دستاوردهای ریاضی مریم میرزاخانی

برگردان: حسن حقیقی *

یکی از رویدادهای جلسه افتتاحیه کنگره بین‌المللی ریاضیدانان، اعطای نشان فیلدز به نامزدهای دریافت این نشان است. به علاوه رسم براین است که یک یا چند ریاضیدان برجسته، به تشریح دستاوردهای برندگان نشان فیلدز بپردازند.

در کنگره سال ۲۰۱۴، کِرتیس مَک‌مُولن، برنده نشان فیلدز سال ۱۹۹۸ و استاد راهنمای مریم میرزاخانی در دورهٔ دکتری، در سخنرانی خود، به تشریح کارهای وی پرداخت.

این متن ترجمه‌ای از این سخنرانی به نشانی زیر است:

The mathematical work of Maryam Mirzakhani
www.math.harvard.edu/ ctm/papers/home/text/papers/icm14/icm14.pdf

چکیده: نشان فیلدز ۲۰۱۴، به مریم میرزاخانی، به‌خاطر دستاوردهای اساسی و برجسته‌اش در دینامیک و هندسه رویه‌های ریمانی و فضاهای مدولی آنها اعطاء گردید.

مقدمه

میرزاخانی، مجموعه‌ای از نتایج جدید و قدرتمند درباره بستارهای مدارها و اندازه‌های پایای دستگاه‌های دینامیکی روی فضاهای مدولی به اثبات رسانیده است. وی همچنین، اثباتی جدید از حدسیه ویتن ارائه داده است که به طور طبیعی از مساله شمارش خم‌های ژئودزیک ساده روی رویه‌های ریمان شکل می‌گیرد. این یادداشت، شرح مختصری از نتایج اصلی به دست آمده توسط وی و پیامدهای آن را ارائه می‌دهد، از جمله، این دستاوردها، از مشابهتی قابل توجه بین فضاهای همگن و فضاهای مدولی حکایت می‌کند.

طرح موضوع

برای تشریح دستاوردهای ایشان، با خلاصه‌ای از مطالب مورد نیاز آغاز می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{M}_g$ نشان‌دهنده فضای مدولی خم‌های از گونای $g \geq ۲$ باشد. این فضا، هم یک چندگونای مختلط، با بعدی برابر $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_g = ۳g - ۳$ است، و هم یک اربیفلد هم‌تافته. نقاطش با رده‌های یک‌ریختی رویه‌های ریمانِ فشردهِ X و از گونای g در تناظری یک‌به‌یک قرار می‌گیرند. [1].

پیش ازاین، ریمان بعد $\mathcal{M}_g$ را تعیین کرده بود. ساختن دقیق فضای مدولی، در دهه ۱۹۶۰، از منظر آنالیز مختلط، توسط آلفورس و بِرس و از منظر هندسه جبری، توسط مامفرد صورت‌گرفته بود. امروزه، نظریه فضاهای مدولی، محل تلاقی شاخه‌های مختلفِ ریاضی، از هندسه‌حسابی گرفته تا نظریه ریسمان می‌باشد.

فرم هم‌تافته ω روی $\mathcal{M}_g$، از متریک هذلولوی روی X ناشی می‌شود. همان‌طور که به وسیله وُلپورت نشان داده شده، در مختصات طول-تابیده [2]، این فرم از تجزیه یک زوج شلوارکِ [3] X ، به دست می‌آید. به این ترتیب

$$\omega = \sum_{i=۱}^{۳g-۳} \mathrm{d}\ell_i \wedge \mathrm{d}\tau_i.$$

ساختار مختلط روی $\mathcal{M}_g$، از یکریختیِ طبیعی

$$T^*_X \mathcal{M}_g = Q(X) = \{X \text{ روی } q = q(z)\mathrm{d}z^۲ \text{ فرم‌های تمام‌ریخت}\}$$

