

تأملی فلسفی در ریاضیات

مجموعه نه چندان تهی!

حسن فتح‌زاده*

مقدمه: اندکی فلسفه

افلاطون وقتی از یک جوهر^{۱۸} سخن می‌گفت یکی از مهم‌ترین مشخصات آن را وحدت می‌دانست، و این وحدت نه معرفت‌شناختی، که مسلماً هستی‌شناختی و در خود آن بود. بر همین مبنا بود که او می‌توانست از عینیت جوهر سخن بگوید، برخلاف وحدت‌هایی که از سوی ما بر امور کثیرتحمیل می‌شود. یک «درخت»، یک «میخ» و یک «تکه ابر» را نمی‌توان در کنار هم و با هم، در قالب هر روایتی، یک جوهر دانست. به همین دلیل گردایه‌ای مرکب از اجزا تنها هنگامی تشکیل یک جوهر می‌دهند که یک کلیت حقیقی بر آن‌ها حاکم باشد، کلیتی هستی‌شناختی و نه معرفت‌شناختی. برای مثال هزاران قطعه در نظمی دقیق کنار هم قرار می‌گیرند تا یک ماشین پیچیده بسازند. اما وحدت حاکم بر این ماشین وحدتی معرفت‌شناختی و ناظر به کارکرد آن است؛ و این وحدت کارکردی^{۱۹} به قصد و هدف ما ارجاع دارد. هر نظم فیزیکی معنای خود را از یک فاعل شناسا می‌گیرد. از منظری صرفاً فیزیکی میان این ماشین پیچیده و تلنباری از اجسام درهم و برهم هیچ تفاوتی نمی‌توان قائل شد، هر دو به یکسان از قوانین ثابت پیروی می‌کنند و رفتاری پیش‌بینی‌پذیر دارند. بر این مبنا تفاوت میان این ماشین و گردایه «درخت، میخ و تکه ابر» تفاوتی اصیل و واقعی نیست.

اما برخلاف مورد ماشین، در مورد یک گیاه یا حیوان با اجزای بسیاری روبه‌روایم که گویی در کنار هم کلیتی حقیقی را می‌سازند، و این کلیت مستقل از قصد و هدف ما و در خود آن‌ها تحقق می‌یابد. بدین ترتیب سلول‌ها و اندام‌های مختلف از طبیعت متمایز می‌شوند و تشکیل وحدتی هستی‌شناختی می‌دهند که به ما اجازه می‌دهد یک ارگانیسم را جوهر بدانیم. وحدت یک ارگانیسم حقیقی و عینی است. این وحدت، که در اندیشه معاصر معطوف به «دیگری» می‌شود، راه را بر ایده‌های سوفیستی می‌بندد. اندیشمندان یونانی به همین دلیل برای گیاهان و حیوانات وحدتی جوهری قائل بودند که آن را به «پسوخته^{۲۰}» (نفس) نسبت

به پایان می‌رسد. این قضیه از کنووی و پاترسون است (به مقاله [۲] مراجعه کنید). دوم این که برای این قضیه اصلاً مهم نیست که اعداد روی پیشانی مردان و روی تخته اعداد صحیح باشد، و اگر هم بازی با اعداد حقیقی نامنفی انجام شود، همیشه به پایان می‌رسد. اثبات این سخت نیست: مهم‌ترین نکته این است که هر مجموعه S_n یک مجموعه فشرده است. پس اگر فرض کنیم که بازی هیچ وقت به پایان نرسد، آنگاه برای هر n مجموعه S_n تهی نیست. چون $S_n \subset S_{n-1}$ و چون هر S_n فشرده است می‌توان نتیجه گرفت که اشتراک $S = \bigcap_{n \geq 1} S_n$ نیز ناتهی است. ولی کاربرد گزاره ۲ (که برای یک زیرمجموعه فشرده $\mathbb{R}^3$ هم درست است) با این S موجب تناقض می‌باشد. (برای جزئیات به مقاله [۲] مراجعه کنید).

اینک خواننده می‌تواند بپرسد که چه ارتباطی میان معمای اخیر و معمای جزیره موجود است. در اصل معمای جزیره حالتی خاص از این بازی کنووی است: تصور کنید در آن جزیره روی پیشانی افرادی که چشم سبز دارند و روی پیشانی چشم آبی‌ها ۱ نوشته شده باشد. آنچه بیگانه اعلام می‌کند معادل این است که مجموع اعداد روی پیشانی مردم قبيله یکی از اعداد ۱ الی ۱۰۰ است. گذر هر شب به منزله یک دور کامل از بازی تلقی می‌شود.

