حل مسأله کادیسون ـ سینگر

دانا مکنزی

برگردان: شیرین حجازیان *

نشانی مقاله:
Dana Mackenzie, Kadison-Singer Problem Solved, SIAM News, Vol.47, Number 1, 2014.

بهترین نوع مسأله ریاضی چیست؟ آیا مانند یک قله است که مردم را از اطراف و اکناف برای صعود به خود جذب می‌کند فقط «به این دلیل که آنجاست؟» و یا مانند یک رودخانه جاری زیرزمینی است که حوزه‌های مختلف ریاضی را به هم مربوط می‌کند و زمانی که اصلاً انتظارش را ندارید روی زمین ظاهر می‌شود. طرفداران هر یک از این دو نوع مسأله مثال‌های خوبی دارند ولی در سال ۲۰۱۴ نوبت یکی از رودخانه‌های زیرزمینی حیرت‌انگیز بود که در دیدرس قرار گیرد. در ماه ژوئن ۲۰۱۴ یک تیم سه نفره از ریاضی‌دانان و متخصصین علوم کامپیوتر برهانی را برای حدس کادیسون ـ سینگر (که گاهی برای دقت بیشتر مسأله کادیسون ـ سینگر نامیده می‌شود) منتشر کردند. مسأله‌ای که منشاء آن در بلندی‌های دست نیافتنی نظریه C^*جبرها و فیزیک کوانتوم قرار دارد ولی در دهه‌های ۱۹۹۰ و ۲۰۰۰ در جاها ی دیگری شروع به ظهور نمود. این مسأله پیش از آن که فرمول‌بندی به نظر ساده‌تری از آن در بعد متناهی ارائه شود، حوزه‌های نظریه عملگرها، آنالیز مختلط، نظریه گراف و پردازش سیگنال را در نور دیده بود.

دن اسپیلمن استاد علوم کامپیوتر دانشگاه ییل می‌گوید که به صورت تصادفی به مسأله کادیسون ـ سینگر علاقه‌مند شد. او در سال ۲۰۰۹ به همراه دو تن از دانشجویان سابقش، ینخیل سریواستاوا و جاشوا باتسون، مقاله‌ای در موضوع تنک کردن گراف‌ها منتشر کردند. گراف‌ها در این حوزهٔ کاری همان شبکه‌ها هستند که در بیشتر اوقات بسیار بزرگ و تا حدی تصادفی می‌باشند. یک مثال خوب اینترنت و فیسبوک است. متخصصین نظریه گراف برای درک شبکه‌ها سؤالاتی مانند این می‌پرسند: خوشه‌ها چه هستند؟ اگر یال‌ها دارای فاصله یا وزن باشند کوتاه‌ترین مسیر برای رسیدن به یک گره کدام است (مسأله فروشنده دوره گرد). این‌ها برای یک شبکه چگال با یک تعداد بزرگ از گره‌ها و تعداد بسیار بزرگتری (متناسب با N^2) از اتصال‌ها، سؤالات بسیار سختی هستند.

در برخی کاربردها، بسیار مفید خواهد بود اگر بتوان یک شبکه چگال را با شبکه‌ای ساده‌تر (یعنی شبکه‌ای که تعداد اتصالات آن متناسب با N باشد) ولی با ساختار مشابه تقریب زد.

یکی از ابزارهای متداول برای اندازه‌گیری تشابه گراف‌ها، طیف عملگر لاپلاس گراف است که این مفهوم فرم گسستهٔ عملگر لاپلاس دیفرانسیلی است که ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان برای دو قرن به‌منظور توصیف اشیا در صفحه، فضا و ابعاد بالاتر به کار برده‌اند. مسأله کلاسیک «شنیدن شکل یک طبل» (کنایه از آن که صدای طبل چگونه شکل آن را آشکار می‌سازد)، این سؤال را مطرح می‌کند که مقادیر ویژه (طیف) عملگر لاپلاس در مورد شکل فضا چه چیز را آشکار می‌کند؟ به‌طور مشابه هدف از تنک‌سازی، ساختن شبکه‌ای است که شبیه به شبکه دیگری «به گوش می‌رسد» ولی بسیار ساده‌تر است.

