

## می دانم که می دانی:

## معماهای مبتنی بر معرفت مشترک

سوفی مولر<sup>\*</sup>، محمد شهریاری<sup>\*\*</sup>

در یک عصر خنک مردادماه، در تابستانی که گذشت، ما نویسندگان این یادداشت برای گردش به کوه سرخ‌فام عینالی در حومه تبریز رفتیم. میان راه تصمیم گرفتیم درباره معماهای منطقی صحبت کنیم. نقش چنین معماهایی در توسعه بخش‌هایی از ریاضیات بر همگان واضح است. به عنوان مثال، آنان که با مبانی منطق ریاضی آشنا باشند می‌دانند که معمای دروغگو چگونه باعث پیدایش نظریه صدق تارسکی و نیز قضیه ناتمامیت گودل شده است.

صحبت ما در هنگام صعود به کوه به معمای جزیره چشم آبی‌ها کشیده شد. صورت معما چنین است:

در یک جزیره دور، در جایی از اقیانوس، مردمانی زندگی می‌کردند با هوش سرشار، راستگو و به غایت منطق‌مدار. رنگ چشم مردم این جزیره آبی بود یا سبز. هر کس می‌توانست چشمان دیگر مردمان جزیره را مشاهده کند اما به علت فقدان هر نوع آینه یا سطح صیقلی، کسی قادر به دیدن رنگ چشمان خود نبود. اهالی جزیره به دینی اعتقاد داشتند که هر کس را از دانستن رنگ چشم خویش منع می‌کرد. به همین سبب اهالی جزیره هرگز با دیگران درباره رنگ چشم آن‌ها سخن نمی‌گفتند. طبق دستور دین، هر کس که متوجه آبی بودن چشم خود می‌شد می‌بایست در اولین شب پیش رو از جزیره می‌رفت. اگر کسی از جزیره می‌رفت، تمام دیگر اهالی رفتن او را می‌فهمیدند.

روزی بیگانه‌ای به این جزیره سفر کرد و مدتی مهمان مردمان جزیره شد. هنگام وداع، بیگانه از مهمان‌نوازی مردم جزیره تشکر کرد و چون با اعتقادات ایشان چندان آشنا نبود چنین گفت: چه جزیره زیبایی و چه مردمان خوبی! برای من بسیار جالب بود که در میان شما کسانی با چشم آبی دیدم و حال آن‌که پیش از این در سایر جزیره‌های این حوالی هرگز فردی با چشم آبی ندیده بودم. بیگانه چنین گفت و رفت. هر یک از اهالی جزیره در مراسم بدرقه حضور داشت و سخن بیگانه را شنید. آن‌ها می‌دانستند که بیگانه مردی راستگو است.

بیگانه رفت و شب نخست اتفاق خاصی در جزیره رخ نداد. شب دوم، شب سوم، و سایر شب‌ها نیز طی شد. اما در شب صدم تمام اهالی همزمان جزیره را ترک کردند.

دیگران که احوالات مردم جزیره و ماجرای فوق را شنیده‌اند از یکدیگر می‌پرسند که آیا چه شد تمام مردمان جزیره در شب صدم ناگهان جزیره را ترک گفتند؟

دو جواب برای این سؤال موجود است. عده‌ای معتقدند تعداد اهالی جزیره صد تن بوده و همگی چشم آبی داشته‌اند.

آنان برای اثبات ادعای خود چنین استدلال می‌کنند: فرض کنیم  $k$  نشان‌دهنده تعداد افراد چشم آبی جزیره باشد. ادعا می‌کنیم که در شب  $k$  - ام همه این افراد جزیره را ترک می‌کنند. اثبات این ادعا با استقراء روی  $k$  است. نخست فرض کنیم  $k = 1$ . تنها فرد چشم آبی جزیره پس از شنیدن آن سخن از بیگانه، با خود می‌گوید: من می‌بینم که چشم دیگران سبز است. پس مقصود بیگانه به یقین من بوده‌ام. سپس وی در شب اول جزیره را ترک می‌کند.

حال فرض کنیم  $2 \leq k$  و نیز فرض کنیم و حکم برای  $k - 1$  درست باشد. شب نخست هیچ‌کدام از افراد چشم آبی جزیره را ترک نخواهد کرد، چون هر کدام با دیدن  $k - 1$  شخص چشم آبی دیگر منتظر رفتن ایشان در شب  $(k - 1)$  - ام خواهد بود. اما چون در آن شب کسی جزیره را ترک نمی‌کند، هر کدام از آن  $k$  شخص پیش خود چنین می‌اندیشد: اگر در جزیره ما دقیقاً  $k - 1$  تن با چشم آبی موجود می‌بود پس طبق فرض استقراء می‌بایست شب گذشته همگی از جزیره می‌رفتند. اما نرفته‌اند! چرا؟ چون به یقین فردی دیگر هم با چشمان آبی وجود دارد. آن فرد دیگر کیست؟ اگر جز من کسی دیگر بود که من او را نیز مشاهده می‌کردم. پس لزوماً آن فرد من هستم.

