات ماشینی فقط و فقط در گرو شبیه‌سازی مهارت‌های زبانی انسان است[۶]. به جرأت می‌توان گفت این استنباط اساساً نادرست است. آنچه ریاضیات انسانی را از نوع ماشینی آن جدا می‌سازد در شیوه‌های ریاضی‌ورزی ذهن انسان نهفته است و نه صرفاً در کار به اتمام رسیده و خروجی نهایی به شکل نتایج مدون ریاضی. مشاهده دقیق روی نحوه تفکر ذهن، از نقش بی‌بدیل شهود در سرتاسر ریاضیات و حتی در پردازش‌های نمادین و صوری حکایت دارد. نگاه جامع به ریاضیات به هدف متحد ساختن آن، وابسته به عالی‌ترین سطح پردازش شهودی است. مطالعات علوم شناختی و تصویربرداری مغزی نشان می‌دهند «شهود» قابلیتی به غایت انسانی بوده و خاستگاه آن در زیرساخت‌های مغزیِ محصول تکامل درازمدت انسان نهفته است.

نکته‌های پایانی

به نظریه گراف و حدس بهزاد برگردیم. تاکنون حدس‌های جالب بسیاری توسط گرافیتی مطرح شده که برخی توسط متخصصین گراف اثبات شده و تبدیل به قضیه‌های زیبایی در نظریه گراف شده‌اند و برخی هنوز لاینحل مانده‌اند. اگر چه ممکن است این حدس‌ها از حیث آموزش و تحصیل خلاقیت، تأثیرات منفی داشته باشد ولی گرافیتی در مجموع برای نظریه گراف مفید بوده است. این برنامه با آغاز از تعدادی پارامتر نظریه گرافی (به طور مؤثر محاسبه‌پذیر)، روابط جبری ساده‌ای متشکل از اَعمال حساب مقدماتی و نامساوی بین این پارامترها ساخته و درستی آن‌ها را روی بانکی از گراف‌ها بررسی می‌کند. روابطی که از این مرحله عبور می‌کنند به لیست حدس‌های ممکن اضافه می‌شوند؛ سپس با استفاده از قواعدی از بین این لیست، حدس‌های اصلی گلچین شده و به خروجی تحویل داده می‌شوند.

[۶] https://www.math.uh.edu/šiemion/fragments.pdf

در واقع اساس کار در گرافیتی جستجوی سرتاسری و خوشه چینی بهترین حدس‌ها است. به عنوان مثال گرافیتی حدس، و گراف تئوریست‌ها ثابت کرده‌اند که عدد استقلال هر گراف همبند ناکمتر از متوسط فواصل در گراف است. بعید بود متخصصین نظریه گراف، خود به این حدس دست یابند. با توجه به جنبه بصریی/فضایی نظریه گراف، می‌توان استدلال کرد توفیق پروژه اثبات ماشینی قضایای نظریه گرافی در گرو صورت‌بندی خاصیت‌های گرافی به زبان منطق مرتبه دوم و بالاتر و ماشینی کردن این نوع منطق است. حتی با فرض محقق شدن این امر، قسمت‌های زیادی از نظریه گراف غیرماشینی باقی خواهند ماند.

وقتی دکتر بهزاد کار روی رساله دکتری را آغاز کردند، ویزینگ نظریه گراف‌دان شهیر روسی در حال اتمام نتیجه خود در باب رنگ‌آمیزی یالی گراف‌ها بودند. یال‌های هر گراف را می‌توان با بیشترین درجه گراف به علاوه یک رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به نحوی که هر دو یال مجاور دارای رنگ‌های متفاوت باشند. دکتر بهزاد، بنابر گفته خودشان در همین سمینار، بجای کار روی رنگ‌آمیزی یالی تصمیم گرفتند آن را تعمیم داده و رأس‌ها و یال‌های گراف را همزمان مدنظر قرار دهند. شانس در معیّت ایشان بود که هم تعمیم آن سرراست در آمد و هم صحت آن بسیار محتمل است. این تعمیم از آن قسم تعمیم‌هایی است که در ریاضیات انسانی بسیار متداول است. با این وجود، گراف کلّی (total graph) مفهومی زیبا و از حیث روش‌شناسی بسیار مفید است. از دکتر مهدی بهزاد برای ترویج نظریه گراف و ریاضی‌ورزی در ایران باید همیشه قدردان بود.

*دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

★ ★ ★

بند پایانی سرمقاله:

خبرنامه به قدر دست‌هایی که استمداد مساعدتش را بپذیرند میدان روشنی برای گفتگو دربارهٔ «همه چیز» این جامعه علمی از دردها و مسئله‌ها تا تجربه‌ها و دستاوردهای آن است.

گلایه‌مندان با دقت بیشتری اوراق این دفترهای به رنج و شور و عشق گرد آمده را تورق کنند تا شاید در میان برگ‌های آن ریاضیات را نه تنها به عنوان محوری برای گفتگو دربارهٔ حرفه و مشغلهٔ روزمرهٔ مشترکی، که در عین حال مبنایی برای برخی از آرمان‌های علمی و انسانی و اندیشگی نیز بیابند.