تقریب‌های تنک یک «گراف کامل»، یعنی یک شبکه با N رأس که در آن هر رأس به راس دیگر متصل است، مدت‌ها قبل شناخته شده بود. این تقریب‌ها به طرزی باور نکردنی در علوم کامپیوتر و مهندسی به کار رفته‌اند. به عنوان مثال، از آن‌ها برای ساختن کدهای تصحیح خطا، توابع هاش برای رمزنگاری و تولید اعداد شبه تصادفی استفاده شده است. اسپیلمن، سریواستاوا و باتسون این نتیجه را برای اثبات وجود تقریب‌هایی برای هر گراف دلخواه تعمیم داده بودند؛ ولی سودمندی نتیجه آن‌ها به دلیل آن که قادر نبودند وزن یال‌ها را کنترل کنند، محدودیت داشت.

وقتی اسپیلمن، جیل کالایی از دانشگاه عبری اورشلیم را در جریان کار خود قرار داد، کالایی اظهار داشت که قضیه آن‌ها بسیار شبیه به صورتی از مسأله کادیسون ـ سینگربه نظر می‌رسد. در واقع اگر حدس کادیسون ـ سینگر درست باشد اسپیلمن و همکارانش کنترلی بر وزن یال‌ها خواهند داشت که پیش از آن ممکن نبود. چند ماه بعد آدام مارکوس وارد دانشگاه ییل شد. یک دانشجوی دکتری تازه وارد که در جستجوی پروژه‌ای برای کار بود. اسپیلمن مسأله کادیسون ـ سینگر را به وی پیشنهاد داد که مارکوس را بسیار هیجان‌زده کرد. این دو نفر با همکاری سیرواستاوا که اکنون در یک پژوهشکده مایکروسافت در هندوستان کار می‌کرد، شروع به کار کردند. آن‌ها کوچکترین تصوری از این که رسیدن به یک جواب می‌تواند پنج سال به طول انجامد، نداشتند ولی اسپیلمن می‌گوید که این سال‌ها بسیار پربار بود و ما همواره حس می‌کردیم که در حال پیشرفت هستیم. درست مانند یک بازی کامپیوتری که فقط آن‌قدر اطلاعات در اختیارتان می‌گذارد تا بتوانید روی آن کار کنید.

صورت اصلی مسأله کادیسون ـ سینگر با نظریه گراف بسیار نامربوط به نظر می‌آمد. آن‌چه ریچارد کادیسون و ایزادور سینگر

در سال ۱۹۵۹ پرسیدند این بود که آیا «حالت‌های سره» روی جبرهای فون نویمان جابه‌جایی را می‌توان به حالت‌های سره روی جبرهای ناجابه‌جایی توسیع داد؟ توضیح این سؤال به زبان ساده تقریباً مشکل است ولی بگذارید کمی آن را مورد کنکاش قرار دهیم. عناصر یک جبر فون نویمان را می‌توان به عنوان ماتریس‌هایی با ابعاد نامتناهی در نظر گرفت. این‌ها در فیزیک کوانتوم، کمیت‌های مشاهده پذیری مانند موقعیت، تکانه و اسپین هستند. یک حالت، تابعی روی این ماتریس‌ها است. در فیزیک می‌توانیم آن را احتمال این که در زمان اندازه‌گیری به مقدار معینی از کمیت موردنظر دست یابیم، تصور کنیم. وقتی جبر جابه‌جایی است، ماتریس‌ها متناظر با مشاهده‌پذیرهایی هستند که می‌توانند به‌طور همزمان اندازه‌گیری شوند. ولی بنا بر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، برخی مشاهده‌پذیرها مانند موقعیت و سرعت را نمی‌توان به‌طور همزمان اندازه‌گیری کرد. این‌ها متناظر با ماتریس‌هایی هستند که جابه‌جا نمی‌شوند.