تمام افراد چشم آبی جزیره در آن ساعت چنین می‌اندیشند و متوجه رنگ آبی چشمان خود می‌شوند. بنابراین در شب  $k$  - ام جزیره را ترک می‌گویند. حال چون واقعه ترک جزیره در شب صدم رخ داده و طبق فرض مسأله تمام اهالی جزیره آن‌جا را ترک کرده‌اند پس نتیجه می‌توان گرفت که تعداد مردم جزیره صد تن بوده و همگی چشمان آبی داشته‌اند.

اینک، اجازه دهید جواب دوم برای معمای فوق را بخوانیم. برخی نیز اثبات استقرایی فوق را قبول ندارند. آن‌ها معتقدند در اصل نباید کسی جزیره را ترک کند. اگر در این جزیره صد تن با چشمان آبی موجود باشد پیش از آن‌که مرد بیگانه درباره وجود شخص یا اشخاصی با چشم آبی در آن جزیره سخنی گفته باشد خود آن مردم این حقیقت را می‌دانند و سخن بیگانه چیزی به دانش آن‌ها اضافه نمی‌کند. پس چرا باید آن‌ها جزیره را ترک کرده باشند؟

در ادامه این یادداشت، قصد داریم نشان دهیم که در حقیقت نظر دوم درست نیست و اگر دقیق باشیم متوجه می‌شویم که آن سخن از مرد بیگانه واقعاً به دانسته‌های مردم جزیره چیزی افزوده و همان چیز موجب مهاجرت دسته جمعی ایشان شده است. برای توضیح دقیق آنچه رخ داده، به منطق موجهات متوسل می‌شویم. فرض کنید  $\varphi$  یک جمله باشد. اگر  $A$  و  $B$  دو شخص باشند که

موجه  $E^{1^{\circ\circ}}(0 \leq k)$  نیز درست بوده اما تا آن موقع  $E^{1^{\circ\circ}}(0 < k)$  صحت نداشته است. آنچه بیگانه در اختیار ساکنان جزیره قرار می‌دهد عبارت است از  $C(0 < k)$ . پس بعد از افشاگری بیگانه جمله موجه  $E^{1^{\circ\circ}}(0 < k)$  درست است و این است آن چیزی که موجب مهاجرت تمام اهالی جزیره در شب صدم شده است.

چرا این مهاجرت در شب اول رخ نداده است؟ چرا برای رخ دادن این اتفاق باید صد روز منتظر بمانیم؟ برای درک بیشتر آنچه در عمل اتفاق می‌افتد به استدلالی اشاره می‌کنیم که مارک وان لیوین<sup>۱۵</sup> در سایت [math.stackexchange.com/a/490546](http://math.stackexchange.com/a/490546) منتشر کرده است. علاقه‌مندان می‌توانند برای مشاهده جزئیات استدلال به سایت فوق مراجعه کنند. فرض کنید  $L(i)$  به این معنی باشد: در شب  $i$  - ام کسی جزیره را ترک می‌کند. چون تمام افراد جزیره مهاجرت هر فرد دیگر را می‌بینند و همه این را می‌دانند پس خود جمله  $L(i)$  یک معرفت مشترک است. می‌توان نشان داد که جمله زیر هم یک معرفت مشترک است:

$$\forall i \geq 0 \forall j > 0 : k = j \wedge \neg L(i) \wedge E(j \leq k) \rightarrow L(i+1)$$

جمله فوق به این معنی است که اگر تعداد اهالی چشم آبی جزیره  $j$  باشد و همه بدانند که تعداد اهالی چشم آبی حداقل  $j$  است و اگر در شب  $i$  - ام کسی جزیره را ترک نکند آن‌گاه لزوماً در شب بعد فردی جزیره را ترک خواهد کرد. علاوه بر این، هر کس این را خواهد دانست و هر کس خواهد دانست که دیگران نیز این را می‌دانند و ... با یک استدلال استقرایی می‌توان جمله زیر را هم ثابت کرد:

$$\forall l \forall j : E^{l+j}(0 < k) \wedge C(\forall i \leq j : \neg L(i)) \rightarrow E^l(j < k).$$

به‌خصوص فرض کنیم  $l = 1$  و  $j = 99$ . پس داریم

$$E^{1^{\circ\circ}}(0 < k) \wedge C(\forall i \leq 99 : \neg L(i)) \rightarrow E(99 < k).$$

پس اگر تا پایان شب ۹۹ کسی از جزیره نرود آن‌گاه همه متوجه می‌شوند که  $99 < k$  و به ویژه تمام آن‌هایی که چشم آبی دارند نتیجه می‌گیرند که  $k = 100$ .

داشتن معرفت مشترک در یک بازی می‌تواند تأثیری مهم در نتیجه آن داشته باشد. داستان لباس تازه پادشاه، اثر هانس کریستین آندرسن، شاید معروف‌ترین مثال باشد. در این داستان، همه رعایا می‌دانند که پادشاه عریان است، اما کسی نمی‌داند که آیا دیگران نیز چنین معرفتی دارند. بنابراین تا زمانی که آن کودک فریاد برنیاورده که پادشاه لخت است، همه چیز به خوبی پیش می‌رود.

