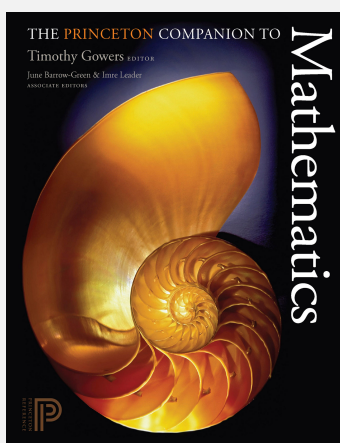




این متن ترجمه مقاله زیر از چند ریاضیدان سرشناس است که در یک مجموعه از انتشارات دانشگاه پرینستون به نشانی زیر آمده است:

“Advice to a Young Mathematician” in “The Princeton Companion to Mathematics” by “T. Gowers, et al.”

این مقاله پیش‌تر در شماره ۲ سال ۱۸ (شماره پیاپی ۳۴) از مجله «نشر ریاضی» و با همت همین مترجم منتشر شده بود. متن موجود ویرایش کاملاً جدیدی از این ترجمه است و منظور از آن عرضه متن هر چه روانتری از یک مقاله ارزنده و خواندنی از چند ریاضیدان بزرگ و معاصر خطاب به ریاضیدانان جوان است.



پیتر سرفاتی



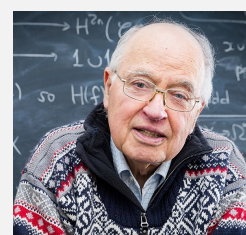
دوسا مک‌داف



آلن وین



بلا بلوباش



سر مایکل آتیا

اندرز به ریاضیدان جوان

سر مایکل آتیا، بلا بلوباش، آلن وین، دوسا مک‌داف، پیتر سرفاتی، ویراستار: تیموئی گاورز
برگردان: بامداد یاحقی*

گونه‌ای از ریاضیات است که به آن پرداخته‌ام، و منعکس‌کننده سبک کاری من است. اما ریاضیدانان از دیدگاه این مشخصه‌ها بسیار گوناگون‌اند و هر کس باید از غریزه خود پیروی کند. از دیگران بیاموز ولی آنچه را که آموخته‌ای به سبک و سیاق خود تعبیر کن. اصالت و ابتکار، از برخی جنبه‌ها، با جدا شدن از روند گذشته آغاز می‌شود.

انگیزه: ریاضیدان پژوهشگر، چون هنرمندی خلاق، باید عاشقانه دلبسته ریاضی باشد و خود را به تمامی وقف آن کند. بدون انگیزه‌های قوی درونی نمی‌توانید موفق شوید، اما اگر از ریاضیات لذت ببرید، احساس خرسندی که می‌توانید از حل مسأله‌های سخت ریاضی به دست آورید بیکران است.

سخت‌ترین سال‌ها، یکی دو سال نخست پژوهش است. مطالب زیادی است که باید بیاموزید. یکی بدون کسب موفقیت با مسأله‌های کوچک درگیر است و دیگری تردیدهایی جدی دارد در اینکه اصلاً بتواند چیزی جالب و دندان‌گیر ثابت کند. من هم

بی‌گمان ریاضیات مهم‌ترین چیزی است که ریاضیدان جوان باید بیاموزد. اما، آموختن از تجربیات ریاضیدانان دیگر هم می‌تواند بسیار با ارزش افتد. از نویسندگان این مقاله خواسته شد که تجربیاتی از زندگی و پژوهش ریاضی‌شان را به تصویر بکشند، و اندرزهایی ارائه دهند، که خود دوست می‌داشتند در آغاز کارشان بشنوند. (عنوان این مدخل اشاره به کتاب آشنای سر پیتر مداور^۱، اندرز به دانشمند جوان، دارد.) حاصل این همکاری‌ها، به هر گونه، همان اندازه جالب بود که انتظار داشتیم. آنچه شگفت‌انگیز می‌نمود این بود که میان این نوشته‌ها به طور چشمگیری همپوشانی کمی وجود داشت. پس، این شما و این پنج در شاهوار برای ریاضیدانان جوان، که بی‌تردید برای ریاضیدانان هر سنی خواندنی و دلپذیر است.

۱ سر مایکل آتیا^۲

هشدار: آنچه در پیش رو است دیدگاهی کاملاً شخصی بر اساس تجربیاتم است، منعکس‌کننده شخصیتم است، منعکس‌کننده

^۱Sir Peter Medawar ^۲Sir Michael Atiyah ^۳Jean-Pierre Serre

می‌کشند ولی بیشتر ریاضیدان‌ها، که کارشان هم حل مسأله و هم گسترش نظریه است، جایی بین این دو دسته قرار می‌گیرند. در واقع، نظریه‌ای که به حل مسأله‌ای ملموس و جالب از نظریه‌ای رهنمون نشود ارزشی ندارد. برعکس، هر مسأله واقعا عمیق گسترش نظریه مربوط به حل آن مسأله را برمی‌انگیزد (قضیه آخر فرما مثالی متعارف از این دست است).

این مطلب چه ربطی به یک دانشجوی تازه‌کار دارد؟ هر چند دانشجو باید کتاب‌ها و مقالاتی را بخواند و مفاهیم و روش‌های کلی (نظریه) را جذب کند، در عمل، باید روی یک یا چند مسأله خاص تمرکز کند. این امر در عین حالی که غذای فکری برای شخص فراهم می‌آورد مایه و توان او را نیز به بوته آزمایش می‌گذارد. مسأله‌ای معین که دانشجو با آن درگیر است و جزئیات آن را درک می‌کند معیاری گرانبهاست که با آن فایده و توانمندی نظریه‌های موجود را می‌سنجد.

بسته به اینکه پژوهش چگونه به پیش رود، پایان‌نامه دکتری در نهایت ممکن است که بخش بزرگی از نظریه مورد استفاده را به کنار گذارد و تنها روی مسأله اساسی تمرکز کند یا اینکه سناریویی را طرح بریزد که در آن مسأله به طور طبیعی جا بگیرد.

نقش کنجاوی: نیروی محرک در پژوهش کنجاوی است. چه وقتی نتیجه خاصی درست است؟ آیا برهان مورد نظر بهترین برهان است، یا اینکه برهانی طبیعی‌تر و زیباتر وجود دارد؟ کلی‌ترین زمینه‌ای که در آن نتیجه مورد نظر برقرار است چیست؟

اگر به هنگام خواندن یک مقاله یا گوش کردن به یک سخنرانی مدام سؤال‌های بالا را از خود پرسید، دیر یا زود کورسویی از پاسخی، یا مسیری احتمالی برای بررسی پاسخ، پدیدار می‌شود. وقتی که این وضع برای من پیش می‌آید، ایده را پی‌گیری می‌کنم تا ببینم به کجا می‌رسد یا اینکه در برابر موشکافی‌ها پا بر جامی ماند یا نه. نه بار از ده بار نتیجه کوچکی بن‌بست از کار در می‌آید، ولی گه‌گاه شخص به معدن طلا برمی‌خورد. مشکل در این است که بدانیم چه وقتی ایده‌ای که نخست نویدبخش و امیددهنده به نظر می‌آید در واقع ره به جایی نمی‌برد. در این مرحله باید جلوی ضرر را گرفت و به مسیر اصلی بازگشت. معمولاً تصمیم قطعی نیست، و در واقع غالباً به ایده‌ای که قبلاً کنار گذاشته‌ام برمی‌گردم و دوباره آن را امتحان می‌کنم.

بر خلاف انتظار، ایده‌های خوب می‌توانند به طوری نامنتظرانه از یک سخنرانی یا یک سمینار بد ریشه بگیرند. اغلب خود را در حال گوش کردن به یک سخنرانی می‌یابم که در آن نتیجه مورد

این تجربه را در دومین سال پژوهشم داشتم، و ژان پی‌یر سیر^۳، شاید برجسته‌ترین ریاضیدان نسل من، به من گفت که او هم در برهه‌ای بر این بود که تسلیم شود.

تنها میان‌مایگان به توانایی‌شان اعتماد بی حد و حصر دارند. هر چه بهتر باشی، استاندارد بالاتری را برای خود قرار می‌دهی — بدین گونه می‌توانی فراتر از نقاط در دسترس را ببینی و دریایی.

بسیاری از ریاضیدانان آینده علائق و استعدادهایی در زمینه‌های دیگری هم دارند. اینان چه بسا که انتخاب سختی بین گام نهادن در حرفه ریاضی یا ادامه و پی‌گیری رشته دیگری در پیش داشته باشند. مشهور است که گاوس^۴ بزرگ در انتخاب بین ریاضیات و زبان‌شناسی تطبیقی دودل بود، پاسکال^۵ در آغاز کار ریاضیات را به خاطر الهیات ترک کرد، در حالی که دکارت و لایبنیتس^۶ به عنوان فیلسوف مشهورند. ریاضیدانانی، چون فری من دایسون^۷، از ریاضیات شروع کردند و به فیزیک پرداختند در حالی که دیگری، چون هاریش چاندر^۸ و رائل بُت^۹، در جهت دیگر حرکت کردند و به ریاضی پرداختند. ریاضیات را نباید به دیده دنیایی بسته بنگری. بده‌بستان بین ریاضیات و دیگر شاخه‌ها هم برای ریاضیدان و هم برای جامعه ریاضی سلامت‌بخش است.