کادیسون و سینگر این پرسش را مطرح کردند که آیا می‌توان نوع خاصی از حالت را که روی یک مجموعه جابه‌جا شونده از ماتریس‌ها تعریف شده به‌طور یکتا به یک مجموعه نا جابه‌جایی بزرگتر توسیع داد؟ به زبان فیزیک: آیا رشته‌ای از اندازه‌گیری‌های یک مشاهده‌پذیر می‌تواند سایر مشاهده‌پذیرها را که قابل اندازه‌گیری همزمان با آن نیستند، به‌طور یکتا مشخص کند؟

البته جزئیات تکنیکی باید مورد بررسی قرار گیرند. نیک ویور از دانشگاه واشنگتن در سنت لوئیز می‌گوید «صحبت از حالت‌های غیرنرمال است، حالت‌های غیرفیزیکی که وجود آن‌ها تنها به اصل انتخاب وابسته است (اصل انتخاب یک فرض مشهور است که اغلب منجر به نتایج بسیار غیرشهودی می‌شود ولی در عین حال برای استدلال در مورد ابعاد نامتناهی غیر قابل اجتناب است). برای حالت‌های «نرمال» که واقعاً امکان دارد در یک آزمایش فیزیکی مشاهده شوند، پاسخ به سؤال کادیسون و سینگر همان‌گونه که خودشان ثابت کردند، مثبت است. در عین حال گمان آن‌ها بر این بود که پاسخ برای حالت‌های غیرنرمال منفی باشد ولی در واقع با یک آینده‌نگری هوشمندانه آن را به عنوان یک حدس عنوان نکردند و همان‌طور که معلوم شد گمان آن‌ها نادرست بوده است.

این مسأله در شکل اولیه خود در بین متخصصین جبرهای عملگری مورد توجه بسیاری قرار گرفت ولی برای دیگران بسیار دور از دسترس بود. به هر حال در حدود سال ۱۹۷۹ رودخانه زیرزمینی شروع به بالا آمدن در مکان‌های مختلف و با نام‌های مختلف کرد: حدس پیوینگ، حدس بورگین ـ زافریری و حدس فایختینگر. ریاضی‌دانانی که این مسائل را مطرح می‌کردند اغلب از یکدیگر با اطلاع نبودند تا این‌که در سال ۲۰۰۶ پیترکاساتزا از دانشگاه میسوری به همراه سه ریاضی‌دان دیگر همه آن‌ها را در کنار یکدیگر قرار داد. او می‌گوید «ما به دنبال صورت‌های معادل مسأله کادیسون ـ سینگر نبودیم بلکه سعی در حل آن داشتیم و به این منظور در حوزه‌های مختلف پژوهشی جستجو می‌کردیم به امید آن که یکی از آن‌ها شامل نتایج به قدر کافی عمیقی باشد که منجر به حل مسأله شود. ولی از قضای روزگار به هر حوزه‌ای از پژوهش که وارد می‌شدیم این مسأله معادل با مشهورترین مسأله حل نشده آن‌ها بود».

اما رودخانه اندک‌اندک در حال رسیدن به مقصد خود بود. حدس اگر چه ثابت نشد ولی به صورت ساده‌تری بیان شد. یک گام مهم به جلو، کشف صورت‌های معادل متناهی البعد مسأله بود. یکی از صورت‌های مورد علاقه کاساتزا، صورتی بود که با مجموعه‌های متناهی از بردارها به نام «قاب» سروکار داشت. دانشجویان درس جبرخطی در دوره کارشناسی یاد می‌گیرند که هر «قاب یکا متعامد» از بردارها مانند $(v_1, v_2, \cdots v_n)$ می‌تواند برای بازیابی یک بردار در یک فضای N ـ بعدی به‌صورت زیر مورد استفاده قرار گیرد:

$$x = (x.v_1)v_1 + (x.v_2)v_2 + \cdots + (x.v_N)v_N$$

در واقع، دسته‌های متعددی از بردارها، با تعداد بسیار بیشتر از N، هم قادر به بازیابی x از طریق همین فرمول هستند: در برخی حالات دقیقاً و در برخی تقریباً.