این یادداشت می‌توانست همین‌جا به پایان رسد، اگر نویسنده اول در یک صبح سرد اسفند با جان کنووی<sup>۱۶</sup> روبرو نمی‌شد و از ایشان

از درستی  $\varphi$  خبر دارند اما حق نداشته باشند که درباره آن باهم سخن بگویند ممکن است  $A$  نداند که  $B$  از صحت  $\varphi$  مطلع است و ممکن است  $B$  نداند که  $A$  از صحت  $\varphi$  خبر دارد. مثلاً فرض کنیم  $\varphi$  جمله کسی با چشمان آبی وجود دارد باشد. اگر تنها دو تن مثل  $A$  و  $B$  چشم آبی داشته باشند، آنگاه هر دو تن از قبل می‌دانند که  $\varphi$  درست است اما هیچ‌کدام نمی‌دانند که دیگری نیز از صحت  $\varphi$  آگاهی دارد. بنابراین تا زمانی که این راز افشا نشده باشد نه  $A$  و نه  $B$  منتظر آن نیست که در شب پیش رو کسی جزیره را ترک کند. اما زمانی که صحت  $\varphi$  توسط بیگانه در ملاء عام اعلام شد،  $A$  پیش خود می‌اندیشد: حال دیگر  $B$  دانسته است که  $\varphi$  درست است. پس اگر چشمان من آبی نباشد  $B$  باید متوجه رنگ آبی چشمان خود بشود و او باید امشب جزیره را ترک کند. همزمان  $B$  نیز شبیه  $A$  فکر می‌کند.

برای تحلیل بیشتر، عملگر وجهی  $E$  را چنین تعریف می‌کنیم: جمله  $E(\varphi)$  به این معنی است که هر کس می‌داند که  $\varphi$  درست است. توجه کنید که  $\varphi$  و  $E(\varphi)$  معادل نیستند. در واقع استلزام  $\varphi \rightarrow E(\varphi)$  همواره برقرار است، اما ممکن است  $E(\varphi) \rightarrow \varphi$  درست نباشد. حال بیایید به جمله  $E^2(\varphi) = E(E(\varphi))$  توجه کنیم. معنای این جمله چیست؟ به وضوح این جمله بیان کننده آن است که هر کس می‌داند که هر کس می‌داند که  $\varphi$  درست است. حقیقتی که  $E^2(\varphi)$  حاوی آن است پس بیشتر از محتوای  $\varphi$  است. حال، فرض کنیم  $C(\varphi)$  یک خلاصه‌نویسی برای جمله زیر باشد:

$$\forall n \geq 0 : E^n(\varphi).$$

به زبان ساده  $C(\varphi)$  بدان معناست که  $\varphi$  درست است و هر کس این را می‌داند و هر کس می‌داند که هر کس این را می‌داند و هر کس می‌داند که هر کس می‌داند که هر کس این را می‌داند و ... (الی آخر). جمله اخیر، یعنی  $C(\varphi)$  را یک معرفت مشترک می‌نامند. تفاوت میان معانی  $\varphi$  و  $C(\varphi)$  برای نخستین بار در دهه‌های شصت و هفتاد قرن گذشته توسط فلاسفه و جامعه‌شناسان مورد توجه قرار گرفته است. پس از آن، ریاضی‌دانان و متخصصان علوم کامپیوتر نظری به مدل‌سازی ریاضی برای مفهوم معرفت مشترک پرداخته‌اند.

در مثال جزیره، آنچه حقیقت دارد این است که  $k = 100$  ولیکن پیش از روز صدم کسی از ایشان این واقعیت را نمی‌داند. پس جمله  $E(k = 100)$  تا آن موقع صحیح نیست. به جای آن جمله  $E(99 \leq k \leq 100)$  حتی پیش از سخن گفتن بیگانه درست بوده است. دقت کنید که جمله  $E^2(99 \leq k)$  چنین نبوده اما در عوض  $E^2(98 \leq k)$  درست بوده است. اگر این استدلال را تعقیب کنیم متوجه می‌شویم که قبل از بیانات بیگانه جمله

<sup>۱۵</sup>Leeuwen van Marc  
<sup>۱۶</sup>John Horton Conway

به طور دقیق تر، وقتی امید، بهنام و تیرداد به پرسش زهره جواب دهند، یک دور بازی گذشته است. حال مسأله این است که آیا برای عددی صحیح مانند  $n$ ، بعد از دور  $n$  - ام یکی از مردان می تواند مجموع درست را بفهمد یا نه؟ به عبارت دیگر، آیا برای هر انتخاب برای اعداد روی پیشانی مردان، عدد صحیح  $n$  وجود دارد که بعد از دور  $n$  - ام بازی، یکی از مردان بتواند فقط از اطلاعاتی که زهره دارد مجموع درست را تشخیص دهد؟