جنبه‌های روانی: به دلیل تمرکز ذهنی زیادی که کار ریاضی لازم دارد، فشارهای روحی، حتی وقتی که کارها به خوبی پیش می‌روند، می‌توانند چشمگیر باشند. بسته به ویژگی‌های شخصی شما این مشکل ممکن است عمده یا ناچیز باشد، ولی می‌توان گام‌هایی برداشت که از این تنش بکاهد. ارتباط با دوستان دانشجوی - رفتن به سخنرانی‌ها، سمینارها، و همایش‌ها - هم افق دید شخص را گسترش می‌دهد و هم پشتوانه مهم اجتماعی برای او فراهم می‌آورد. انزوا و درون‌گرایی بیش از حد می‌تواند خطر آفرین باشد. زمان گذاشته شده برای گفتگوهای ظاهراً بی‌فایده آنقدرها هم به هدر نمی‌رود.

همکاری علمی، در آغاز با دوستان هم‌دوره‌ای یا با استاد راهنما، فایده‌های زیادی دارد، و همکاری درازمدت با همکاران هم از جنبه‌های ریاضی و هم از جنبه‌های شخصی می‌تواند بسیار مثمر ثمر واقع شود. نیاز به تفکر فردی عمیق و آرام همواره وجود دارد، ولی این امر را با بحث و با داد و ستد فکر و اندیشه با دوستان علمی می‌توان به برتری و ترازمندی رساند.

مسأله در برابر نظریه: ریاضیدانان گاهی به دو دسته «مسأله حل کن» و «نظریه پرداز» دسته‌بندی می‌شوند. قطعاً موارد مفرطی مانند اردوش^۷ و گروتندیک^۸، موجودند که این دو دسته را به تصویر

⁴Freeman Dyson ⁵Harish Chandra ⁶Raoul Bott ⁷Paul Erdős ⁸Alexander Grothendieck

چارچوب اساسی را برای اندیشه نوین از دوره پس از نوزایی (رنسانس) فراهم آورده است. ریاضیدانان به قطعیت مطلق در ریاضی در مقام مقایسه با شیوه‌های تجربی علوم طبیعی به خود می‌بالند، چه رسد به تفکرات مغشوش رسته‌های دیگر.

درست است که، از زمان گودل، قطعیت مطلق تضعیف شده است، و یورش کسل‌کننده برهان‌های دراز و بی‌پایان رایانه‌ای اندکی باعث ایجاد بی‌اهمیتی (برهان) شده است. ولی علی‌رغم این همه، برهان نقش اصلی‌اش را در ریاضیات از دست نمی‌دهد، و رخنه‌ای جدی در برهان شما منجر به رد مقاله شما خواهد شد.

ولی اشتباه است اینکه پژوهش در ریاضیات را با فرایند تولید برهان یکی بگیرد. در واقع، می‌توان گفت تمام جنبه‌های خلاقانه پژوهشی ریاضی مقدم بر صحنه برهان است. برای به پیش بردن کنایه (تثاتی) «صحنه برهان»، باید با ایده شروع کنید، طرحی دراندازید، گفتگوها را بنویسید، و دستورالعمل‌های نمایش را فراهم آورید. به حاصل کار می‌توان به دیده «برهان» نگریست، که همان اجرای ایده است.

در ریاضیات، نخست ایده‌ها و مفاهیم، سپس پرسش‌ها و مسأله‌ها می‌آیند. در این مرحله که جستجو برای راه حل‌ها شروع می‌شود، شخص به دنبال شیوه یا راهبردی (استراتژی) می‌گردد. وقتی که خود را قانع کرده باشید که مسأله خوب طرح شده است، و ابزار مناسب را برای انجام کار در دسترس دارید، آنگاه شروع به سخت فکر کردن در باره جزئیات فنی برهان می‌کنید.

بزودی، شاید با یافتن مثال‌های ناقص، ممکن است دریابید که مسأله نادرست تنظیم شده بوده است. گاهی شکافی بین اندیشه شهودی اولیه و تنظیم مسأله موجود است. فرضی نهانی را جا انداخته‌اید، جزئیات فنی را نادیده گرفته‌اید، بر این بوده‌اید که خیلی کلی باشید. در این صورت باید برگردید و تنظیم و صورت‌بندی مسأله را اصلاح کنید. اغراق و نامنصفانه است که بگوییم ریاضیدان‌ها با خدعه و فریب پرسش‌هایشان را طوری طرح می‌کنند که بتوانند به آنها پاسخ دهند، اما بی‌تردید رگه‌ای از حقیقت در این گفته وجود دارد. هنر ریاضیات خوب، در ضمن ریاضیات هنر است، در این است که مسأله را مشخص می‌کند و به آنها می‌پردازد که هم جالب و هم حل‌پذیر هستند.

برهان محصول نهایی بده‌بستانی طولانی بین خیال‌پردازی خلاق و استدلال نقادانه است. بدون برهان برنامه کار ناقص می‌ماند، ولی بدون اندیشه خیال‌پردازانه برنامه هیچ‌گاه کلید نمی‌خورد. اینجا می‌توان تشابهی با کار هنرمند خلاق، مانند

بحث زیباست ولی برهان زشت و پیچیده است. به جای اینکه سعی کنم برهان آشفته را روی تخته سیاه دنبال کنم، سعی می‌کنم باقی وقت را صرف اندیشیدن در باره ایجاد برهانی زیبا و برانده‌تر کنم. معمولاً، ولی نه همیشه، ره به جایی نمی‌برم، اما با این وجود از وقت استفاده بهتری کرده‌ام چرا که به سبک و سیاق خود سخت درباره مسأله اندیشیده‌ام. این روش خیلی بهتر از این است که بی هیچ اراده‌ای به دلایل شخص دیگری فراگوش سپاری.

مثال‌ها: اگر شما، هم‌چون من، چشم‌اندازهای وسیع و نظریه‌های توانمند را ترجیح می‌دهید (تحت تأثیر **گروتندیک** قرار گرفتیم ولی پیرو این سبک نشدم)، لازم است که بتوانید نتایج کلی را با به کار بردن آنها در مورد مثال‌هایی ساده محک بزنید. در گذر سالیان، مجموعه بزرگی از چنین مثال‌هایی، برگرفته از زمینه‌های گوناگونی، ساخته‌ام. اینها مثال‌هایی هستند که با آنها فرد می‌تواند محاسباتی ملموس انجام دهد، مثال‌هایی که گاه‌گاه با دستورهای استادانه پرداخته شده‌اند، مثال‌هایی که به درک نظریه کلی کمک می‌کنند. این مثال‌ها جای پای شما را بر زمین قرص و محکم می‌کنند. جالب است که **گروتندیک** از مثال‌ها دوری می‌کرد، ولی خوشبختانه در تماس نزدیک با سر بود، که می‌توانست این کوتاهی را جبران کند. هیچ تمایز روشنی بین مثال و نظریه وجود ندارد. بسیاری از مثال‌های مورد علاقه من از آموخته‌های نخستین من از هندسه تصویری متعارف می‌آیند: مکعب پیچ‌خورده^۹، رویه مربعی^{۱۰}، نمایش کلاینی خط‌ها در فضای سه‌بعدی^{۱۱}. نظریه خم‌های گویا^{۱۲}، نظریه فضاها همگن^{۱۳}، و نظریه گراسمانی‌ها^{۱۴}: هیچ چیز نمی‌تواند ملموس‌تر و متعارف‌تر از اینها باشد، به همه اینها می‌توان از دیدگاه جبری یا هندسی نگریست، در عین حال هر یک از آنها نخستین حالت در رده بزرگی از مثال‌هایی است که سپس تبدیل به نظریه می‌شوند.

جنبه دیگر مثال‌ها این است که می‌توانند به مسیرها و جهت‌های گوناگونی رهنمون شوند. یک مثال می‌تواند به شیوه‌های متفاوت زیادی تعمیم یابد یا اصول متفاوت زیادی را به تصویر بکشد. به عنوان نمونه، مخروط متعارف در آن واحد خمی گویا، مربعی، و گراسمانی است.

اما بیش از هر چیز مثال خوب نمونه‌ای از زیبایی است. می‌درخشد و قانع‌کننده است. بینش و درک و آگاهی می‌بخشد. اساس و بنیاد باور را فراهم می‌آورد.

برهان: همگی آموخته‌ایم که «برهان» مشخصه اصلی ریاضی است، و هندسه اقلیدسی با آرایه دقیقی از اصول موضوع و گزاره‌ها

^۹The twisted cube ^{۱۰}The quadric surface ^{۱۱}The Kline representations of lines in 3-space ^{۱۲}The theory of rational curves ^{۱۳}The theory of homogeneous spaces ^{۱۴}The theory of Grasmannians

نویسنده، نقاش، آهنگساز، یا معمار، در رشته‌های دیگر دید. نخست بینش سر برمی‌کند، به ایده‌ای گسترش می‌یابد که به گونه‌ای آزمایشی ترسیم می‌شود، و در نهایت فرایند فنی و طولانی مدت برپا کردن اثر هنری فرا می‌رسد. اما شیوه فنی و بینش باید در ارتباط باشند تا هر یک دیگری را بنا به قواعد خود اصلاح کند.

