



کسکول ۲



چند نکته درباره اصل انتخاب

۱. درویش

۱. کارل فیت در [۱، صفحه نوزده] قضیه زیر را بیان و "اثبات" کرده است.

Theorem: The well ordering theorem implies the axiom of choice.

Proof. Let $\{X_i\}_{i \in I}$ be a family of non-empty sets. Assuming that each set X_i is well ordered, then there exists a least element $x_i \in X_i, \forall i \in I$. Thus, $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. ■

ایراد این استدلال کجاست؟ کارل فیت نخست هر یک از X_i ها را خوشترتیب می کند و سپس از هریک از آنها عضو ابتدایشان را انتخاب می کند. اما چنین کاری خود مستلزم استفاده از اصل انتخاب است. در حقیقت هر یک از X_i ها را به طرق بی شماری می توان خوشترتیب ساخت. فیت برای هر یک از این مجموعه ها، نخست بی آنکه بداند دست به انتخاب زده و از میان خوشترتیبی هایی که این مجموعه ها را خوشترتیب می سازند پیشاپیش یکی را (لاجرم به کمک اصل انتخاب) انتخاب کرده. برای گریز از این دورباطل، چاره کار آن است که نخست اجتماع $\bigcup X_i$ را که (بنا به اصل موضوع اجتماع) مجموعه است در نظر بگیریم و سپس آن را خوشترتیب کنیم. از آنجا که زیر مجموعه های غیرتهی هر مجموعه خوشترتیب عضو ابتدا دارند مابقی استدلال معتبر است.

۲. نکته ای که کم و بیش با روح مطلب فوق هم خوانی دارد را در مطلبی دیگر در نظریه مجموعه ها می توان سراغ گرفت. این یکی از همان هفت مساله ای است که تسرمولو به عنوان مثال مورد بررسی قرار داد. گیریم $\{A_i\}_{i \in I}$ و $\{B_i\}_{i \in I}$ دو خانواده نامتناهی از مجموعه های مجزا باشند که به ازای هر i ، A_i هم توان با B_i باشد. نشان دهید که $\bigcup A_i$ با $\bigcup B_i$ هم توان است. استدلال

نخستین بار ارنست تسرمولو اصل انتخاب را در سال ۱۹۰۴ صورت بندی و معرفی کرد:

برای هر خانواده مفروض S از مجموعه های غیر تهی X ، امکان انتخاب یک عضو از هر یک وجود دارد. به زبان فنی تر، تابع $f: S \rightarrow \bigcup S$ موجود است که برای هر X در S داریم $f(X) \in X$. تابع f به تابع انتخاب مشهور است.

وقتی تسرمولو، انکار و اکراه برخی از ریاضیدانان معاصرش را درباره ی اصل انتخاب مشاهده کرد، در سال ۱۹۰۸، مقاله ی دیگری نوشت و هفت مساله و مطلب مهم و رایج که ریاضیدانان از آنها استفاده می کردند را نام برد که در همگی از اصل انتخاب یا معادل هایش استفاده می شد. او در این مقاله برای بار دوم قضیه خوشترتیبی را از اصل انتخاب استخراج نمود. از آن به بعد انکار اصل انتخاب چندان در ملاء عام رخ نداد. اما ریاضیدانان به شکل دیگری همین کار را کردند. اصل انتخاب آنقدر رواج یافت که نویسندگان متون درسی در ریاضیات نیازی به بردن نامش نمی دیدند و در استفاده از آن بی ذکر نام خود را مخیر می دیدند. «کیبی رایت» درباره ی اصل انتخاب رعایت نمی شود. این ضرب المثلی است قدیمی که «از دل برود هر آنکه از دیده برفت». اگر دانشجویان با اصل انتخاب و معادل هایش مواجه نشوند آنهم به این دلیل که نویسندگان کتاب های درسی از آن به طور تلویحی استفاده می کنند رفته رفته چشمانشان به ندیدن اصل انتخاب عادت می کند. در زیر می خواهم نشان دهم که این ضرب المثل نه تنها در مورد انسانها بلکه در مورد قضایا و اصول موضوعه در ریاضیات نیز مصداق دارد. به ویژه در مورد اصل انتخاب که موضوع بحث این شماره از کسکول است. خالی از لطف نیست که یادآوری کنیم که از سال ۱۹۰۴ تا امروز دویست سیصد گزاره معادل برای اصل انتخاب یافته شده که برخی از آنها به لحاظ تاریخی شهرت بیشتری دارند به ویژه؛ اصل ماکسیمال هاوسدورف، لم کوراتوفسکی - تسورن و قضیه خوشترتیبی.