برای توضیح ایده حل این معما، فعلاً فرض کنیم که فقط دو مرد (امید و بهنام) در بازی شرکت می کنند و تصور کنیم زهره فقط دو عدد روی تخته نوشته است. علاوه بر این فرض کنیم که همه آن اعداد، صحیح نامنفی هستند. فرض کنیم  $S_0$  مجموعه اعدادی است که از نقطه نظر زهره ممکن است قبل از شروع بازی روی پیشانی امید و بهنام نوشته شده باشد، یعنی مجموعه  $S_0$  عبارت از آن جفت های اعداد صحیح نامنفی است که مجموعشان یکی از اعداد روی تخته باشد. مثلاً اگر زهره در تخته اعداد ۵ و ۷ را نوشته باشد مجموعه  $S_0$  این است:

$$S_0 = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (7, 0)\}$$

به طور مشابه فرض کنیم که  $S_n$  مجموعه جفت های اعدادی است که از نقطه نظر زهره ممکن است بعد از دور  $n$  - ام بازی روی پیشانی امید و بهنام نوشته شده باشد. چطور می شود مجموعه  $S_{n+1}$  را از دانستن مجموعه  $S_n$  تعیین کرد؟

به مثالمان برگردیم. در اولین دور بازی، اگر امید ببیند که روی پیشانی بهنام ۷ نوشته شده است فوراً می فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۰ باشد. مثلاً اگر ببیند که روی پیشانی بهنام ۶ نوشته شده است بلافاصله می فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۱ باشد. و اگر روی پیشانی بهنام عدد دیگری ببیند نمی تواند به هیچ نتیجه ای برسد. مثلاً اگر بهنام ببیند که عدد روی پیشانی امید ۷ یا ۶ است می فهمد که روی پیشانی خودش ۰ یا ۱ نوشته شده است وگرنه مجبور می شود بگوید نمی دانم. یعنی بازی طی اولین دور به پایان می رسد اگر و تنها اگر اعداد روی پیشانی دو مرد یا  $(0, 7)$  یا  $(1, 6)$  یا  $(6, 1)$  یا  $(7, 0)$  باشد. معنای این سخن آن است که بعد از آن اولین دور، اگر بازی به پایان نرسیده باشد زهره متوجه می شود که مجموعه زوج های اعداد ممکن باقی مانده چنین است:

$$S_0 = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\}$$

نه تنها زهره، که حتی دو مرد نیز به این واقعیت آگاه هستند.

نمی پرسید که آیا بینشی درباره معرفت مشترک دارند. جان کنووی در پاسخ، معمای دیگری طرح کرد که صورت آن چنین است:

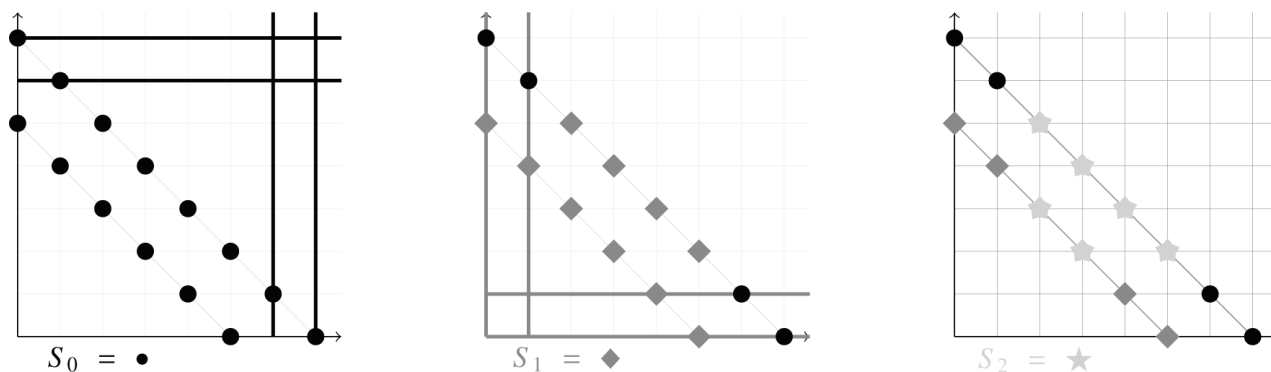
زنی نابینا به اسم زهره سه مرد کاملاً منطقی و راستگو را به یک بازی دعوت می کند. نام مردان عبارت است از امید، بهنام و تیرداد. زهره به ایشان می گوید: دستیار من روی پیشانی شما سه عدد نامنفی می نویسد. من هم سه عدد روی تخته می نویسم که یکی از آنها مجموع اعداد روی پیشانی شماست. اما دقت کنید که من از عددهای روی پیشانی شما خبر ندارم و ضمناً نمی دانم مجموع آن ها چند است. حال من از امید می پرسم که آیا می داند عدد روی پیشانی شما چند است. اگر امید گفت نمی دانم به سراغ بهنام می روم و همان سؤال را می پرسم. اگر بهنام گفت نمی دانم به سراغ تیرداد می روم و سؤال را تکرار می کنم. اگر تیرداد هم گفت نمی دانم به امید بر می گردم و بازی دوباره از نو شروع می شود. تا یکی از شما نگوید می دانم ما اجازه نداریم از این اتفاق برویم.

بر اساس گفته کنووی، مهم نیست چه اعدادی روی پیشانی مردان و روی تخته نوشته شده باشد، زیرا همواره راهی وجود دارد که در طی این بازی یکی از مردان (و حتی هر سه مرد) به عدد روی پیشانی خود را پی ببرد.