راهبرد: در بخش پیشین فلسفه برهان و نقش آن در کلیت فرایند خلاقانه تولید ریاضی را توضیح دادم. اکنون بگذارید به ساده‌ترین و عملی‌ترین پرسش مورد علاقه ریاضیدان جوان پردازم. شخص چه استراتژی یا راهبردی را باید اتخاذ کند؟ در عمل چگونه یک برهان را می‌یابید؟

این پرسش در عالم مجرد معنی چندانی ندارد. همان طور که در بخش پیشین توضیح دادم مسأله خوب همواره پیشینه‌ای دارد: یعنی ریشه‌هایی دارد و از پیش زمینه‌ای برمی‌خیزد. برای پیشرفت در مسأله باید ریشه‌هایش را دریابید. به همین دلیل بهتر است که مسأله خودتان را بیابید، و پرسش‌های خودتان را بکنید، به جای اینکه آن را حاضر و آماده از استاد راهنمایان بگیرید. اگر می‌دانید که مسأله از کجا می‌آید، و چرا مسأله پرسیده شده است، در این صورت در میانه راه به سوی حل مسأله قرار دارید. در واقع، پرسیدن سؤال درست اغلب به همان اندازه حل مسأله سخت است. یافتن زمینه مناسب نخستین گام ضروری است.

پس، خلاصه اینکه باید آگاهی خوبی از تاریخ مسأله داشته باشید. باید بدانید که چه نوع شیوه‌هایی برای مسأله‌های مشابه به کار گرفته شده‌اند و محدودیت‌هایشان چه‌ها هستند.

خوب است به محض فهم کامل یک مسأله، در باره آن سخت شروع به اندیشیدن کنید. در آغاز برای درک و حل مسأله، هیچ راهی ندارید جز اینکه عملاً دست به کار شوید. باید حالت‌های ویژه را بررسی کنید و سعی کنید ببینید که سختی اساسی کار کجاست. هر چه بیشتر در باره پیشینه و شیوه‌های گذشته بدانید، فوت و فن‌های بیشتری برای حل مسأله می‌توانید بیازمایید. از سوی دیگر، گاهی نادانی هم نعمتی است! گفته‌اند که جی.ای. لیتل‌وود به هر یک از دانشجویان پژوهشگرش روایتی مبدل از فرضیه ریمان را برای کار پژوهش واگذار می‌کرد و تنها پس از گذشت شش ماه به آنها می‌گفت که چه کرده است. استدلال او این بود که دانشجویان اعتماد به نفس لازم برای درگیر شدن مستقیم با مسأله این چنین معروفی را ندارد ولی در صورتی که از شهرت رقیبش بی‌خبر باشد ممکن است ره به جایی ببرد! این شیوه به حل فرضیه ریمان منجر نشد ولی قطعاً به دانشجویانی جنگ‌دیده و خستگی‌ناپذیر انجامید.

رویکرد خودم دوری از یورش مستقیم و جستجو برای روش‌های غیرمستقیم بوده است. این رویکرد مستلزم ایجاد ارتباط بین مسأله شما و اندیشه‌ها و فن‌های موجود دیگر رشته‌ها، که ممکن است مسأله شما را حل کنند، است. اگر این راهبرد به موفقیت برسد، می‌تواند به برهانی ساده و زیبا بینجامد، که «توضیح» می‌دهد چرا مطلبی درست است. در واقع، بر این باورم که هدف باید جستجو برای توضیح دادن و جستجو برای فهمیدن مطالب باشد. برهان تنها بخشی از این فرایند و گاه‌گاه نتیجه‌ای از فرایند درک مطلب است.

به عنوان بخشی از جستجو برای شیوه‌های جدید، خوب است که افق‌های دید خود را گسترش دهید. گفتگو با دیگران آموخته‌های کلی و عمومی شما را بسط می‌دهد و گاه‌گاه شما را با اندیشه‌ها و فوت و فن‌های نویی آشنا می‌کند. هر از گاهی ممکن است به آگاهی سازنده‌ای در ارتباط با پژوهش خود یا اصلاً به مسیری جدید در پژوهش دست یابید.

اگر نیاز به آموختن موضوعی جدید دارید، به نوشتگان موجود رجوع کنید، یا بهتر اینکه اهل فن خوش مشرب و صمیمی بیابید و دستورالعمل (آموختن) در آن زمینه را از سرچشمه کسب کنید—این روش بینش بیشتر و سریع‌تری به دست می‌دهد.

همان گونه و همان قدر که به پیش می‌نگرید و نسبت به پیشرفت‌های نو هشیارید، گذشته را نباید به فراموشی سپارید. بسیاری از نتایج توانمند ریاضیات دوران گذشته گرد و غبار سالیان را بر روی دارند و به فراموشی سپرده شده‌اند و تنها پس از اینکه دوباره به طوری مستقل کشف می‌شوند دوباره به چشم می‌آیند. این نتایج به آسانی به چشم نمی‌آیند، بعضاً به این دلیل که اصطلاحات و شیوه‌ها در تغییرند، اما می‌توانند معادن طلا باشند. همان گونه که در ارتباط با معادن طلا مرسوم است، باید خوش‌شانس باشی تا به یکی بربخوری، و البته پاداش نصیب پیشگامان می‌شود.

استقلال: در آغاز پژوهش، رابطه شما با استاد راهنمایان می‌تواند اهمیت حیاتی داشته باشد. پس با دقت با در نظر داشتن موضوع کاری، شخصیت، و پیشینه کاری استاد او را انتخاب کنید. اساتید کمی در هر سه زمینه بالا نمرات بالایی می‌گیرند. به علاوه، اگر کارها در خلال نخستین سال بر وفق مراد پیش نرفت یا علائق شما به طور چشمگیری واگرائید، درنگ نکنید از اینکه استادان راهنما یا حتی دانشگاه‌ها را تغییر دهید. استاد راهنمای شما دلخور نمی‌شود و ممکن است حتی راحت هم شود!

گاهی ممکن است که بخشی از یک گروه بزرگ باشید و ممکن

آنها را تقلید کنید.

(۶) وقتی که نگارش عمده مقاله‌تان را به پایان آورده‌اید برگردید و مقدمه‌ای بنویسید که به روشنی ساختار، نتایج اصلی، و زمینه کلی مقاله را توضیح دهد. از اصطلاحات تخصصی غیر ضروری دوری کنید و هدف را خواننده عمومی ریاضی قرار دهید و نه فرد حرفه‌ای باریک‌نگری را.

(۷) نسخه اولیه مقاله‌تان را روی یک همکار آزمایش کنید و به هر پیشنهاد و انتقادی توجه کنید. اگر حتی دوست یا همکار نزدیک شما در فهم مقاله شما مشکل دارد، آنگاه موفق نشده‌اید و باید سخت‌تر بکوشید.

(۸) اگر در عجله‌ای ناگزیر برای چاپ مقاله نیستید، مقاله‌تان را برای چند هفته به کناری بگذارید و روی مطلب دیگری کار کنید. سپس به مقاله‌تان برگردید و آن را با ذهنی تازه بخوانید. خوانش مقاله متفاوت خواهد بود و ممکن است دریابید که چگونه آن را بهتر کنید.

(۹) درنگ نکنید از اینکه مقاله را، شاید از یک زاویه کاملاً نو و تازه، دوباره بنویسید به این شرط که قانع شده باشید که این سبک جدید مقاله را روشن‌تر و در عین حال ساده‌خوان‌تر می‌کند. مقالات خوب‌نوشته‌شده کلاسیک می‌شوند و به طور گسترده‌ای توسط ریاضیدانان آتی خوانده می‌شوند. مقالات بدنوشته‌شده نادیده گرفته می‌شوند یا، اگر به قدر کافی مهم باشند، دوباره توسط دیگران نوشته می‌شوند.

۲ بلا بلوباش^{۱۵}

به گفته هاردی «در این دنیا هیچ جای دائمی برای ریاضیات زشت وجود ندارد.» من بر این باورم که به همین ترتیب در این دنیا جایی برای ریاضیدان‌های نامشتاق و خشک و عبوس وجود ندارد. تنها در صورتی ریاضی بورز که بدان مشتاقی، تنها در صورتی ریاضی بورز که این کار را بکنی حتی اگر وقت انجام آن را پس از یک روز کاری کامل، پس از انجام کار دیگری بیابی. به سان شعر و موسیقی ریاضیات حرفه و پیشه نیست، بلکه تمایل و دلمشغولی است.

ذوق و سلیقه ورای هر چیزی است. معجزه ریاضی این است که به نظر می‌آید توافقی عمومی مبنی بر اینکه ریاضیات خوب چیست وجود دارد. باید در زمینه‌هایی کار کنی که مهم‌اند و نامحتمل است که برای مدتی طولانی، از لحاظ ایده، بخشکند.

است که با دیگر اعضای دانشکده بده‌بستان داشته باشید به طوری که در عمل بیش از یک استاد راهنما داشته باشید. این امر می‌تواند به این معنی کمک‌کننده باشد که افکار گوناگون و روش‌های کاری دیگری را فراهم می‌آورد. ممکن است که از همکاران دانشجو نیز بسیار بیاموزید، و به این دلیل انتخاب یک بخش با گروه بزرگی از دانشجویان تحصیلات تکمیلی ایده خوبی است.