بین فضای کتانژانت بر $\mathcal{M}_g$ در نقطه X و فضای فرم‌های دیفرانسیلی درجه‌دوم تمام‌ریخت روی X به‌دست می‌آید. به‌علاوه، متریک تایش‌مولر روی $\mathcal{M}_g$، از ساختار مختلط آن به دست می‌آید: از یک طرف، دوگان $L^۱$ نرم

$$\| q \| = \int_X | q(z) | \, | \mathrm{d}z |^۲ = \mathrm{area}(X, | q |).$$

[1] بنا بر قضیه نرمال سازی، برای هر خم تحویل ناپذیر $C \subset P^۲\mathbb{C}$، یک رویه ریمان فشرده $\widetilde{C}$ و یک نگاشت تمام ریخت $\sigma : \widetilde{C} \longrightarrow P^۲\mathbb{C}$ وجود دارد به طوری که $\sigma(\widetilde{C}) \longrightarrow P^۲\mathbb{C}$ و σ روی سایه وارون مجموعه نقاط هموار C، یک به یک است. به این ترتیب فضای مدولی خم‌های مسطح در صفحه تصویری $P^۲\mathbb{C}$ را می توان با فضای مدولی رویه‌های ریمان فشرده یکی گرفت. م.

[2] length-twist [3] pair of pants

روی $T^*_X\mathcal{M}_g$ است، و از طرف دیگر با متریک ذاتی کوبایاشی روی $\mathcal{M}_g$ همخوان است. فضای مدولی می‌تواند به عنوان فضای خارج قسمتی $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\mathrm{Mod}_g$ فضای تایش‌مولر نمایش داده شود-فضای پوششی جهانی آن، یک دامنه کراندار انقباض پذیر در $\mathbb{C}^{3g-3}$-با عمل گروه رده-نگاشت یک رویه.

یکی از چالش‌های کار با فضاهای مدولی، این است که این فضا، کاملاً ناهمگن است: برای مثال، گروه تقارن $\mathcal{T}_g$ (به عنوان یک منیفلد مختلط)، فقط گروه گسسته Mod_g است. معهذا، یکی از کارهای قابل توجه میرزاخانی این بود که نشان داد دینامیک روی فضای مدولی، در بسیاری موارد، همان خاصیت صلبیتی را دارد که دینامیک روی فضاهای همگن دارد.

از ژئودزیک‌های ساده تا حدسیه ویتِن

با دستاوردهای میرزاخانی روی ژئودزیک‌های ساده شروع می کنیم. در دهه ۱۹۴۰، دِل‌زارته، سِلبرگ و هُوبِر، قضیه اعداد اول برای رویه‌های هذلولوی را، که بیان می‌کرد تعداد ژئودزیک‌های بسته (جهت پذیر، اولیه) روی $X \in \mathcal{M}_g$ با طولی کمتر یامساوی L، در

$$\pi(X,L) \sim \frac{e^L}{L}$$

صدق می‌کند، به اثبات رساندند. (قضیه اعداد اول معمولی می‌گوید تعداد اعداد صحیح اول با $0 < \log p \le L$، به طور مجانبی برابر e^L/L است.)

تعداد ژئودزیک‌های بسته ساده‌ی $\sigma(X,Z)$، کاملاً متفاوت رفتار می‌کند، این عدد فقط رشد چندجمله‌ای دارد، و در سال ۲۰۰۴، میرزاخانی ثابت کرد که

$$\sigma(X,L) \sim C_X L^{6g-6}.$$

برخلاف قضیه اعداد اول، در این‌جا، عبارت سمت راست، هم به گونای X بستگی دارد و هم به هندسه X.