در نظر اول این معما به معمای جزیره شباهتی ندارد، جز این که همانند آن غیرممکن به نظر می رسد. مثلاً فرض کنیم که دستیار زهره روی پیشانی هر مردی عدد ۲ را نوشته باشد. گیریم که زهره هم روی تخته اعداد ۶، ۷، ۸ را نوشته باشد. امید روی پیشانی بهنام و تیرداد عدد ۲ را می بیند و به این نتیجه ای می رسد که عدد روی پیشانی باید ۳ یا ۴ باشد. این است که در پاسخ به زهره می گوید: نمی دانم. بهنام و تیرداد دچار همین دردسر هستند و بالاچاره نمی دانم خواهند گفت. به نظر می رسد که سه تا مرد تا ابد چنین پاسخ گویند و هیچکس از اتفاق بازی آزاد نشود.

البته کسی که با معمای جزیره آشنا باشد می فهمد که اشکال کار در کجاست: بعد از شنیدن جواب های بهنام و تیرداد، امید آگاهی جدیدی می یابد: این آگاهی جدید چه می تواند باشد جز این که اطلاعات بهنام و تیرداد در حال حاضر کافی نیست تا ایشان عدد روی پیشانی خود را بدانند. مثلاً با هر جواب منفی بهنام یا تیرداد، امید وضعیت را بهتر می فهمد. ولی اگر سعی کنیم از نقطه نظر یکی از مردان آن بازی را درک کنیم، استدلال استقرایی به زودی خیلی پیچیده می شود. به همین دلیل کنووی، زهره را به بازی اضافه کرده است، چون هر چیزی که زهره بداند معرفت مشترک است<sup>۱۷</sup> با این که حضور زهره برای بازی به هیچ وجه ضروری نیست، اما اگر ما بر اطلاعاتی که زهره دارد تمرکز کنیم می توانیم خیلی راحت تر معما را حل کنیم.

<sup>۱۷</sup> ولی عکسش درست نیست.



مردان هر چه باشد، بازی بعد از حداکثر سه دور به پایان می‌رسد. در حالی که اعداد روی تخته طور دیگر باشند استدلال همین است. باید ثابت کنیم که اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد مجموعه  $S_n$  تهی خواهد بود. دو نکته مهم وجود دارد:

(۱) مجموعه  $S_0$  متناهی است، چون  $S_0$  از آن جفت اعداد صحیح نامنفی عبارت است که مجموعشان یکی از دو تا عدد در تخته باشد.

(۲) برای هر  $n$ ، مجموعه  $S_{n+1}$  از  $S_n$  اکیداً کوچک‌تر است، یعنی در هر دور بازی زهره دست‌کم یک حل از فهرست حل‌های ممکن برمی‌دارد. این نتیجه‌ای از گزاره ذیل است.

با توجه به این دو نکته واضح خواهد بود که اگر تعداد عناصر  $S_0$  مساوی  $N$  باشد بازی نمی‌تواند بیشتر از  $N$  دور طول بکشد.

گزاره ۱ فرض کنیم  $S$  یک مجموعه متناهی از زوج‌های مرتب اعداد (صحیح یا حقیقی) باشد، و به ازای هر زوج  $(a, b)$  در  $S$ ، یا زوج متفاوتی در  $S$  موجود باشد که اولین مؤلفه آن  $a$  است یا زوج متفاوتی در  $S$  موجود باشد که دومین مؤلفه آن  $b$  است. در این صورت مجموعه جمع‌های مؤلفه‌های زوج‌ها در  $S$  حداقل سه عضو دارد.

برای اثبات این گزاره، یک زوج  $(a, b)$  در  $S$  انتخاب می‌کنیم به طوری که  $a$  کوچکترین مقدار ممکن باشد. طبق فرض، دست‌کم دو عدد متفاوت  $b_1$  و  $b_2$  وجود دارند که هم  $(a, b_1)$  و هم  $(a, b_2)$  در  $S$  است. چون یکی از آن دو تا عدد از دیگری بزرگ‌تر است و چون ترتیب اهمیتی ندارد می‌توان فرض کرد که  $b_1$  از  $b_2$  بزرگ‌تر است. به خاطر فرض گزاره می‌دانیم که عددی مانند  $c$  وجود دارد که  $c$  با  $a$  متفاوت است و  $(c, b_1)$  در  $S$  قرار دارد. حال  $c$  باید از  $a$  بزرگ‌تر باشد (وگرنه ما در اولین مرحله زوج  $(c, b_1)$  را انتخاب می‌کردیم)، بنابراین

