۷) فرض کنید $B = \{x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : \; ||x|| = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲} < ۱\}$ و برای هر $x, y \in B$

$$d(x,y) = \begin{cases} ۲ - ||x|| - ||y||, & x \neq y \\ ۰ & x = y. \end{cases}$$

ثابت کنید فضای متریک (B, d) نقطه حدی ندارد. (لازم نیست متر بودن d را ثابت کنید.)

پاسخ: برای هر $x, y \in B$ که $x \neq y$ داریم

$$d(x,y) = (۱ - ||x||) + (۱ - ||y||) > ۱ - ||x||$$

پس $B_{۱-||x||}(x) = \{x\}$ یعنی تمام نقاط B تنها هستند.

۸) نشان دهید زیرگروه‌های سره A و B از گروه $(\mathbb{Q},+)$ موجودند به طوری که

$$\mathbb{Q} = \{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

پاسخ: قرار دهید $A=\{\frac{a}{۲^n} : a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{\frac{a}{b} : a,b\in\mathbb{Z},$ فرد $b\}$ به راحتی دیده می‌شود که A و B دو زیر گروه سره $\mathbb{Q}$ هستند. اگر $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ آنگاه $q=۲^m c$ که c فرد است. چون $(c,۲^m)=۱$ پس $x,y\in\mathbb{Z}$ موجودند که $cx+۲^m y=p$ در نتیجه $\frac{p}{q}=\frac{x}{۲^m}+\frac{y}{c}\in A+B$ یعنی $Q=A+B$.

۹) مثالی از تابعی پیوسته و غیرثابت مانند $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ارائه کنید به طوری که برای هر x مثبت $f(2x)f(x)\leq 0$.

پاسخ:

روش اول برای مثال فرض کنید $g(x)$ تابعی غیر ثابت، نامنفی و پیوسته در بازه $[1,2]$ باشد که $g(1)=g(2)=0$. برای هر $2^n\leq x<2^{n+1}$ که $n\in\mathbb{Z}$ قرار می‌دهیم $f(x)=(-1)^n g(x)$. تابع ارائه شده پیوسته است و با توجه به اینکه برای هر عدد مثبت x ، x و $2x$ در دو بازه متوالی به شکل $[2^n,2^{n+1})$ قرار می‌گیرند شرط $f(x)f(2x)\leq 0$ نتیجه می‌شود.

روش دوم تابع $f(x)=\sin(\pi\log_2(x))$ یک مثال با ویژگی‌های سوال است.

۱۰) فرض کنید $M_n(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ حقیقی و $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ تابعی باشد که برای هر $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ وارون‌پذیر $\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$. ثابت کنید برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

پاسخ:

توجه کنید که $\varphi(۲I) = ۲\varphi(I)$. همچنین $\varphi(I) = \varphi(۲I + (-I)) = \varphi(۲I) + \varphi(-I) = ۲\varphi(I) + \varphi(-I)$ در نتیجه $\varphi(P) + \varphi(-P) = ۰$. پس برای هر P وارون پذیر، $\varphi(۰) = \varphi(I + (-I)) = \varphi(I) + \varphi(-I) = ۰$. فرض کنید $f(x) = \det(A - xI)$ و $g(x) = \det(B + xI)$. عدد حقیقی $\lambda \neq ۰$ را طوری بگیرید که ریشه $f(x)$ و $g(x)$ نباشد. در این صورت $A - \lambda I$ و $B + \lambda I$ وارون پذیرند. پس طبق فرض

$$\begin{aligned} \varphi(A) = \varphi(A - \lambda I + \lambda I) = &\quad \varphi(A - \lambda I) + \varphi(\lambda I) \\ \varphi(B) = \varphi(B + \lambda I - \lambda I) = &\quad \varphi(B + \lambda I) + \varphi(-\lambda I) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \varphi(A) + \varphi(B) &= \varphi(A - \lambda I) + \varphi(\lambda I) + \varphi(-\lambda I) + \varphi(B + \lambda I) \\ &= \varphi(A - \lambda I) + \varphi(B + \lambda I) = \varphi(A - \lambda I + B + \lambda I) \\ &= \varphi(A + B) \end{aligned}$$