اگر بردار x را یک سیگنال فرض کنیم، قاب‌ها بازیابی را از بین یک مجموعه نامرتبط از داده‌ها ممکن می‌سازند. حال پرسشی که مطرح می‌شود این است: اگر اطلاعات در حین تبدیل شدن از دست بروند چه خواهد شد؟ آیا می‌توان x را به وسیله زیرمجموعه‌های قاب بازیابی کرد؟ حدس کادیسون ـ سینگر می‌گوید: بله. هر قابی قابل افراز به قاب‌های کوچکتر است، با کران‌های یکنواختی برای تعداد قاب‌های کوچکتر و برای خطا.

در سال ۲۰۱۳ اسپیلمن، مارکوس و سریواستاوا حدسی بسیار مرتبط از ویور را ثابت کردند که با افراز یک مجموعه از بردارها به دقیقاً دو مجموعه متوازن سر و کار دارد و مسألهٔ کادیسون ـ سینگر را نتیجه می‌دهد. شرط توازن این‌گونه معنی می‌شود که بزرگترین ریشه یک چندجمله‌ای معین کمتر از ۰.۹ (یا یک مقدار ثابت کمتر از ۱) خواهد بود. در واقع، اسپیلمن و گروهش نشان دادند که بزرگترین ریشهٔ چندجمله‌ای «متوسط» یک خانواده از چندجمله‌ای‌ها، روی تمام افرازهای ممکن، کمتر از ۰.۹ است.

اسپیلمن می‌گوید «فرض کنید بگوییم یک خانواده متوسط ۲.۵ بچه دارد. اگر یک خانواده متوسط ۲.۵ بچه داشته باشد، آنگاه می‌دانیم که برخی خانواده‌ها ۲ یا تعداد کمتری بچه دارند. به

این قیاس ممکن است این گونه فکر کنیم که اگر تمام ریشه‌های چندجمله‌ای متوسط برای تمام افرازهای ممکن کمتر از ۰٫۹ باشد، آنگاه حداقل یک چندجمله‌ای با این خاصیت وجود دارد». در واقع، این همان چیزی بود که اسپیلمن و گروهش در آغاز به آن فکر می‌کردند. ولی او می‌گوید «این یک اشتباه بود». هیچ رابطه کلی بین ریشه‌های چندجمله‌ای متوسط یک خانواده از چندجمله‌ای‌ها و ریشه‌های هر یک ار آن‌ها وجود ندارد. اما این گروه کشف کرد که در یک حالت خاص این ریشه‌ها مرتبطند ـ یعنی وقتی که ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها «درهم آمیخته‌اند». این پژوهشگران ناچار بودند که نظریه چندجمله‌ای‌های درهم آمیخته را از بنیان بسازند، ولی به گفته اسپیلمن «این کار سرانجام به آنان اجازه داد که با استفاده از متوسط در مورد موارد جداگانه نظر دهند».

