

۷. فرض کنید $B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ و برای هر $x, y \in B$

$$d(x, y) = \begin{cases} 2 - \|x\| - \|y\|, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

ثابت کنید فضای متریک (B, d) نقطه حدی ندارد. (لازم نیست متر بودن d را ثابت کنید).

۸. نشان دهید زیرگروه‌های سره A و B از گروه $(\mathbb{Q}, +)$ موجودند به طوری که

$$\mathbb{Q} = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

۹. مثالی از تابعی پیوسته و غیرثابت مانند $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ارائه کنید به طوری که برای هر

$$x \text{ مثبت } 0 \leq f(2x)f(x).$$

۱۰. فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی و $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ تابعی

باشد که برای هر $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ وارون‌پذیر $\varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$. ثابت کنید برای

$$\text{هر } A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

۱۱. فرض کنید $0 < x_1 < x_2 < \dots$ اعداد حقیقی باشند و $1 \leq \beta < \alpha$. ثابت کنید سری زیر

همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x_n - x_{n-1})^\beta}{x_n^\alpha}$$

۱۲. ثابت کنید زیرمجموعه‌های A_1, A_2, A_3, \dots از اعداد طبیعی وجود دارند به طوری که برای

هر دو عدد طبیعی i و j (نه لزوماً متمایز) تعداد اعضای $A_i \cap A_j$ برابر با بزرگترین مقسوم

علیه مشترک i و j است.

موفق باشید