۱۱) فرض کنید $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ اعدادی حقیقی هستند و $1 \leq \beta < \alpha$. ثابت کنید سری زیر همگراست.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x_n - x_{n-1})^\beta}{x_n^\alpha}$$

پاسخ: راه اول

لم. ثابت $C > 0$ وجود دارد که برای هر $0 < x < y$ داریم

$$\frac{(y-x)^\beta}{y^\alpha} < C(x^{\beta-\alpha} - y^{\beta-\alpha})$$

اثبات لم. اگر قرار دهیم $t = \frac{y}{x}$، آنگاه کافی است ثابت کنیم برای هر $t > 1$،

$$f(t) = \frac{(t-1)^\beta}{t^\alpha - t^\beta} < C$$

چون $\alpha > \beta$،

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

همچنین بنابر قضیهٔ هوپیتال

$$\lim_{t\to 1^+} f(t) = \lim_{t\to 1^+} \frac{\beta(t-1)^{\beta-1}}{\alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\beta-1}} = 0$$

پس $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to 1^+} f(t) = 0$ و چون f روی $(1, \infty)$ پیوسته است بنابراین کراندار است. پس عدد $C > 0$ وجود دارد که برای هر $t > 1$، $f(t) < C$.

حال به اثبات مسأله اصلی بازمی‌گردیم. بنابر لم بالا برای هر k داریم:

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{(x_n - x_{n-1})^\beta}{x_n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{k} C(x_{n-1}^{\beta-\alpha} - x_n^{\beta-\alpha}) = C(x_1^{\beta-\alpha} - x_k^{\beta-\alpha}) < Cx_1^{\beta-\alpha}$$

پس مجموع‌های جزئیِ سری، کراندار هستند و چون سری نامنفی است پس همگرا است.

راه دوم

داریم

$$\frac{(x_n - x_{n-1})^\beta}{x_n^\alpha} \leq \frac{(x_n - x_{n-1})x_n^{\beta-1}}{x_n^\alpha} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^{\alpha-\beta+1}}$$

حال با توجه به این‌که تابع $\frac{1}{x^{\alpha-\beta+1}}$ نزولی است،

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x_n - x_{n-1})^\beta}{x_n^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n^{\alpha-\beta+1}}$$
$$\leq \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\beta+1}} = \frac{1}{\alpha-\beta} x_1^{\beta-\alpha}$$

۱۲) ثابت کنید زیرمجموعه‌های $A_1, A_2, A_3, \ldots$ از اعداد طبیعی وجود دارند به طوری که برای هر دو عدد طبیعی i و j (نه لزوماً متمایز) تعداد اعضای $A_i \cap A_j$ برابر با بزرگترین مقسوم علیه مشترک i و j است.

پاسخ:

روش اول قبل از هر چیز توجه کنید که اگر خانواده‌ی $A_1, A_2, \ldots$ در شرایط مساله صدق کنند آنگاه به راحتی نتیجه می‌شود،

- با قرار دادن $i = j$ نتیجه می‌شود که $|A_i| = i$.
- اگر j بر i بخش‌پذیر باشد آنگاه $A_i \cap A_j$ دقیقا i عضو دارد و چون A_i خود i عضوی است بنابراین $A_i \cap A_j = A_i$
- برای دو عدد دلخواه i و j، $A_i \cap A_j$ یک مجموعه‌ی (i,j) عضوی است. حال $A_{(i,j)}$ از یک سو طبق نکته‌ی اول یک مجموعه‌ی (i,j) عضوی است و از طرفی طبق نکته‌ی دوم زیرمجموعه‌ی هر دو مجموعه‌ی A_i و A_j است. پس $A_i \cap A_j = A_{(i,j)}$.

حال مجموعه‌های مورد نظر را به شکل استقرایی می‌سازیم. ابتدا قرار می‌دهیم $A_1 = \{1\}$ و فرض کنید مجموعه‌های $A_1, \ldots, A_{n-1}$ ساخته شده‌اند به طوری که در شرایط مساله صدق می‌کنند. قصد داریم مجموعه‌ی n عضوی A_n را به گونه‌ای بسازیم که $A_k \cap A_n$ برای هر $k < n$، (k,n) عضوی باشد.