آن گاه که دکتری‌تان را با موفقیت پشت سر گذاشته‌اید، وارد مرحله جدیدی می‌شوید. هر چند ممکن است که هنوز به همکاری با استاد راهنمایان ادامه دهید و هنوز عضوی از همان گروه پژوهشی باقی بمانید، برای پیشرفت‌های آینده شما خوب است که به جای دیگری برای یک سال یا بیشتر نقل مکان کنید. این امر در تأثیرات و فرصت‌های جدید را به روی شما می‌گشاید. حال زمان آن فرا رسیده است که اثری از خود در دنیای ریاضی باقی بگذارید. به طور کلی، فکر خوبی نیست اینکه زمانی طولانی در خطوط نزدیک به پایان‌نامه دکتری‌تان طی طریق کنید. باید استقلال خود را با گسترش علائق خود نشان دهید. این تغییر مسیر لزومی ندارد که تغییری پایه‌ای و افراطی نسبت به راستای پژوهش‌تان باشد، اما باید به وضوح تازگی داشته باشد و در عین حال ادامه سرراست پایان‌نامه‌تان نباشد.

سبک: در نگارش پایان‌نامه‌تان استاد راهنمای شما به طور طبیعی در روش ارائه و سازمان‌دهی مطلب به شما کمک خواهد کرد. اما اکتساب یک سبک شخصی بخشی مهم از پیشرفت ریاضی شماست. هر چند نیازها بسته به نوع ریاضی متفاوت است، بسیاری از جنبه‌ها برای همه موضوع‌ها یکسان‌اند. در اینجا به چند رهنمود در ارتباط با چگونه نوشتن یک مقاله خوب اشاره می‌شود.

- (۱) پیش از شروع نگارش به ساختار منطقی کلی مقاله بیندیشد.
- (۲) برهان‌های پیچیده و طولانی را به گام‌های میانی کوتاه (لم‌ها، گزاره‌ها، و غیره) بشکنید. این کار به خواننده کمک می‌کند.
- (۳) به زبانی (انگلیسی یا زبان انتخابی‌تان) بنویسید که از نظر منطقی و زیباشناسی و ارتباط بین اجزا سازگار و روان است. به یاد داشته باشید که ریاضیات هم نوعی از ادبیات و سخنوری است.

(۴) تا آنجا که ممکن است موجز و مختصر بنویسید و در عین حال روشن و به آسانی قابل فهم باقی بمانید. این توازن به سختی حاصل می‌شود.

(۵) مقالاتی را که از خواندنش لذت برده‌اید مشخص کنید و سبک

¹⁵ Béla Bollobás

شماست و اینکه مطمئن آید که به سرعت از پس آنها برمی آید، و در عین حال وقتی که صرف آنها می کنید موفقیت شما را در ارتباط با مسائل بالا به خطر نمی اندازد.

(۴) حتی در سطح پایین تری، همواره حل مسائلی که واقعاً مسائل پژوهشی نیستند لذت بخش است. (هر چند که مسئله های پژوهشی سالیان گذشته باشند) ولی به قدر کافی زیبا هستند که روی آنها وقت گذاشت: حل چنین مسائلی خوشایند است و توانایی شما را در نوآوری و ابداع زیاد می کند.

صبور و سمج باشید. وقتی که در باره مسئله ای می اندیشید، شاید مفیدترین ابزاری که می توانید به کار بگیرید این باشد که مسئله را همواره در ذهن داشته باشید: این روش برای نیوتن کارگر افتاد و برای بسیاری دیگر نیز به کار آمده است. به خود زمان دهید، به ویژه آن گاه که به مسائل بزرگ حمله ور می شوید؛ با خود پیمان ببندید که مدت زمان معینی را روی مسئله ای بزرگ صرف کنید بی آنکه انتظار زیادی داشته باشید، و پس از آن ارزیابی کنید و تصمیم بگیرید که سپس چه کنید. به رویکردتان زمان دهید تا به کار آید، ولی در عین حال در آن رویکرد خیلی خود را نیچانید تا شیوه های دیگر حمله به مسئله را از دست ندهید. چابک اندیش و سریع باشید: به قول پال اردوش مغزتان را باز نگه دارید.

تترسید که اشتباه کنید. اشتباه برای شطرنج باز مرگ آفرین است ولی برای ریاضیدان در حکم تساوی برای ادامه بازی است. چیزی که باید از آن وحشت کنید برگه ای خالی در برابر شما پس از مدتی اندیشیدن در باره مسئله ای است. اگر پس از یک دوره سطل آشغال شما پر از تلاش های نافرجام شماست، احتمالاً هنوز وضع خیلی خوبی دارید. از رویکردهای مبتذل و بی روح بپرهیزید، اما همواره از وقت گذاشتن روی کار خوشنود باشید. به ویژه، پرداختن به ساده ترین حالت های یک مسئله بعید است که اتلاف وقت باشد و چه بسا بسیار مفید و مؤثر افتد.

هنگامی که وقت قابل ملاحظه ای برای یک مسئله می گذارید، به آسانی می توانید پیشرفتی که کرده اید را دست کم بگیرید و به همان اندازه به آسانی می توانید توانایی تان در به خاطر سپاری پیشرفت تان را دست بالا بگیرید. بهترین کار این است که نتایج هر چند خیلی جزیی تان را بنویسید: شانس خوبی وجود دارد که بعداً یادداشت هایتان موجب جبران وقت زیادی برای شما شوند.

اگر به قدر کافی خوش بخت و اقبال باشید که پیشرفتی چشمگیر حاصل کرده اید، طبیعی است احساس کنید که از پروژه تان خسته شده اید و بخواهید به دستاورد گذشته تان تکیه کنید. در برابر

و باید روی مسئله هایی کار کنی که زیبا و مهم اند: در زمینه خوبی که انبوهی از این مسئله ها موجودند و نه دست چینی از مسئله های معروف و آشنا. همانا بلندپروازی مدام و طولانی مدت به دوره های دراز عقیمی و خشکسالی می انجامد: این دوره های طولانی بی باری و بی حاصلی در مرحله ای از زندگی تان قابل تحمل است، اما در سرآغاز زندگی حرفه ای تان بهتر است از آنها بپرهیزید.

بکوشید که در فعالیت های ریاضی تان به تعادل برسید: برای ریاضیدان واقعی نخست پژوهش می آید و باید بیاید، اما علاوه بر پژوهش، بسیار بخوانید و خوب بیاموزید و تدریس کنید. از ریاضیات در هر سطحی لذت ببرید، حتی اگر آن نوع ریاضیات (تقریباً) هیچ ارتباطی با پژوهش شما نداشته باشد. آموزش نباید باری بر دوش بلکه باید سرچشمه الهام باشد.

پژوهش (بر خلاف نوشتن نتایج پژوهش) هرگز نباید مانند کاری عادی و روزمره باشد: باید مسئله هایی را انتخاب کنید که فکر نکردن درباره آنها برایتان سخت باشد. به این دلیل خوب است که خود را در مسئله ها غرق کنید تا اینکه روی مسئله ها چنان کار کنید گویی که کاری به شما تحمیل شده است. در آغاز زندگی حرفه ای تان، وقتی که دانشجوی تحصیلات تکمیلی در مرحله پژوهش هستید، باید از استاد راهنمای باتجربه تان بهره مند شوید تا مسئله هایی که یافته اید و دوست دارید را محک بزنید، به جای اینکه بر روی مسئله ای کار کنید که، ممکن است با طبع و سلیقه شما جور نباشد، ولی استادتان به شما داده است. در نهایت، استاد راهنمای شما، در عین حالی که شاید توانایی و مذاق شما را نداند، باید دید نسبتاً خوبی داشته باشد در ارتباط با اینکه آیا مسئله خاصی شایستگی تلاش های شما را دارد یا نه. بعداً در زندگی حرفه ای تان، هنگامی که نمی توانید به استادتان تکیه کنید، گفتگو با همکاران دلسوز و شفیق غالباً الهام بخش است.

توصیه می کنم که در آن واحد دو گونه مسئله برای پرداختن داشته باشید.

(۱) «رویا»: مسئله ای بزرگ که بسیار دوست دارید حل کنید، ولی نمی توانید/انتظار معقولی داشته باشید که آن را حل کنید.

(۲) چند مسئله بسیار ارزنده که احساس می کنید، با داشتن وقت و تلاش کافی و بخت یاری، بخت خوبی برای حل آنها دارید. به علاوه، دو نوع مسئله دیگر هستند که باید آنها را در نظر داشته باشید، هر چند که اینها از اهمیت کمتری نسبت به مسائل بالا برخوردارند.

(۳) هر از گاهی روی مسائلی کار کنید که پایین تر از شأن و مرتبه

نمی‌خواهید که پشت سر گذاشته شوید، احتمالاً باید تغییر کنید. همواره ابزار کارتان را تیز کنید و مطالب نو را یاد بگیرید.

ورای هر چیزی، از ریاضیات لذت ببرید و نسبت به آن شور و اشتیاق داشته باشید. از پژوهش‌تان لذت ببرید، چشم به راه خواندن نتیجه‌های نو باشید، عشق به ریاضی را در دیگران پیورانید، و حتی در فراقت، از ریاضیات با اندیشیدن در بارهٔ مسأله‌های کوچک و زیبایی که به آنها برخورد می‌کنید یا از همکارانتان می‌شنوید بهره‌مند و خشنود شوید.

اگر بخواهم اندرزی را که همهٔ ما به منظور موفقیت در دانش و هنر باید تعقیب کنیم جمع‌بندی کنم، به سختی بتوانم کاری بهتر از یادآوری آنچه ویتروویوس^{۱۶} بیش از دو هزار سال پیش نگاشت انجام دهم.

Neque enim ingenium sine disciplina aut disciplina sine ingenio perfectum artificem potest efficere.