قدردانی و تشکر.

نویسنده اول علاقه دارد که از دو شخص در پایان این یادداشت سپاسگزاری کند: نخست پروفیسور جان کانووی از دانشگاه پرینستون به خاطر گفتگوی بسیار با ارزش درباره معمای دوم. سپس آقای مهدی شاکری به خاطر آموختن زبان شیرین فارسی به وی.

[1] D. Gale (editor), *Tracking the automatic ANT*, Springer-Verlag, 1998.

[2] M. Lasry, J. M. Morel, S. Solimini, *On knowledge games*, Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, (2. No. 2-3), 1989.

* دانشگاه پرینستون

** دانشگاه تبریز

عناصر یک گردایه باید وحدتی معرفت‌شناختی و ناظر به قصد و هدف ما و بر ساخته ذهن ما باشد. در این دیدگاه نمی‌توان گردایه را جوهری مستقل و امری هستی‌شناختی در نظر گرفت، و به تبع آن نمی‌توان از «گردایه تهی» سخن گفت. طرفه آن که پذیرش نظریه مجموعه‌ها - یا در حالتی ساده، پذیرش «مجموعه تهی» - به معنای پذیرش استقلال و عینیت جهان ریاضیات است؛ یعنی موجودات ریاضیاتی نه قابل فروگاهی به طبیعت‌اند، و نه قابل فروگاهی به قصد و هدف ما. نظریه مجموعه‌ها ریاضیات را بر بنیانی عینی و مستقل از ذهن ما می‌گذارد، و این علم را صاحب قلمرو اصیل و ویژه خودش می‌سازد و به تبع آن امکان معرفت‌بخشی علوم تجربی را نیز می‌گشاید. علوم تجربی بدون این بنیان مطلق و کلی، حتی از عهده توجیه خودشان نیز بر نمی‌آمدند و در نسبی‌گرایی لاعلاجی گرفتار می‌شدند.^{۲۵} بیایید از نزدیک‌تر ببینیم که چرا باید «نظریه مجموعه‌ها» و ایده «مجموعه تهی» را پذیرفت؟

ریاضیات صورت بنیادین علم است و آن‌چه گالیله گفته بود کتاب طبیعت به زبان ریاضیات نگاشته شده است - را کانتور به گونه‌ای گریزن‌پذیر و ماهوی تثبیت کرد. علم چیزی جز وحدت بخشیدن و یافتن ارتباط‌های میان امور کثیر و متنوع نیست؛ نگاهی به تاریخ معرفت، از اسطوره‌های یونان تا اندیشه معاصر، به خوبی این را نشان می‌دهد.^{۲۶} علوم روایت‌هایی معمولاً انتزاعی‌اند که با وحدت بخشیدن به تجربیات متنوع روزمره ما، به آن‌ها معنا می‌بخشند و قابل فهم‌شان می‌سازند. مفهوم «قانون طبیعی» در واقع ما به ازای هستی‌شناختی این ویژگی ماهوی علوم است. علوم نظریه‌های واحد و فراگیر حاکم بر امور کثیراند و ریاضیات به گفته هوسرل در نهایت «نظریه کثرت»^{۲۷} است. ریاضیات، فارغ از این که با چه نوع اموری سروکار داشته باشیم، منطقی وحدت بخشیدن میان کثرت‌ها را بیان می‌کند. این وحدت بخشیدن در قالب مفهوم «مجموعه» بیان می‌شود، امری که وحدت خود را از کلیتی متعلق به عناصر و اجزای خود نمی‌گیرد، بلکه این وحدتی است مستقل و متعلق به خود این مفهوم که به تبع آن بر اعضایش نیز حمل می‌شود. «نظریه مجموعه‌ها» علمی است که بیان می‌کند چگونه کثرت‌ها به شکلی هرمی وحدت‌های بالاتر را می‌سازند و این وحدت‌ها نیز در فرایندی پایگان‌مند (سلسله مراتبی) به نوبه خود وحدت‌های بالاتر خود را بنیان می‌نهند. با نام‌گذاری هر وحدت

می‌دادند، و به تبع آن از «نفس نباتی» و «نفس حیوانی» سخن می‌گفتند.^{۲۱} بار سهمگین این اندیشه در فلسفه ارسطویی بر دوش «صور نوعیه» قرار می‌گیرد؛ صورت‌هایی که ضامن وحدت حقیقی، و بنابراین عینیت موجودات پیرامون ما‌اند. بدین ترتیب ارسطو مرز افلاطونی میان واقعیت و حقیقت را برداشت و به موجودات طبیعی گشاددستانه وحدت و عینیت بخشید. به این معنا مسأله «حقیقت» در طول تاریخ فلسفه به‌طور سنتی به مسأله «وحدت» و «ثبات» گره خورده بود.