این نتیجه خلاقانه به سرعت در نظریه گراف به کار برده شد. به عنوان مثال، نیک هاروی از دانشگاه بریتیش کلمبیا نشان داد که یک رهیافت مطمئن برای حل مساله فروشنده دوره گرد یافتن «درخت‌های نازک بهینه» برای یک گراف مفروض است. این‌ها زیرگراف‌های تنک فاقد حلقه هستند. قضیه کادیسون ـ سینگر ثابت می‌کند که درخت‌های بهینه‌ای وجود دارند که از دیدگاه طیف لاپلاس تقریب‌های خوبی به نظر می‌رسند. اگر این «درخت‌های بهینه طیفی» قابل تبدیل به درخت‌های نازک بهینه باشند، آنگاه گام بلندی در حل مسأله فروشنده دوره‌گرد برداشته شده است (تأکید می‌کنیم که این یک «اگر» بزرگ است). این نتیجه می‌تواند در پردازش سیگنال هم کاربرد داشته باشد. اگر گوشی همراه شما ۲۰ سال دیگر بهتر از امروز کار کند، ممکن است سپاسگزار کادیسون و سینگر (و همچنین اسپیلمن، مارکوس وسریواستاوا) باشید. ولی چالش سختی وجود دارد که بایستی تا آن زمان بر آن فائق آمد. برهان ساختاری نیست، به این معنی که دستورالعملی برای محاسبه افرازهای متوازن یا اشیا دیگری معادل آن‌ها که مشهود باشند، را ارائه نمی‌دهد. اسپیلمن می‌گوید «تبدیل این برهان به یک الگوریتم به‌طور نمایی زمان می‌برد.» به بیان دیگر، به‌عنوان یک روش جستجوی عملی این برهان چیزی بهتر از روش آزمون و خطا نیست. در سال‌های آینده این پروژه‌ای عظیم برای متخصصین علوم کامپیوتر خواهد بود تا این قضیه وجودی نظری را به یک ابزار عملی برای مهندسین بدل سازند. به گفته کاساتزا «سرانجام این مهندسین هستند که در مورد ارزش عینی این نتیجه تصمیم خواهند گرفت».

---

* دانشگاه فردوسی مشهد

الگوریتمی شگفت انگیز
که بن بستی سی ساله را گشود

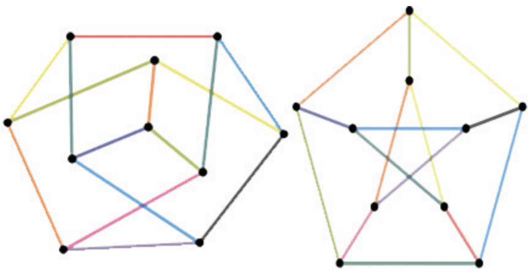
دانشمندان علوم کامپیوتر از الگوریتمِ سریع جدیدی صحبت می‌کنند که برای حل یکی از مسائله‌های بنیادیِ این حوزه ارائه شده

اریکا کلاریچ

برگردان: علی نوروزی و سعید علیخانی *

ویراستار: حسن حقیقی **

نشانی مقاله:
Erica Klarich, Landmark Algorithm Breaks 30-Year Impasse, Quanta Magazine, December 14, 2015,



سؤال «یکریختی گراف» صرفاً می‌پرسد آیا دو شبکه ظاهراً متفاوت واقعاً یکسان هستند.

یکی از دانشمندان علوم کامپیوتر، الگوریتمی ارائه کرده است که در روشن شدن برخی جنبه‌های نظریه پیچیدگی محاسبه، که موضوع آن، بررسی میزان سختی حل مسائل محاسباتی است، موفقیتی تازه به شمار می‌رود و به همین دلیل مورد استقبال قرار گرفته است. در نوامبر ۲۰۱۵، لازلو بابای (L'asz'ol Babai) از دانشگاه شیکاگو اعلام کرد که یک الگوریتم جدید برای حل مسألهٔ یکریختی گراف‌ها، که یکی از وسوسه‌انگیزترین و مرموزترین مسائل موجود در علوم کامپیوتر می‌باشد، پیدا کرده است. به نظر می‌رسد که این الگوریتم جدید بسیار کارآمدتر از بهترین الگوریتمی است که در سی سال گذشته مورد استفاده قرار می‌گرفته است.

مقالهٔ وی این روزها در سایت پیش چاپ‌های مقالات علمی آرکایو، arXiv.org قابل دسترس است. وی مقالهٔ خود را برای چهل و هشتمین همایش انجمن ماشین‌های محاسب (Association for Computing Machinery's) نیز فرستاده است. برای دهه‌ها، مسألهٔ یکریختی گراف‌ها، جایگاه ویژه‌ای در نظریهٔ پیچیدگی داشته است. در حالی که هزاران مسألهٔ محاسباتی مختلف دیگر به راحتی