آزمون نـــوبت اول

ســی و نهمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ اول ۹۴/۲/۲۲

دانشگاه یزد

انجمن ریاضی ایران

IRANIAN MATHEMATICAL SOCIETY

---

۱) فرض کنید X یک مجموعه‌ی n عضوی بوده و $P(X)$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های X باشد. تعداد توابع $f : P(X) \to \{0, 1\}$ را تعیین کنید که $f(\emptyset) = 0$ و برای هر $A, B \in P(X)$،

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

۲) فرض کنید f روی گوی بازی به مرکز a تحلیلی باشد و γ یک خم ساده بسته در این گوی باشد که از a نمی‌گذرد. نشان دهید تابعی تحلیلی مانند g روی این گوی وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^n} dz = \int_\gamma \frac{\sqrt{n} f(z)}{(z-a)^n} dz$$

۳) فرض کنید R حلقه‌ای یکدار و $\mathbb{C}$ حلقه‌ی اعداد مختلط باشد. فرض کنید $f, g : R \to \mathbb{C}$ دو همریختی حلقه‌ای باشند به طوری که به ازای هر $r \in R$، $|f(r)| = |g(r)|$. ثابت کنید $f = g$ یا $f = \overline{g}$.
(تابع T از حلقه A به حلقه B همریختی نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in A$، $T(x+y) = T(x) + T(y)$ و $T(xy) = T(x)T(y)$.)

۴) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. تابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{R}$ را «خوب» گوییم هرگاه برای هر تابع پیوسته‌ی $g : X \to \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x)g(x) = 1\}$ فشرده باشد. نشان دهید مجموع دو تابع خوب، خوب است.

۵) فرض کنید $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد به طوری که

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$$

ثابت کنید f دارای حداقل دو ریشه در $[0, \pi]$ است.

۶) مجموعه‌ی $\mathbb{C}^n$ را به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. بیشترین بعد یک زیرفضای $\mathbb{C}^n$ را بیابید که زیر مجموعه‌ی $A = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}$ باشد.

موفق باشید.