اگرچه، عبارت فوق فقط یک رویه ریمان X را در بردارد، اما اثبات میرزاخانی، دربر دارنده انتگرال گیری روی فضای مدولی است و منجر به یک سلسله نتایج جدید می‌گردد، از جمله اثباتی کاملاً غیرمنتظره از حدسیه ویتن. این حدسیه، که اعداد تقاطعی روی فضای مدولی، تعریف شده به وسیله رابطه

$$\langle \tau_{d_1},\ldots,\tau_{d_n}\rangle = \int_{\overline{M}_g} c_1(E_1)^{d_1}\cdots c_{d_n}(E_n)^{d_n}$$

را به یک جواب سری توانی سلسله مراتب KdV [۴] (یک دستگاه نامتناهی از معادلات دیفرانسیل، که همگی در رابطه ویراسُورو صدق می‌کنند) ربط می‌داد، به وسیله کنتسویچ، در ۱۹۹۲ به اثبات رسیده بود. در این‌جا، $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$، فشرده‌سازی دُلین-مامفرد فضای مدولی رویه‌های ریمان X، با نقاط نشان‌دار $(p_1,\ldots,p_n)$ می‌باشد، و $c_i(E_i)$ نشان‌دهنده اولین رده چرن بافه خطی $E_i \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ با تارهای $T^*_{p_i}X$ است.

هم‌چنین پژوهش‌های میرزاخانی درباره $\sigma(X,L)$، به فرمول‌هایی درمورد تعداد نوع‌های توپولوژیکی متفاوت خم‌های بسته ساده روی X، منجر گردید. به عنوان مثال، یک خم ساده تصادفی از گونای ۲ روی X، برای این‌که X را به دوقطعه خم از گونای یک تقسیم کند، احتمالی برابر ۱/۷ دارد. این عددها، همواره اعدادی گویا هستند، و فقط به g بستگی دارند و نه X.

در مرکز این نتایج، نتیجه بدیع میرزاخانی، یعنی محاسبه حجم فضای مدولی رویه‌های ریمان از گونای g، با n مؤلفه مرزی ژئودزیک با طول‌های $(L_1,\ldots,L_n)$، قرار می‌گیرد. این حجم توسط رابطه

$$P_{g,n}(L_1,\ldots,L_n) = \int_{\mathcal{M}_{g,n}(L_1,\ldots,L_n)} \omega^{3g-3+n}$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثال می‌توان نشان داد که $P_{1,1}(L_1) = \frac{1}{24}(L_1^2+4\pi^2)$. به‌طور کلی $P_{g,n}$، یک چندجمله‌ای است که ضرایبش (که در $\mathbb{Q}(\pi)$ قرار می‌گیرند)، می‌تواند به فراوانی‌ها و رده‌های مشخصه مرتبط گردند، نتیجه‌های بحث شده در بالا را به‌دست می‌دهند. قبلاً، فقط مقادیر $P_{g,n}(0,0,\ldots,0)$ معلوم شده بودند. اثبات‌ها به فرمول‌هایی پیچیده برای به دو نیم کردن رویه‌ها در امتداد ژئودزیک‌های هذلولوی بستگی دارد. (نگاه کنید به،[Mir3]، [Mir2]، [Mir1]).

علاوه بر این، میرزاخانی رفتار $\mathcal{M}_g$ را، وقتی $g \to \infty$، مورد مطالعه قرارداد. (نگاه کنیدبه[Mir6]، [Mir4]).

ژئودزیک‌های مختلط درفضای مدولی

حال به تشریح دستاورد میرزاخانی روی فضاهای مدولی و دینامیک

[۴] یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای است که اولین‌بار، برای مطالعه امواج آبهای کم عمق به کارگرفته شد و در دهه‌های گذشته، از نظر ریاضی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به نظر می‌آید این معادله، که متعلق به حوزه فیزیک کلاسیک است، در پیدایش حدسیه ویتن نقشی اساسی داشته است. م.
سلسله مراتب KdV، یک دنباله نامتناهی از معادلات با مشتقات‌جزیی است که با معادله Korteweg-de Vries شروع می‌شود. م.