$$c + b_1 > a + b_1 > a + b_2$$

و این گزاره را ثابت می‌کند. الان برگردیم به وضعیتی که در بازی

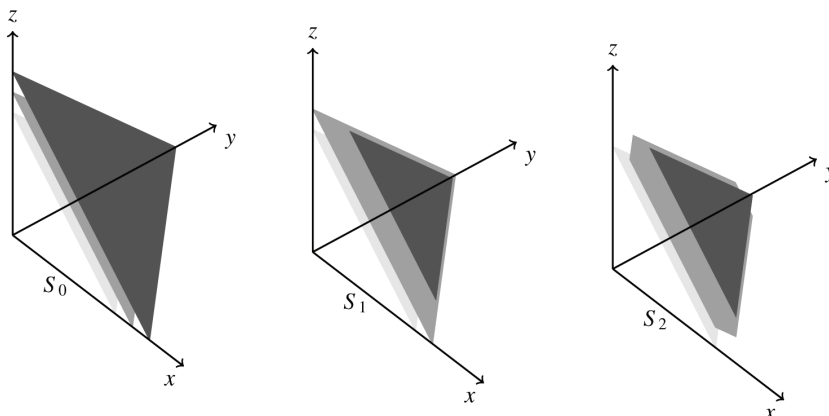
در دومین دور بازی، اگر امید ببینند که روی پیشانی به‌ننام ۰ نوشته‌اند می‌تواند بفهمد که روی پیشانی خود ۵ دارد، چون در مجموعه  $S_1$  تنها زوجی که مؤلفه دومش ۰ باشد، جفت  $(۰, ۵)$  است. مشابهاً اگر ببینند که روی پیشانی به‌ننام ۱ نوشته شده است می‌تواند بفهمد که روی پیشانی خودش ۴ نوشته‌اند، چون در مجموعه  $S_1$  تنها جفتی که مؤلفه دومش ۱ باشد، جفت  $(۴, ۱)$  است. در سایر حالت‌ها امید به هیچ نتیجه‌ای نمی‌رسد چون برای هر زوج دیگر  $(a, b)$  در مجموعه  $S_1$  یک زوج متفاوت در  $S_1$  است که مؤلفه دومش مساوی  $b$  باشد. مشابهاً به‌ننام اگر روی پیشانی امید ۰ یا ۱ را ببیند می‌فهمد که عدد روی پیشانی خودش باید ۵ یا ۴ باشد وگرنه می‌گوید نمی‌دانم. به عبارت دیگر، اگر بازی در دور دوم به پایان نرسد مجموعه جفت‌های اعداد ممکن باقی مانده بعد از آن دور چنین است:

$$S_2 = \{(۲, ۳), (۳, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۳), (۵, ۲)\}$$

اکنون، هم زهره و هم دو مرد به این آگاهی دست یافته‌اند. به‌طور خلاصه، در دور  $(n+1)$ -ام بازی، امید می‌تواند مجموع درست را (یا عدد روی پیشانی را، چون این دو هم ارزند) بفهمد، اگر زوج اعداد  $(a, b)$  روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر جفت دیگر  $(c, d)$  در  $S_n$ ، اعداد  $a$  و  $c$  متفاوت باشند، چون در این وضعیت دانستن  $b$  (یعنی عدد روی پیشانی به‌ننام) برای تعیین  $a$  کافی است وگرنه امید مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. مشابهاً به‌ننام می‌تواند مجموع درست را بفهمد اگر جفت اعداد  $(a, b)$  روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر جفت دیگر  $(c, d)$  در  $S_n$ ، اعداد  $b$  و  $d$  متفاوت باشند، چون در این وضعیت دانستن  $a$  (یعنی عدد روی پیشانی امید) برای تعیین  $b$  کافی است وگرنه به‌ننام مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. به عبارت دیگر زهره و بازیکنان روشی دارند که با آن می‌توانند مجموعه  $S_{n+1}$  را از مجموعه  $S_n$  حساب کنند. در مثال ما با استعمال مکرر این استدلال متوجه می‌شویم که  $S_2 = \{(۲, ۳), (۳, ۲)\}$  و اگر  $n \geq 4$  آنگاه  $S_n = \emptyset$ . یعنی در حالتی که اعداد روی تخته ۵ و ۷ باشند، و اعداد روی پیشانی

از گزاره ۱ می‌باشد.

گزاره ۲. فرض کنیم  $S$  یک مجموعه متناهی از سه‌تایی‌های مرتب اعداد (صحیح یا حقیقی) باشد، و فرض کنیم به ازای هر سه‌تایی  $(a, b, c)$  در  $S$ ، یا عنصری متفاوت در  $S$  هست که اولین مؤلفه‌اش  $a$ ، یا عنصری متفاوت در  $S$  هست که دومین مؤلفه‌اش  $b$ ، و یا سه‌تایی متفاوتی در  $S$  هست که سومین مؤلفه‌اش  $c$  باشد. در این صورت مجموعه جمع‌های مؤلفه‌های اعضای  $S$  حداقل چهار عضو دارد.