برای اینکه نه نبوغ بدون آموختن هنرمندی کامل می‌سازد و نه آموختن بدون نبوغ.

۳ آلن کنی^{۱۷}

ریاضیات ستون فقرات دانش نوین است و به طوری بی‌نظیر سرچشمه‌ای کارآمد از مفاهیم و ابزارهای نو برای درک «واقعیتی» است که در آن شرکت داریم. این مفاهیم جدید خود نتیجهٔ فرایند طولانی «عصاره‌گیری» در انبیک اندیشهٔ آدمی است.

از من خواسته شد که چند اندرز برای ریاضیدانان جوان بنویسم. نخستین نکته‌ام این است که هر ریاضیدان خود موردی خاص است، و به طور کلی ریاضیدان‌ها مایل‌اند که چون «فرمیون‌ها» رفتار کنند، یعنی از زمینه‌هایی که خیلی مرسوم‌اند احتراز می‌کنند، در حالی که فیزیکدان‌ها بیشتر مانند «بوسون‌ها» رفتار می‌کنند، که در دسته‌های بزرگ به هم می‌آمیزند و اغلب در بارهٔ دستاوردهایشان اغراق می‌کنند- شیوه و رفتاری که ریاضیدانان خوار و حقیر می‌شمارند.

در ابتدا ممکن است وسوسه‌انگیز باشد که ریاضیات را به عنوان مجموعه‌ای از شاخه‌های مجزا چون هندسه، جبر، آنالیز، نظریهٔ اعداد، و غیره، در نظر گرفت، که در آن هندسه تحت تسلط تلاش برای درک مفهوم فضا است، جبر تحت تسلط هنر کار کردن با نمادهاست، آنالیز تحت تسلط دستیابی به «بینهایت» و «پیوستار» است و همین طور الی آخر.

این تقسیم‌بندی، به هر حال، حق مطلب را در ارتباط با یکی از

این وسوسه پایداری کنید و ببینید که آن پیشرفت غیر منتظره چه چیزهای دیگری به شما ارزانی می‌کند.

به عنوان یک ریاضیدان جوان، برتری عمدهٔ شما این است که وقت کافی برای پژوهش دارید. ممکن است که این امر را در نیابید، ولی بسیار بعید است که بعداً هرگز به اندازهٔ سرآغاز زندگی حرفه‌ای‌تان وقت برای پژوهش داشته باشید. هر کس احساس می‌کند که وقت کافی برای ریاضی ورزیدن ندارد، اما با گذر سالیان این احساس شدید و شدیدتر و موجه و موجه‌تر می‌شود.

اما در مورد خواندن، افراد جوان از نظر مقدار ریاضیاتی که خوانده‌اند در موقعیتی ضعیف قرار دارند. پس برای جبران این ضعف، تا آنجا که می‌توانید بخوانید، هم در زمینهٔ عمومی پژوهش‌تان و هم در ریاضیات به طور کلی. در زمینهٔ پژوهشی‌تان، مطمئن شوید که مقالات زیادی از بهترین ریاضیدانان را می‌خوانید. چنین مقالاتی اغلب با آنچنان دقتی نیستند که می‌توانستند نوشته شوند، اما کیفیت ایده‌ها و نتیجه‌ها پاداشی کامل است به تلاشی که برای خواندن آنها متحمل می‌شوید. هر چه که می‌خوانید، هشیار باشید: سعی کنید پیشاپیش دریابید که نویسنده چه خواهد کرد و یورش بهتر را طرح بریزید. وقتی که نویسنده بر مسیری که شما پیشاپیش اندیشیده‌اید می‌رود، خشنود خواهید شد، و آن گاه که مسیری دیگر را اختیار می‌کند، می‌توانید چشم به راه دریافتن این امر باشید که چرا. از خود در بارهٔ نتیجه‌ها و برهان‌ها پرسش کنید، حتی اگر ساده‌انگارانه به نظر آید: این پرسش‌ها درک شما از مطلب را بسیار بالا می‌برند.

از سوی دیگر، اغلب مفید است که همه چیز را در بارهٔ مسأله حل نشده‌ای که برآید که به آن حمله‌ور شوید نخوانید: وقتی که عمیقاً در بارهٔ آن اندیشیدید و ظاهراً به جایی نرسیدید، می‌توانید (و باید) شرح تلاش‌های شکست‌خوردهٔ دیگران را بخوانید.

توانتان برای شگفت‌زده شدن را نگه دارید، پدیده‌ها را مفروض و بدیهی نگیرید، قدرشناس ایده‌ها و نتیجه‌هایی که می‌خوانید باشید. بسیار آسان است که فکر کنید می‌دانید چه خبر است: با این همه، تنها برهان را خوانده‌اید. افراد برجسته اغلب زمان زیادی برای هضم ایده‌های نو می‌گذارند. برای ایشان کافی نیست که گردونه‌ای از قضیه‌ها بدانند و برهان‌های آنها را دریابند: افراد برجسته برآنند که قضیه‌ها را در خون خود حس کنند.

همچنان که زندگی حرفه‌ای‌تان به پیش می‌رود، همواره ذهنتان را به روی ایده‌های نو و مسیرها و جهت‌های نو باز نگه دارید: چشم‌انداز ریاضی همواره در تغییر است، و شما هم، اگر

¹⁶Vitruvius ¹⁷Alain Connes

فاصل و ارتباطات بین رشته‌ای در ریاضیات هم‌رای هستند. هر چه که سرآغاز سفر ریاضیدان باشد، اگر به قدر کافی گام بردارد، حتماً روزی به دیاری آشنا پا خواهد گذاشت: به عنوان مثال، توابع بیضوی، شکل‌های مدولی، یا توابع زتا. «همه راه‌ها به رم می‌رسند»، و دنیای ریاضی «همبند» است. البته این بدین معنی نیست که همه بخش‌های ریاضی همانندند، و در اینجا شایسته است که گفتار زیر از **گروتندیک** (در «کاشت و برداشت»^{۲۰}) نقل شود که در مقام مقایسه دورنمای آنالیز ریاضی است، که نخست در آن زمینه کار می‌کرد، با دورنمای هندسه جبری، که باقیمانده زندگی ریاضی‌اش را در آن زمینه گذراند. «هنوز این گمان و باور نیرومند (البته کاملاً ذهنی) را به خاطر می‌آورم، گویی که دشت‌های وسیع خشک و تیره‌گون را پشت سر می‌گذارم و خود را ناگاه در «سرزمین موعود»^{۲۱} پربرکت از ثروت و باروری می‌یابم؛ سرزمینی حاصلخیز و پربرکت که تا بینهایت گسترده می‌شد و هر جا که می‌خواستی در آن دست می‌یازیدی یا می‌کاویدی، تا از آن باری گرد آوری»

بیشتر ریاضیدانان سبک و روشی عملگرایانه اتخاذ می‌کنند و خود را به سان کاشفان این «دنیای ریاضی» می‌بینند؛ دنیایی که وجودش را به پرسش نمی‌کشند و ساختارش را با ترکیبی از شهود و انبوهی از اندیشه منطقی آشکار می‌کنند. شهود چندان از «تمایل شاعرانه» (آن گونه که توسط شاعر فرانسوی **پال والری**^{۲۲} تاکید شده است) متفاوت نیست، در حالی که اندیشه منطقی نیازمند دوره‌های شدید تمرکز است.

هر نسل تصویری ذهنی می‌سازد که دریافت خودش را از این دنیا منعکس می‌کند. ایشان ابزاری ذهنی می‌سازند که بیشتر و بیشتر در این دنیا نفوذ می‌کند تا از این رهگذر بتوانند جنبه‌هایی از هستی را کشف کنند که پیش از این از نظر ایشان پنهان بود.

کار وقتی جالب می‌شود که پل‌های نامنتظره‌ای بین بخش‌هایی از ریاضیات پدیدار می‌شوند، که در تصویر ذهنی ایجاد شده به وسیله ریاضیدانان نسل‌های پیشین از هم دور و جدا بودند. آن گاه که این امر رخ دهد، این احساس به آدمی دست می‌دهد که ناگاه نسیمی مه‌ای حائل را به کنار می‌راند، مه‌ای که بخش‌هایی از چشم‌انداز زیبای ریاضی را از دیده‌ها پنهان می‌کرد. در کار فردی

مهمترین مشخصه‌های دنیای ریاضی ادا نمی‌کند. یعنی اینکه در عمل امکان‌پذیر نیست که هیچیک از شاخه‌های بالا را از یکدیگر جدا کرد بدون اینکه آنها را از خمیره و ذاتشان محروم کرد. بدین ترتیب بدنه ریاضی چون وجودی بیولوژیکی را می‌ماند، که تنها به عنوان یک کل زنده می‌ماند و اگر به تکه‌هایی مجزا تفکیک شود، نابود می‌شود.

زندگی علمی ریاضیدانان را می‌توان به مانند کاوشی در جغرافیای «واقعیت ریاضی» تصویر کرد که اندک‌اندک در چارچوب ذهنی فردی ریاضیدانان آشکار می‌شود.