حقیقت آن است که رودین چند کار را در ذهن خودش انجام داده: نخست مجموعه‌های ناتهی

$$\{(f(x^-), f(x^+)) \cap \mathbb{Q}\}_{x \in E}$$

را در نظر گرفته، اجازه دهید $\mathbb{Q} \cap (f(x^-), f(x^+))$ را $\mathbb{Q}_x$ بنامیم، سپس وجود تابع انتخاب

$$r : E \longrightarrow \bigcup_{x \in E} \mathbb{Q}_x, \quad \forall x \in E, r(x) \in \mathbb{Q}_x$$

را پذیرفته و دست آخر نشان داده که r یک به یک است (این یکی را واقعا نشان داده است).

عده‌ای می‌گویند «ریاضیدان اگر اراده کند می‌تواند رد پای اصل انتخاب را پیدا کند یا قضیه اش را که در آن به شکلی نامحسوس از اصل انتخاب استفاده کرده چنان بازنویسی کند که اصل هویدا شود». ریاضیدانها را نمی‌دانم اما برای ما موجودات فانی تا اطلاع ثانوی بهتر این نیست که هر جا به اصل انتخاب و معادل‌هایش برخوردیم آن را ذکر کنیم؟ در این صورت مورد قابل اغماض کارل فیت هم پیش نمی‌آمد.

مراجع

- [1] C. Faith, *Algebras: Rings, Modules and Categories I*, Springer-Verlag Berlin, 1973.
- [2] G.H. Moore, *Zermelo's axiom of choice: Its Origins, Development, and Influence*, Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2013.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition, McGraw-Hill International Book Company, 1976.

نادرست برای این مساله آن است که بگوییم چون به ازای هر اندیس i دو مجموعه A_i و B_i با یکدیگر هم توانند پس تابعی دوسوئی چون $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ در میان آنها وجود دارد. حال تابع $f_i \cup A_i$ همان دوسوئی مطلوب برای نشان دادن هم توانی A_i و B_i است.

مشکل این استدلال تا اندازه زیادی شبیه به ایرادی است که در استدلال کارل فیت مشاهده کردیم. در این نحو استدلال کردن اصل انتخاب به شکلی نامحسوس مورد استفاده قرار گرفته است. در حقیقت برای هر i میان A_i و B_i می‌توان دو سوئی‌های بسیاری سراغ گرفت و از آن میان به ازای هر i یکی را در نظر گرفته‌ایم (یعنی f_i)؛ این کار بی‌وساطت اصل انتخاب میسر نیست. ما نخست از میان دوسوئی‌های موجود میان A_i ها و B_i ها (به ازای تمامی i ها) یکی را انتخاب کرده‌ایم (تابع انتخاب این کار را انجام می‌دهد) و سپس آنها را به صورت f_i ها نامگذاری کرده‌ایم. بقیه استدلال به جای خودش محفوظ است.

۳. والتر رودین در [۳، قضیه ۳۰.۴]، تلویحا از اصل انتخاب بدون ذکر نام، استفاده کرده است. در این قضیه رودین نشان می‌دهد که تعداد نقاط ناپیوستگی یک تابع یکنوا حداکثر شمارش‌پذیر است. استدلال رودین کم و بیش چنین است. گیریم نام تابع یکنوای ما f باشد و E را مجموعه نقاط ناپیوستگی f بنامیم. بی‌آنکه به کلیت بحث خللی وارد شود تابع را صعودی می‌گیریم. رودین از قبل با نمادگذاری مناسبی نام حد راست f در نقطه x را $f(x^+)$ و نام حد چپ آن را $f(x^-)$ گذاشته است و مشاهده کرده که $f(x^-) \leq f(x^+)$. از آنجا که E مجموعه نقاط ناپیوستگی f است، برای x در E داریم که $f(x^-) < f(x^+)$. حال به هر x در E عدد گویای $r(x)$ را در بازه $(f(x^-), f(x^+))$ متناظر می‌کنیم یعنی $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$. اقدام بعدی رودین نشان دادن این است که تابع $r(x)$ یک بیک است و لذا E با زیر مجموعه‌ای از اعداد گویا هم توان است.