روی آنها می‌پردازیم. سهم او در پیشبرد مرزهای دانش در این حوزه، شامل قضیه اعداد اول برای ژئودزیک‌های بسته روی $\mathcal{M}_g$، نتایج شمارشی برای مدارهای Mod_g روی $\mathcal{T}_g$، و رده‌بندی اندازه‌های Mod_g-پایا روی فضای تورق‌های [5] [6] اندازه‌دار $\mathcal{ML}_g$ است. اما شاید جالب‌ترین کار وی- که ما آن را دراین جا ارائه می‌کنیم- روایتی از قضیه راتنر برای فضاهای مدولی است.

ژئودزیک‌های مختلط

از مدت‌ها قبل معلوم شده بود که شارش ژئودزیک تایش‌مولر ارگودیک است (مِی‌شور، ویچ)، و درنتیجه می‌توان گفت تقریباً هر ژئودزیک $\gamma \subset \mathcal{M}_g$، چگال است. اما توصیف رفتار $\overline{\gamma}$ برای هرتک γ، دشوار است. پیش از این روی یک رویه هذلولوی، بستار یک ژئودزیک می‌توانست یک تارعنکبوت [7] (برخالی) باشد، و کارها فقط می‌توانست روی فضای مدولی بدتر شود.

تایش‌مولر نشان داد که فضای مدولی مملو است از خم‌های ژئودزیک، این‌ها غوطه‌وری‌های طول‌پای تمام‌ریخت می‌شدند

$$F : \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{M}_g.$$

در واقع، یک ژئودزیک مختلط وجود دارد که از هر نقطه $X \in \mathcal{M}_g$ و در هرجهت ممکن، می‌گذرد.

دراساس، بستار یک ژئودزیک مختلط، ممکن است همان نوع غیرعادی بودن را نشان دهد که یک ژئودزیک حقیقی می‌تواند نشان دهد و میرزاخانی و همکارانش نشان داده‌اند

بستار هر ژئودزیک مختلط، یک زیرچندگونای جبری $V = \overline{F(\mathbb{H})}$ است.

چنین نتیجه عمیقی- پس از این قضیه صلبیت، قبلاً، فقط برای $g = ۲$، و با محدودیت‌هایی روی F، [Mc] معلوم گردیده بود. (در حالت گونای ۲، V، می‌تواند یک خم به طور طول‌پای غوطه‌ور شده، رویه مدولار هیلبرت، یا کل فضای $\mathcal{M}_2$ باشد).

دینامیک روی فضای مدولی. اثبات قضیه این صلبیت، مستلزم عمل طبیعی $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ روی بافه کره،

$$Q_۱\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

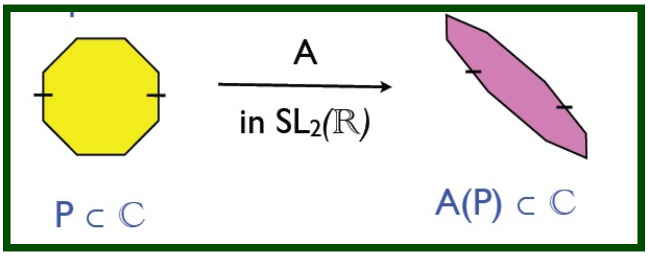
متشکل از زوج‌های (X, q)، با $q \in Q(X)$ و $\| q \| = ۱$ است.

برای توصیف این عمل، رویه $X = P/\sim$، نمایش داده شده به صورت فضای خارج قسمتی یک چندضلعی $P \subset \mathbb{C}$، تحت یکی‌سازی یال طول‌پای، بین زوج اضلاع موازی، را درنظر بگیرید. چنین یکی‌سازی‌ای، فرم دیفرانسیلی درجه دوم $\mathrm{d}z^۲/P$ را حفظ می‌کند، بنابراین یک مدل چندضلعی برای X، درواقع یک زوج $(X, q) \in Q\mathcal{M}_g$ با $\| q \| = \mathrm{area}(P)$ را تعیین می‌کند. برعکس، هر فرم دیفرانسیلی غیرصفر درجه دوم $(X, q) \in Q\mathcal{M}_g$، می‌تواند به این شکل نمایش داده شود.