این فرایند اغلب با عصیان در برابر توصیفات خشک و جزئی از فضایی که می‌توان در کتاب‌های موجود پیدا کرد آغاز می‌گردد. ریاضیدانان جوان و آینده‌ساز کم‌کم درمی‌یابند که درک ایشان از دنیای ریاضی مشخصه‌هایی را دریافت می‌کند که در باورهای جزئی موجود نمی‌گنجد. این عصیان‌گری آغازین، در بیشتر موارد، به ناآگاهی بر می‌گردد، اما با این وجود می‌تواند سودمند باشد، چرا که مردمان را از تکریم و کرنش به قدرت و جو غالب‌رهایی می‌بخشد و به ایشان اجازه می‌دهد که بر شهودشان تکیه کنند، منوط به اینکه آن شهود بتواند با برهان‌های واقعی پشتیبانی شود. آن گاه که ریاضیدان به راستی، به شیوه‌ای «شخصی» و بکر و بدیع، شروع به دریافتن بخش کوچکی از دنیای ریاضی می‌کند، هر قدر این دریافت در آغاز مبهم و رمزآلود به نظر آید،^{۲۳} سفر می‌تواند به خوبی آغاز گردد. البته، امری حیاتی است که نخ آریادنه^{۲۴} را نگسست: بدین گونه شخص می‌تواند بی‌وقفه نسبت به هر آنچه که در طول مسیر با آن مواجهه می‌گردد هشیار باشد، ولی در عین حال می‌تواند هر وقت احساس گم‌گشتگی کرد، به سرچشمه بازگردد.

همچنین ادامه حرکت امری حیاتی است. در غیر این صورت آدمی این خطر را می‌کند که خود را در محدوده نسبتاً کوچکی از تخصصی بسیار فنی محصور کند، و بدین گونه آگاهی‌اش را از دنیای ریاضی و از گوناگونی سترگ، و چه بسا، رازناک آن محدود سازد.

از این دیدگاه، نکته اساسی این است که هر چند که ریاضیدانان بسیاری زندگی‌شان را صرف کاوش بخش‌های گوناگونی از دنیای ریاضی با چشم‌اندازهای گوناگونی کرده‌اند، همگی پیرامون حدود

^{۲۰} نقطه آغازین دریافت من از دنیای ریاضی مکان‌یابی ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها بود. خوشبختانه، در آغاز کار برای شرکت در همایشی در سیاتل دعوت شدم، که در آن با ریشه تمامی کارهای آینده‌ام روی فاکتورها (عامل‌ها) آشنا شدم.

^{۲۱} منظور داستان گلوله نخ آریادنه (Ariadne) است. آریادنه همسر دیونایسوس (Dionysus) رب‌النوع شراب و میگساری، دختر شاه مینوس (Minos) و شهبانو پسپافی (Pasiphaë) بود. اما او هنگامی که عاشق تسپوس اتنی (Theseus) شد به پیمان ازدواجش خیانت کرد. او شمشیر جادویی را به همراه یک گلوله نخ به تسپوس داد تا به وسیله آن مینوتور (Minotaur) هیولای نیمه‌انسان نیمه‌گاو را نابود کند. تسپوس خود را به دهلیز هزار تو رساند، گلوله نخ را باز کرد و خود را به مرکز مارپیچی رساند که مینوتور در آن زندگی می‌کرد. مینوتور را کشت، و به کمک گلوله نخ آریادنه راه بازگشت را پیدا کرد. م.

^{۲۲} Récoltes et Semaines (Harvests and Sowings) ^{۲۳} Paul Valéry

کنند. به هر روی، انجام این کار همیشه آسان نیست. پذیرش اکراه‌آمیز. یکی از همکارانم وقتی گفت «ما (ریاضیدان‌ها) برای تأیید اکراه‌آمیز اندکی از دوستان کار می‌کنیم.» درست است، از آنجا که کار پژوهش دارای ماهیت انزوایی است، به شدت و به طریقی نیازمند آن تأیید و مقبولیت هستیم، ولی آدم واقعاً نباید خیلی انتظار داشته باشد. در واقع، تنها داور حقیقی خود شخص است. هیچ شخص دیگری در وضعیتی به خوبی خود فرد نیست که بداند چه کاری انجام شده است، و اهمیت دادن زیاد به گمان و پندار دیگران اتلاف وقت است: هیچ قضیه‌ای تا کنون به عنوان نتیجه‌ای از یک رای‌گیری ثابت نشده است. همان گونه که فاینمن^{۲۳} گفته است «چرا به آنچه دیگران فکر می‌کنند اهمیت می‌دهی؟»

۴ دوسا مک‌داف^{۲۴}

زندگی دوران بزرگسالی‌ام را در وضعیتی بسیار متفاوت از هم‌نسلانم شروع کردم. همواره این گونه بار آمدم که فکر کنم که زندگی حرفه‌ای مستقلی خواهم داشت، و در عین حال از جانب خانواده و از سوی مدرسه بسیار تشویق می‌شدم که به ریاضیات بپردازم. بر خلاف معمول، مدرسه دخترانه‌ام معلم ریاضی محشری داشت که زیبایی هندسه اقلیدسی و حسابان را به من نشان داد. در برابر، احترامی برای معلمان علوم [تجربی] قائل نبودم، و از آنجا که استادان دانشگاه نیز در رشته‌های علوم چندان بهتر نبودند، هرگز به درستی فیزیکی نیاموختم.

بسیار موفق در این فضای محدود، انگیزه زیادی داشتم که ریاضیدانی پژوهشگر شوم. در حالی که از بعضی جنبه‌ها اعتماد به نفس زیادی داشتم، از جنبه‌های دیگر احساس کاستی زیادی می‌کردم. یک مشکل بنیادی این بود که این پیام [جامعه] را جذب کرده بودم که زنان از نظر ریاضی از درجه دوم هستند و در نتیجه باید نادیده گرفته شوند. دوستان مونثی نداشتم و واقعاً هوش و زیرکی خاص خودم را قدر نمی‌دانستم، فکر می‌کردم هوشم خسته‌کننده و عملی است (ویژگی زنانه) و نه هوش به درستی خلاق (ویژگی مردانه). روش‌های زیادی برای بیان این مطلب وجود داشت: زنان اجاق خانه را روشن نگه می‌دارند ولی مردان در دنیای بیرون سیر می‌کنند، زنان الهه‌های شعر و موسیقی‌اند ولی شاعر نیستند، زنان روح و جنم واقعی برای ریاضیدان شدن را ندارند، و همین طور الی آخر. و هنوز روش‌های زیادی برای ابراز این مطلب است. اخیراً نامه‌ای تقنی بین دوستان فمینیسم دست به دست می‌گشت که چندین پیشداوری مشترک و متناقض

خودم چنین شگفتی‌های بزرگی بیشتر از راه ارتباط با فیزیک پیش آمده است. مفاهیم ریاضی که به گونه‌ای طبیعی در فیزیک رخ می‌نمایند اغلب، به قول آدامار^{۲۵}، مفاهیمی اساسی می‌شوند. از نظر آدامار «این مفاهیم تازگی زودگذری را به نمایش نمی‌گذارند که اغلب می‌تواند ریاضیدان مانده با ابزار و افکارش را تحت تأثیر بگذارد، بلکه تازگی پربار ناکرآمدی را به نمایش می‌گذارند که از طبیعت و ذات اشیا می‌جوشد.»

این مقاله را با اندرزهایی «عملی‌تر» به پایان خواهم آورد. به هر روی، توجه داشته باشید که هر ریاضیدان «مورد خاصی» است و نباید این اندرزها را خیلی جدی گرفت.

پیاده‌روی. یک تمرین بسیار سالم وقتی که با مسأله‌ای پیچیده درگیر هستید (که اغلب با محاسبات سر و کار دارد) این است که (بدون کاغذ و قلم) به پیاده‌روی‌ای طولانی بروید و محاسبات را در ذهنتان انجام دهید، مستقل از اینکه ابتدا به ساکن دارای این احساس هستید که آیا «خیلی سخت است که محاسبات بدین صورت (به طور ذهنی در حین پیاده‌روی) انجام شود». حتی اگر فرد موفق نشود، حافظه در دسترس را می‌پرورد و مهارت و زبردستی شخص را دقیق و قوی می‌کند.

دراز کشیدن. ریاضیدانان معمولاً به سختی می‌توانند به شریک زندگی‌شان توضیح دهند که وقتی که به شدت بدترین صورت کار می‌کنند هنگامی است که در تاریکی روی مبلی دراز می‌کشند. بدبختانه، با ایمیل و چنگ‌اندازی صفحه‌های رایانه در تمامی مؤسسه‌های ریاضی، فرصت دستیابی به گوشه‌گیری و تمرکز، نایاب‌تر، و در عین حال باارزستر، می‌شود.

بی‌پروایی. در فرایندی که به کشف ریاضیات نو رهنمون می‌شود چندین مرحله وجود دارد. مرحله بررسی کردن هر چند که ترسناک است، اما تنها نیازمند عقل سلیم و تمرکز است. مرحله خلاقانه‌تر تعقل ماهیت کاملاً متفاوتی دارد. به یک معنی، این مرحله نیازمند نوعی محافظت ناشی از جهل و نادانی شخص است، چرا که این امر، همچنین، شخص را از هزار و یک دلیل همواره موجود برای نپرداختن به مسأله‌ای حفظ می‌کند که ناموفقانه توسط بسیاری ریاضیدانان دیگر حمله شده است.