هر چند اثبات این گزاره از یک منظر شبیه گزاره قبل است اما برای روشن شدن آن‌چه که باید برای حالت کلی مسأله (حالتی که تعداد بازیکنان بیش از ۳ نفر است) انجام گیرد، بهتر آن است به بیان این اثبات بپردازیم: یک سه‌تایی  $(a, b, c)$  را در  $S$  انتخاب کنیم تا  $a$  کمترین مقدار ممکن باشد. برای مجموعه جفت‌های  $(b, c)$  که  $(a, b, c)$  در  $S$  باشد فرض گزاره ۱ درست است، و طبق نتیجه آن گزاره دست‌کم سه زوج  $(b_1, c_1)$  و  $(b_2, c_2)$  و  $(b_3, c_3)$  هست که هم  $(a, b_1, c_1)$  هم  $(a, b_2, c_2)$  هم  $(a, b_3, c_3)$  در  $S$  قرار دارد و سه مجموع  $a + b_1 + c_1$  و  $a + b_2 + c_2$  و  $a + b_3 + c_3$  با هم دیگر متفاوت هستند. مثلاً می‌توان فرض کرد که

$$a + b_1 + c_1 > a + b_2 + c_2 > a + b_3 + c_3.$$

حال به خاطر فرض گزاره می‌دانیم که یک عددی  $d$  وجود دارد که  $d$  با  $a$  متفاوت است و سه‌تایی  $(d, b_1, c_1)$  در  $S$  قرار دارد. می‌دانیم که  $d$  باید از  $a$  بزرگ‌تر باشد (وگرنه ما در اولین مرحله این اثبات سه‌تایی  $(d, b_1, c_1)$  را انتخاب می‌کردیم)، بنابراین

$$d + b_1 + c_1 > a + b_1 + c_1 > a + b_2 + c_2 > a + b_3 + c_3$$

و این گزاره را ثابت می‌کند.

سرانجام، می‌خواهیم توجه خواننده را به دو نکته جلب کنیم. نخست این که با کمک یک استدلال استقرایی، می‌توان ثابت کرد که اگر در بازی زهره دست‌کم یک حل از فهرست حل‌های ممکن برمی‌دارد. این نتیجه‌ای از گزاره زیر است، که تعمیمی

سه مرد حضور دارند و سه عدد روی تخته هست. مثل حالت قبل مجموعه حل‌هایی را که از نقطه نظر زهره در شروع بازی محتمل است.  $S_0$  و مجموعه حل‌های ممکن را که از نقطه نظر زهره بعد از دور  $n$  - ام بازی باقی‌مانده است  $S_n$  بنامیم. هر عنصر  $S_n$  یک سه‌تایی از اعداد صحیح است. مثلاً اگر روی پیشانی هر مرد ۲ نوشته باشد و اگر روی تخته ۵ و ۶ و ۷ نوشته باشد مجموعه  $S_0$  مجموعه آن سه‌تایی‌ها از اعداد صحیح نامنفی است که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها ۵ یا ۶ یا ۷ است.

فرض کنیم  $n \geq 1$ . بلافاصله قبل از دور  $n$  - ام بازی، هم امید، هم بهنام و هم تیرداد می‌دانند که حل باید در مجموعه  $S_{n-1}$  باشد. در دور  $n$  - ام بازی، امید می‌تواند مجموع درست را بفهمد اگر سه‌تایی  $(a, b, c)$  روی پیشانی مردان چنان باشد که برای هر سه‌تایی دیگر مثل  $(x, y, z)$  در  $S_{n-1}$ ، اعداد  $a$  و  $x$  متفاوت باشند، چون در این وضعیت دانستن  $b$  و  $c$  (یعنی اعداد روی پیشانی بهنام و تیرداد) برای تعیین کردن  $a$  کافی است. وگرنه امید مجبور می‌شود بگوید نمی‌دانم. به همین روش می‌توان سه‌تایی‌هایی را توصیف کرد که اگر جواب درست یکی از آن‌ها باشد یا بهنام یا تیرداد می‌توانند در دور  $n$  - ام بازی به آن وضعیت آگاه شوند. در نتیجه زهره می‌تواند مجموعه  $S_n$  را از مجموعه  $S_{n-1}$  چنین تعیین کند: او هر سه‌تایی  $(a, b, c)$  از مجموعه  $S_{n-1}$  که یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه اول  $a$  در  $S_{n-1}$  نیست یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه دوم  $b$  در  $S_{n-1}$  نیست و یا هیچ سه‌تایی دیگر با مؤلفه سوم  $c$  در  $S_{n-1}$  نیست را از  $S_{n-1}$  انتخاب می‌کند تا  $S_n$  ساخته شود.

باید ثابت کنیم که اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ بشود مجموعه  $S_n$  تهی است، و دوباره کافیت دو نکته ذیل را ثابت کنیم:

(۱) مجموعه  $S_0$  متناهی است، چون  $S_0$  از آن سه‌تایی‌ها از اعداد

صحیح نامنفی عبارت است که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها یکی

از سه تا عدد در تخته باشد.

(۲) برای هر  $m$ ، مجموعه  $S_{n+1}$  از  $S_n$  اکیداً کوچک‌تر است، یعنی

در هر دور بازی زهره دست‌کم یک حل از فهرست حل‌های

ممکن برمی‌دارد. این نتیجه‌ای از گزاره زیر است، که تعمیمی

## تأملی فلسفی در ریاضیات

مجموعه نه چندان تهی!