چون $\mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$، به طور خطی روی $\mathbb{R}^۲ \cong \mathbb{C}$ عمل می‌کند، برای $A \in \mathrm{SL}_۲(\mathbb{R})$ داده شده، یک چندضلعی جدید $A(P) \subset \mathbb{C}$ را تشکیل می‌دهیم، و از یکی سازهای یالی متناظر برای تعریف

$$A.(X, q) = (X_A, q_A) = (A(P), \mathrm{d}z^۲)/\sim$$

استفاده می‌کنیم.



شکل ۱:یکی گرفتن یال‌ها

توجه داشته باشید که اگر $A \in \mathrm{SO}_۲(\mathbb{R})$ آنگاه $[X_A] = [X]$. به‌این ترتیب نگاشت $A \mapsto X_A$، تقلیل می‌یابد تا نگاشت

$$F : \mathbb{H} \cong \mathrm{SO}_۲(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_۲(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

را که ژئودزیک مختلط تولید شده توسط (X, q) است، را به دست دهد.

اثبات این‌که $\overline{F(\mathbb{H})} \subset \mathcal{M}_g$ یک چندگونای جبری است، مستلزم استفاده از سه قضیه زیر است، که هریک از آنها، به خودی‌خود، یک دستاورد اساسی به حساب می‌آیند.

(۱) طبقه‌بندی اندازه (اسکین و میرزاخانی). هر اندازه احتمالاتیِ $\mathrm{SO}_۲(\mathbb{R})$–پایا و ارگودیک روی $Q\mathcal{X}$، از اندازه اقلیدسی روی یک زیر چندگونای تحلیلی مختلط خاص $A \subset Q\mathcal{M}_g$ به دست می‌آید (چندگونای A در مختصات تناوبی، خطی است).

این عمیق‌ترین مرحله اثبات قضیه است، برای این‌کار، گستره

[6] برای یک رویه X، که مجهز به یک متریک هذلولوی است، یک تورق، یک زیر مجموعه بسته، متشکل از اجتماعی از ژئودزیک‌های ساده جدا ازهم است. م.

[5] laminations [7] cob web

وسیعی از تکنیک‌ها از جمله اندازه‌های شرطی و استدلالی مبتنی برگام‌زدن‌های تصادفی، ملهم از کار بنواس و کوینت را به کار می‌گیرند.

(۲) رده‌بندی توپولوژیک (اسکین، میرزاخانی و محمدی). بستار هر $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$–مدار در Q_1X توسط $A \cap Q_1X$، برای یک زیرچندگونای تحلیلی خاص A، داده می‌شود.

(۳) ساختار جبری ([Fil]). هر زیرچندگونای تحلیلی خاص، درواقع یک زیرچندگونای جبری $Q\mathcal{M}_g$ است. بنابراین تصویرش به‌روی $\mathcal{M}_g$، یعنی $V = \overline{F(\mathbb{H})}$، نیز یک زیرچندگونای جبری است.

نگاه کنید به [EM]، [EMM] و [Fil].

پی‌آمدها: در ورای فضاهای همگن. این خانواده از نتایج، آشکار می کند که نظریه دینامیک روی فضاهای همگن، گسترش داده شده توسط مارگولیوس، راتنر و دیگران، بازتاب‌های مشخصی در دنیای شدیداً غیرهمگن، اما به همان اندازه با اهمیت، فضاهای مدولی دارد.