موانع. ریاضیدان‌ها در طی زندگی کاریشان، که شامل مراحل نخستین نیز می‌شود، از هم‌اوردان و رقبا پیش‌چاپ‌هایی دریافت می‌کنند، و از این رو احساس درهم گسیختگی می‌کنند. تنها پیشنهادی که اینجا دارم این است که این احساس دلزدگی و ناراضی‌تی را با تزریقی از انرژی مثبت به سخت‌تر کار کردن تبدیل

²² Jacques Salomon Hadamard ²³ Richard Phillips Feynman ²⁴ Dusa McDuff

شروع کردن از ساده‌ترین پرسش‌ها و مثال‌هاست که می‌توان دورتر را دید، زیرا این امر مسألهٔ اساسی را آسان‌فهم‌تر می‌کند و سپس چه بسا که رهیافت جدیدی به آن را به دست دهد. به عنوان مثال، همواره دوست داشتم که روی قضیهٔ نافرزدگی گرومف^{۲۸} در هندسهٔ هممتافته^{۲۹} کار کنم، که محدودیت‌هایی بر شیوه‌هایی که با یک گوی می‌توان به گونه‌ای هممتافته کار کرد تحمیل می‌کند. این نتیجهٔ بسیار اساسی و هندسی به طریقی برای من طنین‌انداز است، و بدین گونه پایهٔ استواری برایم می‌سازد که از آنجا به کاوشگری می‌پردازم.

این روزها مردم خیلی بیشتر آگاه‌اند که ریاضیات حاصل تلاشی همگانی است: حتی درخشان‌ترین ایده معنای خود را تنها از رابطه‌اش با کلیت موضوع می‌گیرد. وقتی که شخص درکی از زمینه دارد، بسیار مهم و مؤثر ثمر است که به تنهایی کار کند. به هر روی، مراوده با دیگران به هنگامی که شخص در کار آموختن است امری حیاتی است.

تلاش‌های موفقیت‌آمیز زیادی برای آسان نمودن این ارتباط، از طریق تغییر ساختار ساختمان‌ها، تغییر نشست‌ها و همایش‌ها، تغییر برنامه‌های دانشکده‌ها، و همچنین به گونه‌ای کمتر رسمی از طریق تغییر سمینارها و سخنرانی‌ها، شده است. چقدر شگفت‌انگیز است که چگونه فضای یک سمینار تغییر می‌کند وقتی که ریاضیدان پیشکسوتی، به جای چرت‌زدن و خسته به نظر رسیدن، سؤال‌هایی می‌پرسد که موضوع را برای دیگران روشن می‌کند و بدین گونه بحث را برای شرکت‌کنندگان باز می‌کند. افراد (پیر و جوان) اغلب از ترس نشان دادن ناآگاهی‌شان، فقدان تخیل، و کاستی‌های کشندهٔ دیگر به سکوت فرو می‌روند. اما در برابر موضوعی به دشواری و به زیبایی ریاضی، هر کس چیزی برای آموختن از دیگران دارد. حالا همایش‌ها و کارگاه‌های کوچک و خوب بسیاری هستند و سازمان‌دهی آنها به نحوی است که در آنها بحث در بارهٔ جزئیات نظریه‌های خاص و همچنین در بارهٔ صورتبندی جهت‌ها و پرسش‌های جدید به آسانی انجام می‌شود.

هر چند این اندیشه که ریاضیات به طوری ذاتی مردانه است دیگر خیلی کمتر شایع است، مشکل چگونه آشتی دادن زن بودن با ریاضیدان بودن هنوز حائز اهمیت است. فکر نمی‌کنم که ما زنان آن گونه که باید و شاید در دنیای ریاضی حضور داریم، ولی آنقدر حضور داریم که به عنوان موردهای خاص و استثنایی در نظر گرفته نشویم. من نشست‌هایی که در درجهٔ نخست برای زنان در نظر گرفته شده‌اند را بر خلاف انتظار ارزنده می‌یابم؛ فضای این

را در زمینه‌های مختلف علمی فهرست می‌کرد، و پیامش این بود که زنان قادر به درک هر آنچه که بسیار ارزشمند است نیستند.

مشکل دیگری که کمی بعد آشکار شد این بود که توانسته بودم پایان‌نامهٔ موفقی بنویسم در حالی که ریاضیات بسیار کمی آموخته بودم. پایان‌نامه‌ام در زمینهٔ جبرهای فون نویمن^{۲۵} بود، که برای من به هیچ معنی حقیقی‌ای مربوط نمی‌شد. در آن زمینه راهی به سوی جلو نمی‌دیدم و در عین حال تقریباً چیز دیگری نیز نمی‌دانستم. هنگامی که در آخرین سال تحصیلات تکمیلی‌ام به مسکو رسیدم، گلفند^{۲۶} مقاله‌ای در زمینهٔ کوهومولوژی جبر لی میدان‌های برداری روی یک منیفلد داد که بخوانم. و من نمی‌دانستم که کوهومولوژی چیست، نمی‌دانستم که منیفلد چیست، نمی‌دانستم که میدان برداری چیست، و نمی‌دانستم که جبر لی چیست.

هر چند که این جهل تا حدی ناشی از اشتباه آموزشی تخصص‌محور بود، به عدم ارتباط من با دنیای گسترده‌تر ریاضی نیز برمی‌گشت. این مشکل که چگونه زن بودن را با ریاضیدان بودن آشتی دهم اساساً با پیگیری و هدایت دو زندگی جداگانه حل کرده بودم. انزوای من پس از بازگشت از مسکو شدت گرفت. با تغییر رشته از آنالیز تابعی به توپولوژی، راهنمایی اندکی داشتم، خیلی می‌ترسیدم که با پرسیدن پرسش‌های زیاد ناشی و نادان به نظر آیم. در عین حال، در مرحلهٔ پست دکتري کودکي خردسال داشتم که مرا با مشکلات عملی بسیار درگیر می‌کرد. در آن مرحله، بی‌هیچ درکی از فرایند ریاضی ورزیدن، بیشتر با خواندن می‌آموختم بی‌خبر از نقش اساسی که صورتبندی پرسش‌ها و امتحان کردن اندیشه‌های، چه بسا، خام خود شخص ایفا می‌کند. همچنین شناختی از اینکه چگونه زندگی حرفه‌ایم را بسازم نداشتم. چیزهای خوب خودبه‌خود پیش نمی‌آیند: باید برای پژوهشیاری^{۲۷} و شغل‌های دیگر اقدام کرد و نگاهی به همایش‌های جالب داشت. قطعاً داشتن راهنمایی که روش‌های بهتری برای سر و کار داشتن با چنین مشکلاتی پیشنهاد کند کمک‌کننده است.

احتمالاً بیشتر لازم بود بیاموزم که چگونه سؤال خوب بپرسم. به عنوان یک دانشجو، کار شخص نه تنها آموختن به قدر کافی است که بتواند پرسش‌های مطرح شده توسط دیگران را جواب دهد بلکه همچنین باید بیاموزد که چگونه پرسش‌هایی تنظیم کند که ممکن است به جاهایی جالب برسند. به هنگام آموختن مطلبی جدید، اغلب با استفاده از نظریهٔ پیچیده‌ای که قبلاً توسط دیگران بسط داده شده بود از وسط مطلب شروع می‌کردم. اما اغلب با

²⁵John von Neumann ²⁶Israel Moiseevich Gelfand ²⁷fellowship ²⁸Gromov's non-squeezing theorem ²⁹Symplectic Geometry

نامنتظر و هوشمندانه که شخص را از نبوغ ابداع‌کننده حیرت‌زده می‌کند همچنان باقی می‌ماند، اما چنین گام‌هایی خیلی کمتر از آن هستند که شخص ممکن است فکر کند. به عنوان مثال، معمولاً توصیه می‌کنم مقاله‌های اصلی وایل^{۳۱} در ارتباط با نظریه نمایش گروه‌های لی فشرده و به دست آوردن دستور مشخصه وایل^{۳۲} در کنار یکی از نوشتگان نوین مطالعه شوند. همچنین، کتاب مفهوم رویه ریمان^{۳۳} وایل را به کسی سفارش می‌کنم که آنالیز مختلط را می‌داند و می‌خواهد در باره نظریه نوین رویه‌های ریمان بیاموزد، نظریه‌ای که اهمیت زیادی در بسیاری از زمینه‌های ریاضی دارد. همچنین مطالعه مجموعه آثار ریاضیدانان برجسته‌ای مانند وایل آموزنده است. [با مطالعه این آثار] علاوه بر آموختن قضیه‌های ایشان می‌توان دریافت که ذهن این ریاضیدانان چگونه کار می‌کند. تقریباً همواره یک خط سیر طبیعی فکری است که از یک مقاله به مقاله دیگر می‌رسد و از این رهگذر گسترش‌ها و تحولات معینی به ناگزیر درک و احساس می‌شوند. این امر می‌تواند بسیار الهام‌بخش واقع گردد.

(۲) از سوی دیگر، باید عقاید جزئی و «فرضیه‌های متعارف» را به زیر سؤال ببرید حتی اگر این فرضیه‌ها توسط افراد باهوش مطرح شده باشند. بسیاری از فرضیه‌های متعارف بر اساس موارد خاصی که شخص می‌فهمد مطرح شده‌اند. در ورای آن موارد، گاهی اوقات این فرضیه‌ها کمی بیش از رویا و خیال هستند: شخص تنها به این امید است که تصویر کلی از تصویری که موارد خاص پیشنهاد می‌کنند خیلی متفاوت نباشد. مواردی هستند که می‌دانم که کجا فردی شروع به اثبات حکمی کرد که باور عمومی به درستی آن گواهی می‌داد و هیچ پیشرفتی نکرد تا اینکه به طور جدی درستی آن را به زیر سؤال برد. از سوی دیگر، این را کمی ناراحت‌کننده می‌بینم که گاهی، بی هیچ دلیل معقولی، سایه شک و تردید بر بعضی فرضیه‌های خاص، مانند فرضیه ریمان، یا بر اثبات‌پذیری این فرضیه‌ها، افکنده شود. هر چند که به عنوان یک دانشمند، قطعاً باید طرز برخوردی منتقدانه اتخاذ کرد (به ویژه در ارتباط با بعضی از اشیاء مصنوعی که ما ریاضیدان‌ها ابداع کرده‌ایم)، از نظر روانی مهم است که باورهایی در باره هستی ریاضی مان و در باره آنچه درست است و آنچه اثبات‌پذیر است داشته باشیم.