نظریه مجموعه‌ها

تفاوت بنیادین «مجموعه»^{۲۲} با یک «گردایه»^{۲۳} این است که متناظر با «مجموعه تهی» چیزی به عنوان «گردایه تهی» وجود ندارد و اگر عناصر یک گردایه را حذف کنیم خود آن گردایه نیز ناپدید خواهد شد. در واقع پذیرش «مجموعه تهی» مستلزم نگرشی افلاطونی است، و این امر اهمیت «افلاطون‌گرایی» را در تاریخ ریاضیات روشن‌تر می‌سازد.

در نظریه مجموعه‌ها هر مجموعه‌ای یک جوهر است. به همین دلیل {درخت، میخ، تکه ابر} یک جوهر است و بنابراین متضمن یک وحدت حقیقی است. این وحدت هر بار به‌طور مجزا و با توجه به اعضای یک مجموعه حاصل نمی‌شود، بلکه این وحدتی است که از سوی خود مفهوم «مجموعه» بر آن تحمیل می‌شود. در واقع وقتی از {درخت، میخ، تکه ابر} حرف می‌زنیم، دیگر سروکارمان با این موجودات طبیعی نیست. در این قلمرو با جواهری متمایز، زیر عنوان مجموعه‌ها، روبه‌روایم که جهان جدید و مستقلی را می‌سازند؛ جهان ریاضیات. البته منظور این نیست که جهان ریاضیات لزوماً موجودیتی مستقل از عقل بشری دارد؛ مسأله مطلق بودن جهان ریاضیات و فروکاست‌ناپذیری آن به نسبت ادراکات ذهنی است. (همین مطلق بودن ریاضیاتی، سر رشته راهنمای افلاطون به ساحت مطلق و کلی «عقل»، در مقابل ساحت نسبی و جزئی «ذهن» بود.) این که «مجموعه» را مفهومی اولیه^{۲۴} در ریاضیات می‌دانیم، به معنای نفی نگرش تجربه‌گرایانه (روان‌شناسی گرایانه) به ریاضیات است. این نگرش، نه تنها با طبیعت‌گرایی کواپن، که حتی با شهودگرایی براوئری نیز قابل جمع نیست. وحدت حقیقی حاکم بر مجموعه‌ها معیاری افلاطونی بر عینیت و اطلاق آن‌ها است. اگر قائل به این وحدت حقیقی نباشیم آنگاه وحدت

^{۲۵} برای آشنایی با یک نمونه درخشان از چنین نقدهایی نک. عبدالکریم رشیدیان، هوسرل در متن آثارش، تهران: نشر نی، ۱۳۸۴ (صص ۸۸-۶۶).
^{۲۶} نگارنده در مقاله‌ای با عنوان «در پاسخ به چرایی» به این مسأله پرداخته است. (نک. پژوهش‌های فلسفی، سال ۹، شماره ۱۶، بهار و تابستان ۱۳۹۴، صص ۱۵۴-۱۳۹).
^{۲۷} Theory of Manifold

^{۲۱} از همین جا می‌توان خطوط کلی استدلالی را ترسیم کرد که به ایده بقای نفس، پس از تلاشی بدن، می‌انجامد
^{۲۲} Set
^{۲۳} Aggregate
^{۲۴} Primitive

به توضیح همین وجه تاریخی ریاضیات است. جهان ریاضی جهانی بسته نیست که روزی موفق به شناخت تمامیت قلمرو آن شویم، شاخه‌ها و نظریه‌های مختلف ریاضیات گشایش و توسعه جهان گشوده‌ای است که تا بی‌نهایت گسترده می‌شود، و این همه از بذر «نظریه مجموعه‌ها» می‌روید. به این معنا «نظریه مجموعه‌ها» زیربنای این ساختمان باشکوه است، در عین حالی که گرایش‌های مختلف رشته ریاضیات چیزی جز تحقیق تاریخی و موردی این زیربنا نیست. این دیدگاه توضیح می‌دهد که چرا ریاضیات زبان علوم است، علومی که در تحلیل نهایی چیزی جز وحدت‌هایی بار شده بر پدیده‌های کثیر و متنوع نیست. بدین ترتیب «مجموعه تھی» ضامن خودبنیادی ریاضیات و بن‌واژه بنیادین زبان علم است.