پیش زمینه لازم برای دینامیک همگن، گروه‌های لی است. برای یک مشبکه مفروض Γ در یک گروه لی G، و زیرگروه لی H از G، فرد می‌تواند عمل

$$H \rightsquigarrow G/T$$

را از طریق ضرب از چپ درنظر بگیرد، درست همانطور که در شرایط فضاهای مدولی عمل

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow Q_1\mathcal{T}_g/\mathrm{Mod}_g$$

را درنظر گرفتیم. یکی از قدرتمندترین نتایج در دینامیک همگن، قضیه راتنر است. این قضیه ایجاب می‌کند که اگر H توسط عناصر تک‌توان [8] تولید شده باشد، آنگاه بستار هرمدار $\overline{Hx} \subset G/T$ یک زیرمنیفلد خاص است ـ در واقع، این مدار به شکل

$$\overline{Hx} = Jx \subset G/T$$

برای یک زیرگروه J، با $H \subset J \subset G$ است. گزاره‌ای مشابه برای اندازه‌های پایا برقرار است. چون $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ توسط عناصر تک‌توان (ماتریس‌هایی به صورت $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وترانهاده آنها) تولید شده است، فرد ممکن است انتظارداشته باشد روایتی از قضیه راتنر برای فضاهای مدولی برقرار باشد. این آن چیزی است که دستاورد میرزاخانی آن‌را تایید می‌کند.

نظریه هاج درمقابل هندسه. برای گشودن چشم‌اندازی دیگر، به یاد آورید که $\mathcal{M}_g$ درفضای مدولی چندگوناهای آبلی $\mathcal{A}_g = \mathfrak{H}_g/\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$، یک فضای موضعاً متقارن، پذیرای روش‌های دینامیک همگن، نشانیده می‌شود. اما ژئودزیک‌های مختلط در $\mathcal{M}_g$، وقتی در $\mathcal{A}_g$ نگاشته می‌شوند، ناهمگن می‌شوند. بنابراین، آنها نمی‌توانند با این روش‌ها آنالیز شوند. کار میرزاخانی نشان می‌دهد که فرد می‌تواند از طریق آنالیز هندسی روی خود رویه‌ها، به طور مستقیم روی $\mathcal{M}_g$ کار کند تا با $\mathcal{A}_g$.

پیامدها: بیلیاردها. عمل $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ روی $Q_1\mathcal{M}_g$، با نظریه بیلیاردها در چندضلعی‌ها در ارتباط است، یک شاخه مقدماتی دینامیک، که مملو است ازمسائل دشوار.

فرض کنید $T \subset \mathbb{C}$، یک چندضلعی همبند با زاویه‌هایی در $\pi\mathbb{Q}$ باشد. رفتار مسیرهای بیلیارد در T، با رفتار ژئودزیک‌های تولید شده توسط یک‌فرم دیفرانسیلی درجه دوم (X, q)، به‌دست آمده از «باز کردن» جدول T، درارتباطی تنگاتنگ قرار می‌گیرد.

در واقع، اولین مثال‌ها از ژئودزیک‌های مختلط، هم‌چون $V = \overline{F(\mathbb{H})} \subset \mathcal{M}_g$، یک خم جبری است. یعنی، سایه ژئودزیک مختلط، تاجایی که ممکن باشد، کوچک است این نتیجه توسط ویچ، در آنالیزش روی بیلیاردها در چندضلعی‌های منتظم، به دست آمده است. در این حالت، پایدار ساز فرم دیفرانسیلی درجه دوم وابسته، یک مشبکه $\mathrm{SL}(X, q) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ است که به عنوان گروه باز به‌هنجارش برای شارش بیلیارد اصلی عمل می کند.

کارهای میرزاخانی، با چندین حدسیه باز در حوزه دینامیک بیلیاردها مرتبط می‌گردد. برای مثال، این کارها، پیشرفت‌هایی در مساله بازِ نشان دادن این‌که برای هر جدول T، یک عدد جبری C_T وجود دارد به طوری که تعداد $N(T, L)$ نوع‌های اولیه، متناوب مسیرهای بیلیارد در T از طول کمتر یا مساوی L در

$$N(T, L) \sim \frac{C_T L^2}{\pi\ \mathrm{area}(T)}$$

صدق می‌کند، به وجود آورده‌اند. اسکین و میرزاخانی نشان داده‌اند که این حدسیه، پس از میانگین‌گیری روی L و این‌که C_T می‌تواند تنها تعداد شمارش‌پذیری مقدار بگیرد، درست است.