حسن فتح‌زاده\*

### مقدمه: اندکی فلسفه

افلاطون وقتی از یک جوهر<sup>۱۸</sup> سخن می‌گفت یکی از مهم‌ترین مشخصات آن را وحدت می‌دانست، و این وحدت نه معرفت‌شناختی، که مسلماً هستی‌شناختی و در خود آن بود. بر همین مبنا بود که او می‌توانست از عینیت جوهر سخن بگوید، برخلاف وحدت‌هایی که از سوی ما بر امور کثیرتحمیل می‌شود. یک «درخت»، یک «میخ» و یک «تکه ابر» را نمی‌توان در کنار هم و با هم، در قالب هر روایتی، یک جوهر دانست. به همین دلیل گردایه‌ای مرکب از اجزا تنها هنگامی تشکیل یک جوهر می‌دهند که یک کلیت حقیقی بر آن‌ها حاکم باشد، کلیتی هستی‌شناختی و نه معرفت‌شناختی. برای مثال هزاران قطعه در نظمی دقیق کنار هم قرار می‌گیرند تا یک ماشین پیچیده بسازند. اما وحدت حاکم بر این ماشین وحدتی معرفت‌شناختی و ناظر به کارکرد آن است؛ و این وحدت کارکردی<sup>۱۹</sup> به قصد و هدف ما ارجاع دارد. هر نظم فیزیکی معنای خود را از یک فاعل شناسا می‌گیرد. از منظری صرفاً فیزیکی میان این ماشین پیچیده و تلنباری از اجسام درهم و برهم هیچ تفاوتی نمی‌توان قائل شد، هر دو به یکسان از قوانین ثابت پیروی می‌کنند و رفتاری پیش‌بینی‌پذیر دارند. بر این مبنا تفاوت میان این ماشین و گردایه «درخت، میخ و تکه ابر» تفاوتی اصیل و واقعی نیست.

اما برخلاف مورد ماشین، در مورد یک گیاه یا حیوان با اجزای بسیاری روبه‌روایم که گویی در کنار هم کلیتی حقیقی را می‌سازند، و این کلیت مستقل از قصد و هدف ما و در خود آن‌ها تحقق می‌یابد. بدین ترتیب سلول‌ها و اندام‌های مختلف از طبیعت متمایز می‌شوند و تشکیل وحدتی هستی‌شناختی می‌دهند که به ما اجازه می‌دهد یک ارگانیسم را جوهر بدانیم. وحدت یک ارگانیسم حقیقی و عینی است. این وحدت، که در اندیشه معاصر معطوف به «دیگری» می‌شود، راه را بر ایده‌های سوفیستی می‌بندد. اندیشمندان یونانی به همین دلیل برای گیاهان و حیوانات وحدتی جوهری قائل بودند که آن را به «پسوخته<sup>۲۰</sup>» (نفس) نسبت

به پایان می‌رسد. این قضیه از کنووی و پاترسون است (به مقاله [۲] مراجعه کنید). دوم این که برای این قضیه اصلاً مهم نیست که اعداد روی پیشانی مردان و روی تخته اعداد صحیح باشد، و اگر هم بازی با اعداد حقیقی نامنفی انجام شود، همیشه به پایان می‌رسد. اثبات این سخت نیست: مهم‌ترین نکته این است که هر مجموعه  $S_n$  یک مجموعه فشرده است. پس اگر فرض کنیم که بازی هیچ وقت به پایان نرسد، آنگاه برای هر  $n$  مجموعه  $S_n$  تهی نیست. چون  $S_n \subset S_{n-1}$  و چون هر  $S_n$  فشرده است می‌توان نتیجه گرفت که اشتراک  $S = \bigcap_{n \geq 1} S_n$  نیز ناتهی است. ولی کاربرد گزاره ۲ (که برای یک زیرمجموعه فشرده  $\mathbb{R}^3$  هم درست است) با این  $S$  موجب تناقض می‌باشد. (برای جزئیات به مقاله [۲] مراجعه کنید).

اینک خواننده می‌تواند پیرسد که چه ارتباطی میان معمای اخیر و معمای جزیره موجود است. در اصل معمای جزیره حالتی خاص از این بازی کنووی است: تصور کنید در آن جزیره روی پیشانی افرادی که چشم سبز دارند و روی پیشانی چشم آبی‌ها ۱ نوشته شده باشد. آنچه بیگانه اعلام می‌کند معادل این است که مجموع اعداد روی پیشانی مردم قبيله یکی از اعداد ۱ الی ۱۰۰ است. گذر هر شب به منزله یک دور کامل از بازی تلقی می‌شود.

### قدردانی و تشکر.

نویسنده اول علاقه دارد که از دو شخص در پایان این یادداشت سپاسگزاری کند: نخست پروفیسور جان کانووی از دانشگاه پرینستون به خاطر گفتگوی بسیار با ارزش درباره معمای دوم. سپس آقای مهدی شاکری به خاطر آموختن زبان شیرین فارسی به وی.

[1] D. Gale (editor), *Tracking the automatic ANT*, Springer-Verlag, 1998.

[2] M. Lasry, J. M. Morel, S. Solimini, *On knowledge games*, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, (2. No. 2-3), 1989.

\* دانشگاه پرینستون

\*\* دانشگاه تبریز