فرض کنید عوامل اول n برابر با $p_1, \ldots, p_m$ باشند. با توجه به نکته‌ی دوم واضح است که $A_{\frac{n}{p_j}}$ زیرمجموعه‌ای از A_n است. بنابراین باید داشته باشیم

$$A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}} \subset A_n.$$

در ادامه تعداد اعضای $A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}$ را محاسبه می‌کنیم. می‌توان این مجموع را مستقیم به کمک اصل شمول و عدم شمول محاسبه کرد یا به عنوان روشی دیگر می‌توان برای هر $1 \leq j \leq m$، B_j را برابر با اعدادی از یک تا n قرار داد که بر p_j بخش‌پذیرند. در این‌صورت واضح است که برای هر l،

$$|B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_l}| = \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_l}} = |A_{\frac{n}{p_{i_1}}} \cap \ldots \cap A_{\frac{n}{p_{i_l}}}|$$

و بنابراین طبق اصل شمول و عدم شمول تعداد اعضای $A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}$ برابر با تعداد اعضای $B_1 \cup \ldots \cup B_m$ است و مجموعه‌ی آخر برابر با اعدادی از یک تا n هستند که نسبت به n اول نیستند لذا تعدادی برابر با $n - \varphi(n)$ دارند.

حال فرض کنید t بزرگترین عدد در $A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ باشد تعریف می‌کنیم،

$$A_n := (A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}) \cup \{t+1, \ldots, t+\varphi(n)\}.$$

با توجه به محاسبه‌ی قبل A_n، n عضو دارد و بنابراین برای اتمام اثبات کافیست نشان دهیم برای هر $k < n$، $A_k \cap A_n$، (k,n) عضوی است. داریم،

$$A_k \cap A_n = A_k \cap (A_{\frac{n}{p_1}} \cup \ldots \cup A_{\frac{n}{p_m}}) = (A_k \cap A_{\frac{n}{p_1}}) \cup \ldots \cup (A_k \cap A_{\frac{n}{p_m}}) = A_{(k,\frac{n}{p_1})} \cup \ldots \cup A_{(k,\frac{n}{p_m})}.$$

حال توجه کنید که برای هر j، $(k, \frac{n}{p_j}) | (k,n)$ و لذا $A_{(k,\frac{n}{p_j})} \subset A_{(k,n)}$ همچنین اندیس jای یافت می‌شود که $(k, \frac{n}{p_j}) = (k,n)$ (توجه کنید که $k < n$) و بنابراین $A_{(k,\frac{n}{p_1})} \cup \ldots \cup A_{(k,\frac{n}{p_m})} = A_{(k,n)}$.

روش دوم عدد طبیعی n را دلخواه بگیرید. فرض کنید تجزیه n به عوامل اول به شکل $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ باشد. قرار می‌دهیم،

$$A_n = \{p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k} : 0 \leq \beta_1 \leq p_1^{\alpha_1} - 1, \ldots, 0 \leq \beta_k \leq p_k^{\alpha_k} - 1\}.$$

نشان می‌دهیم $A_1, A_2, \ldots$ در شرایط مساله صدق می‌کنند. فرض کنید i و j دو عدد طبیعی دلخواه باشند. می‌نویسیم،

$$i = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \quad , \quad j = p_1^{\alpha'_1} \ldots p_k^{\alpha'_k},$$

که $\alpha_j, \alpha'_j \geq 0$ برای هر $1 \leq j \leq k$. با توجه به تعریف، می‌توان نشان داد اشتراک A_i و A_j مجموعه اعدادی هستند به شکل $p_1^{\beta_1} ... p_k^{\beta_k}$ که $0 \leq \beta_j \leq \min\{p_j^{\alpha_j} - 1, p_j^{\alpha'_j} - 1\}$ برای هر $1 \leq j \leq k$. در نتیجه تعداد اعضای $A_i \cap A_j$ برابر است با،

$$p_1^{\min\{\alpha_1, \alpha'_1\}} ... p_k^{\min\{\alpha_k, \alpha'_k\}}$$

که این نیز برابر با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک i و j است.