[8] unipotent

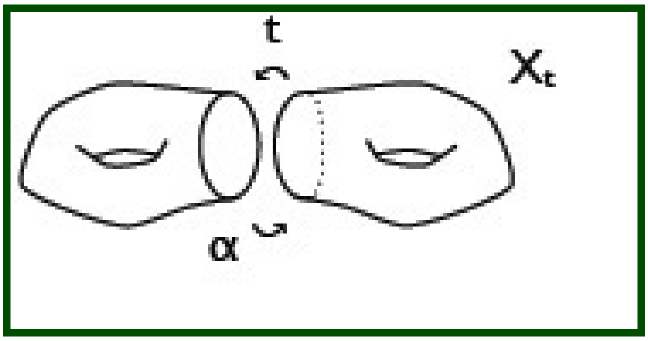
دینامیک زلزله‌ها

این بحث را با کار میرزاخانی روی شارش زلزله و یک ارتباط اندازه‌پذیر بین جنبه‌های هم‌تافته و تمام‌ریخت $\mathcal{M}_g$، به پایان می‌رسانیم.

یک روش ساختن رویه‌ای جدید از یک رویه مفروض، روش کلاسیک فنشل-نیلسن است که به یک ژئودزیک بسته $\gamma \subset X \in \mathcal{M}_g$ و $t \in \mathbb{R}$ یک رویه ریمان جدید

$$X_t = \mathrm{tw}_{t\gamma}(X) \in \mathcal{M}_g$$

وابسته می‌کند، که این رویه از برش دادن X در امتداد γ، تاباندن آن به اندازه طولی برابر t به سمت راست و سپس چسباندن آن، به دست می‌آید. مسیر تابانده شده حاصل در $\mathcal{M}_g$، متناوب است، یعنی اگر γ، دارای طول L باشد، آنگاه $X_{t+L} = X_t$.



شکل۲: برش رویه اولیه برای ساختن رویه جدید

از طرف دیگر، می‌توان قسمت بریده شده را درامتداد حدهای ژئودزیک ساده موزون، موسوم به تورق‌های اندازه‌دار، تاباند. همان‌طور که توسط ترستن نشان داده شده، فضای تورق‌های اندازه‌دار یک منیفلد پاره‌پاره خطی $\mathcal{ML}_g \cong \mathbb{R}^{6g-6}$ با یک فرم حجمی طبیعی، و تاباندن‌های حدی، موسوم به زلزله‌ها، تعریف شده برای تمام زمان‌ها، تشکیل می‌دهند.

زلزله‌ها، یک ویژگی طبیعی هندسه هم‌تافته فضای مدولی هستند. در حالی که آنها می‌توانند به طورهندسی توسط شکستگی و منظم کردن X در امتداد (در صورت امکان برخال) محمل $\lambda \in \mathcal{ML}_g$ تعریف شوند، آنها همچنین به طور متعارف‌تری به عنوان شارش‌های همیلتونی وابسته به توابع $Y \mapsto \mathrm{lenght}(\lambda, Y)$ ظاهر می‌شوند.

شارش زلزله روی بافه $\mathcal{M}_g$ تورق‌های به طول واحد روی $L_1\mathcal{M}_g$ قراردارند. میرزاخانی نشان داده است که، برحسب اندازه طبیعی روی $L_1\mathcal{M}_g$:

شارش زلزلهِ ترستن ارگودیک است.

قبل از این نتیجه، دینامیک زلزله‌ها، کاملاً تار و مبهم به‌نظر می‌آمد. حتی یک مثال از یک مسیر زلزله چگال در $\mathcal{M}_g$ دردست نبود، حالا می‌توانیم ادعا کنیم که تقریباً هر مسیر زلزله چگال است و به طور یکنواخت توزیع شده.

پل بستن روی شکاف همتافته/تمام‌ریخت . اثبات ارگودیک بودن شارش زلزله از یک ارتباط قابل توجه بین جنبه‌های هم‌تافته و تمام‌ریخت فضای مدولی بهره می‌برد.