* دانشگاه زنجان، گروه فلسفه

جدیدی یک مفهوم ریاضی ساخته می‌شود و بدین ترتیب انواع مختلف وحدت‌بخشی، به موجودات متنوع ریاضیات می‌انجامد. پایه‌گذاری نظریه اعداد بر مجموعه تھی نمونه‌ای چشم‌گیر از این ایده است. آن‌چه که به اعداد عینیت می‌بخشد وحدت جوهری مجموعه‌ها است که در مفهوم «مجموعه تھی» متبلور می‌شود.

بدین ترتیب جهانی باشکوه و دقیق از موجودات ریاضیاتی بنا می‌شود که نیازهای فزاینده علوم به انواع نظم و وحدت را برآورده می‌سازد. ریاضی منطق محض و صورت بنیادین آفرینش نظریات علمی است. بی‌جهت نیست که ریاضیات زبان فیزیک مدرن شده است، چرا که ریاضیات علم کثرت محضی است که در قلمروهای مختلف علوم طبیعی مصادیق متفاوت این کثرت موضوع شناخت قرار می‌گیرد. ریاضیات به این معنا ناب‌ترین وجه علم است، «نظریه مجموعه‌ها» کلی‌ترین و بنیادی‌ترین وجه علوم را تشکیل می‌دهد. کتاب طبیعت به زبان مجموعه‌ها نگاشته شده است.

تاریخ ریاضیات

چنان که نشان داده شد ریاضیات صرفاً بازی با نمادهای میان‌تهی نیست، بلکه علمی است که این بازی را ممکن می‌سازد و به خود این بازی معنا می‌دهد و جلوی سقوط آن را در بی‌معنایی و هرج و مرج محض می‌گیرد. گرچه عناصر و قواعد بازی‌ها را می‌توان دل‌بخوانانه تعیین کرد و تغییر داد، اما در نهایت همین امکان نیز مستلزم پذیرش بنیانی برای خود بازی است، بنیانی محکم و قابل اتکا که هر درجه‌ای از آزادی را ممکن می‌سازد. اشتباه صورت‌گرایان این است که ریاضیات را به جای بنیان و شرط امکان این بازی‌ها، هم‌چون خود این بازی‌ها در نظر می‌گیرند. این کانتور بود که ریاضیات را در جایگاه درست خودش نشانند. این اصالت و عینیت ریاضیات، در کنار متنوع و دل‌بخوانانه بودن نظام‌های صوری مبتنی بر آن (روبنای تاریخی آن)، کاربردهای فراوان آن را در تاریخ علم توضیح می‌دهد. به همین دلیل اصالت ریاضیات، در عین عینیت انعطاف‌ناپذیر آن، از درجه آزادی بالایی برخوردار است، و همین امر وجه تاریخی ریاضیات را برمی‌سازد.

گمان می‌شود که اگر ریاضیات نظریه کثرت است، پس باید همانند منطق ارسطویی یک بار برای همیشه تدوین شود و پس از آن کار ریاضی‌دانان صرفاً پرداختن به برخی جزئیات از قلم افتاده آن باشد. در این صورت ریاضیات علمی اساساً غیرتاریخی خواهد بود. چنین دیدگاهی آشکارا با واقعیت‌های تاریخی فراوانی هم‌چون تولد متأخر حساب دیفرانسیل و انتگرال در تعارض است. روابط زیربنا - روبنا، بدان صورت که در ابتدای این بخش گفته شد ناظر

آگهی تشکیل مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران

مجمع عمومی سالانه انجمن ریاضی ایران ساعت ۱۷ روز چهارشنبه ۹۶/۶/۱ در محل برگزاری چهل و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه بوعلی سینا همدان برگزار خواهد شد. از کلیه اعضای محترم انجمن دعوت می‌شود در این جلسه حضور یابند.
دستور جلسه:

- گزارش رئیس انجمن از فعالیت‌های یک ساله
 - ارائه گزارش امور مالی توسط خزانه‌دار انجمن و تصویب ترانزنامه و اعطای مجوز تایید گزارش مالی به شورای اجرایی
 - گزارش بازرس انجمن از پیشرفت امور
 - انتخاب اعضای کمیته انتخابات شورای اجرایی انجمن
 - انتخاب بازرس اصلی و علی‌البدل
 - استماع پیشنهادات اعضای حاضر در جلسه
- توجه: مطابق اساسنامه انجمن تنها اعضای پیوسته انجمن حق رای دارند.