(۳) «مقدماتی» را با «آسان» قاطی نکنید: یک برهان قطعاً می‌تواند مقدماتی باشد بدون اینکه ساده باشد. در واقع، مثال‌های زیادی از قضیه‌هایی موجودند که اندکی پیچیدگی برهان آنها را به آسانی قابل درک می‌کند و ایده‌های زیربنایی را بر ملا می‌سازند، در

نشست‌ها وقتی که اتاق سخنرانی پر از زنانی است که به بحث ریاضی مشغول‌اند دیگرگونه است. همچنین، همان گونه که به طور فزاینده‌ای فهمیده شده است، مسأله حقیقی این است که چگونه هر فرد جوانی در عین حالی که می‌خواهد ریاضیدان خلاق باشد، بتواند زندگی شخصی رضایت‌بخشی فراهم کند. آن گاه که مردم به طوری جدی شروع به کار روی این مطلب کنند، به درستی راهی درازی را خواهیم پیمود.

۵ پیتسر سرنک^{۳۰}

من در طی سالیان تعداد قابل ملاحظه‌ای دانشجوی دکتری را راهنمایی کرده‌ام، که شاید مرا به عنوان یک مربی با تجربه واجد صلاحیت برای نوشتن این اندرزنامه می‌کند. وقتی که دانشجویی باهوش را راهنمایی می‌کنم (و به قدر کافی خوشبخت بوده‌ام که سهم خود از ایشان را داشته‌ام) تعامل [یا دانشجو] مثل این است که به کسی بگویی در جایی به دنبال طلا بگرد و تنها پیشنهادهایی مبهم ارائه دهی. وقتی که دانشجویان با مهارت و استعدادشان دست به کار می‌شوند به جای طلا الماس می‌یابند (و البته، پس از آن آدم نمی‌تواند از گفتن «من که به تو گفته بودم» خوداری کند). در این موارد، و همچنین در موارد بسیار دیگری، نقش استاد پیشکسوت بیشتر شبیه یک مربی است: مربی تشویق می‌کند و اطمینان حاصل می‌کند شخص تحت تربیت روی مسائل جالب کار می‌کند و از ابزار اساسی که در دسترس هستند با خبر است. در گذر سالیان دریافته‌ام که نکته‌ها و پیشنهادهای ویژه‌ای را تکرار می‌کنم که ممکن است مفید از آب درآمده باشند. در اینجا برخی از این نکته‌ها و پیشنهادها را فهرست می‌کنم.

(۱) وقتی که رشته‌ای را می‌آموزید، باید خواندن نوشتگان نوین را با مطالعه مقاله‌های اصلی، به ویژه با مقاله‌های استادان مسلم موضوع مورد نظر، ترکیب کنید. یکی از مشکلات شرح‌های اخیر بعضی از مباحث این است که این متون می‌توانند خیلی یک‌دست و جذاب باشند. از آنجا که هر نویسنده جدید برهان‌ها و شرح‌های هوشمندانه‌تری از یک نظریه می‌یابد، این شرح‌ها به سوی شرحی که شامل «کوته‌ترین برهان‌ها» است تکامل پیدا می‌کند. بدبختانه، این شرح‌ها اغلب به شکلی هستند که دانشجوی تازه‌کار را به این اندیشه فرو می‌برد که «چگونه کسی این برهان‌ها را ابداع کرده است؟» با مراجعه به متون اصلی معمولاً می‌توان دید که موضوع به طور طبیعی تکامل یافته است و دریافت که چگونه این موضوع به شکل نوینش رسیده است. (آن گام‌های

³⁰Peter Sarnak ³¹Hermann Klaus Hugo Weyl ³²The Weyl Character Formula ³³The Concept of a Riemann Surface

گونگون به فرد اجازه می‌دهد که ناامیدی را با دیگران قسمت کند. برای بیشتر مردم، این امر نقطه مثبت بزرگی است (و در ریاضیات سهم متناظر از خوشی و اعتبار به خاطر به دست آوردن یک پیشرفت بزرگ، دست کم تا کنون، به جنگ و دعوای بزرگ، به طوری که در دیگر شاخه‌های دانش رخ داده است، منجر نشده است). اغلب به دانشجویان سفارش می‌کنم که همواره حوزه‌ای از مسائل را در دسترس داشته باشند. آسان‌ترین این مسائل هنوز باید به قدر کافی سخت باشد که به شما احساس رضایت‌مندی دهد (چرا که بدون این احساس، هدف چیست؟) و با بخت‌یاری مورد علاقه دیگران واقع شود. سپس باید محدوده و حوزه‌ای از مسائل چالش برانگیزتر داشته باشید، که سخت‌ترین آن مسائل باید مسائل حل‌نشده عمده باشند. شخص باید به این گونه مسائل در طی زمان حمله‌ور شود و به آنها از دیدگاه‌های گوناگون نگاه کند. مهم است که خود را در معرض احتمال حل مسائل بسیار سخت قرار دهید، و شاید از اندکی بخت‌یاری بهره‌مند شوید.

(۵) هر هفته به سخنرانی‌های عمومی دانشکده‌تان بروید، به این امید که سازمان‌دهندگان سخنران‌های خوبی انتخاب کرده باشند. مهم است که آگاهی وسیعی از عرصه ریاضی داشته باشید. علاوه بر آموختن مسائل جالب و پیشرفتی که مردم در زمینه‌های دیگر دارند، اغلب، وقتی که سخنران در باره مطلبی کاملاً متفاوت سخنرانی می‌کند، می‌توانید ایده‌ای برانگیخته شده در ذهنتان داشته باشید. همچنین، [در طی سخنرانی] ممکن است فن یا نظریه‌ای بیاموزید که می‌تواند به یکی از مسائلی که به آن می‌پردازید اعمال شود. در دوران اخیر، تعداد زیادی از برجسته‌ترین راه حل‌های مسائل قدیمی از ترکیب نامنتظری از ایده‌هایی از شاخه‌های گوناگون ریاضی نشأت گرفته‌اند.

* دانشگاه گلستان

حالی که شرح مقدماتی برهان که از مفاهیم پیچیده احتراز می‌کند راز برهان را پنهان می‌کند. در آن واحد، مواظب یکی قرار دادن پیچیدگی با کیفیت یا با «قدرت یک استدلال^{۳۴}» (عبارتی که از قرار معلوم دوست دارم زیاد به این معنی به کار ببرم: خیلی از دانشجویان پیشینم در این باره سر به سرم گذاشته‌اند) باشید. در بین بعضی از ریاضیدانان جوان گرایشی وجود دارد که به کار بردن زبان پیچیده و پرزرق و برق به این معنی است که آنچه انجام می‌دهند ژرف و عمیق است. با این وجود، ابزار نوین وقتی قدرتمندند که به خوبی فهمیده شوند و با ایده‌های نو ترکیب شوند. افرادی که در بعضی زمینه‌ها (مثلاً نظریه اعداد) کار می‌کنند و زمان و زحمت زیادی را، که لازمه آموختن این گونه ابزار است، نمی‌گذارند خود را در معرض زیان و ضرری بی‌اندازه قرار می‌دهند. نیاموختن این ابزار مانند خراب کردن یک ساختمان با تنها یک اسکانه است. حتی اگر در استفاده از اسکانه خیلی ماهر باشید، فردی با یک بلدوز برتری عظیمی برای انجام این کار دارد و نیازی ندارد که آنقدرها هم ماهر باشد.

(۴) کار پژوهش ریاضی ناامید کننده است و اگر ناامید شدن چیزی است که نمی‌توانید بدان عادت کنید، در این صورت ریاضیات ممکن است پیشه مطلوب و آرمانی برای شما نباشد. بیشتر اوقات آدمی گیر می‌افتد، و اگر این امر شامل شما نمی‌شود، آنگاه یا به طور استثنایی با استعدادید یا درگیر با مسائلی هستید که پیشاپیش می‌دانستید چگونه باید حل کنید. جا برای کار کردن از نوع اخیر موجود است، و این نوع کار می‌تواند از کیفیت بالایی برخوردار باشد، ولی بیشتر پیشرفت‌های شگرف با کار سخت و جانفرسا، با برداشتن گام‌های اشتباه زیاد و دوره‌های طولانی پیشرفتی اندک یا حتی پسرفت، به دست آمده‌اند. راه‌هایی هستند که این جنبه از پژوهش را کمتر ناخوشایند می‌کند. این روزها افراد زیادی با هم کار می‌کنند، که علاوه بر برتری روشن کنار هم آوردن تخصص‌های

بدان ای عزیز!

که کار به حساب است، نه به گزاف!

و تا سالک، این نقطه را بر پی افتد راهی دراز بیاید رفت!

عین‌القضات همدانی

³⁴the beef of an argument