به‌طور دقیق‌تر، به‌یاد آورید که شارش دایره‌زمانی روی $Q_1\mathcal{M}_g$ به‌وسیله عمل گروه یک پارامتری

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

تعریف شده‌است. براساس ایده‌هایی از نتایج ترستن روی نگاشت‌های کش‌سان، میرزاخانی نشان می‌دهد یک نگاشت حافظ اندازه $\beta : L_1\mathcal{M}_g \longrightarrow Q_1\mathcal{M}_g$ وجود دارد که شارش زلزله را روی شارش دایره زمانی منتقل می‌کند. به عبارت دیگر، نمودای جابه‌جایی به‌صورت زیر داریم.

$$\begin{tikzcd} \text{شارش زلزله} \circlearrowright L_1\mathcal{M}_g \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & Q_1\mathcal{M}_g \circlearrowleft \text{شارش دایره‌زمانی} \arrow[d] \\ \mathcal{M}_g & \mathcal{M}_g \end{tikzcd}$$

اما به‌خوبی معلوم شده است که شارش دایرهِ زمانی روی $Q_1\mathcal{M}_g$ ارگودیک است (این یک نتیجه صوری ارگودیک بودن شارش ژئودزیک است [Zim، قضیه ۲.۴.۲] .) به‌این‌ترتیب، همین نتیجه برای شارش زلزله نیز برقرار است[Mir5] . (اثبات صلبیتی از نوع راتنر برای این شارش‌ها، یک مساله حل‌نشده است.)

خلاصه. پژوهش‌های میرزاخانی، بسیار اصیل و خلاقانه هستند و حوزه وسیعی از شاخه‌های ریاضی-از جمله هندسه هم‌تافته و جبری، توپولوژی از بعد پایین، و فرایندهای تصادفی را درهم تنیده و یک پارچه کرده است. دستاوردهای اساسی او، چشم‌انداز ما از فضاهای مدولی را تغییر داده است و ما را به سمت مرزهای ریاضی رهنمون کرده است و در این حوزه، هنوز پیشرفت‌های چشمگیری درحال نمایان شدن هستند.

مراجع

[BQ] Y. Benoist and J. F. Quint, *Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogénes*, Annals of Math., **174** (2011), 1111–1162.

[EM] A. Eskin and M. Mirzakhani, *Invariant and stationary measures for the* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *action on moduli space*, Preprint, 2/2014.

[EMM] A. Eskin, M. Mirzakhani, and A. Mohammadi *Isolation, equidistribution, and orbit closures for the* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *action on moduli space*, Annals of Math., (2) **182** (2015), no. 2, 673–721.

[Fil] Simion Filip, *Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds*, Ann. of Math. (2) **183** (2016), no. 2, 681–713.

[Mc] C. McMullen, *Dynamics of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *over moduli space in genus two*, Annals of Math. **165** (2007), 397–456.

[Mir1] M. Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil–Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Inv. math. **167** (2007), 179–222.

[Mir2] M. Mirzakhani,*Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli spaces of curves*, J. Amer. Math. Soc. **20** (2007), 1–23.

[Mir3] M. Mirzakhani, *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*, Annals of Math. **168** (2008), 97–125.

[Mir4] M. Mirzakhani,*Growth of Weil–Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus*, J. Differential Geom. **94** (2013), 267–300.

[Mir5] M. Mirzakhani, *Ergodic theory of the earthquake flow*, Int. Math. Res. Not. (2008), Art. ID rnm116, 39 pp.

[Mir6] M. Mirzakhani and P. Zograf, *Towards large genus asymtotics of intersection numbers on moduli spaces of curves*, Geom. Funct. Anal. **25** (2015), no. 4, 1258–1289..

[Zim] R. Zimmer, *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Birkhäuser, 1984.

کرتیس مک مولن، استاد دانشگاه هاردوارد

*دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی