پاسخ آزمون نـــوبت دوم

ســـی و نهمین مســـــابقهٔ

ریاضی دانشـــــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۴/۲/۲۳

---

۷) نشان دهید یک فضای متریک موجود است که دارای نقطهٔ حدی است و هر گوی باز آن بسته است.

پاسخ:

فرض کنید $X = \{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{۰\}$ و

$$d(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{اگر } x \neq y \\ ۰ & \text{اگر } x = y \end{cases}$$

در این صورت (X,d) یک فضای متریک است که ۰ نقطهٔ حدی آن است و برای هر $x \in X$ و $r > ۰$، گوی باز $B_r(x)$ یا تک عضوی است و یا برای یک $N \geq ۱$ برابر با $\{\frac{۱}{n} : n \geq N\} \cup \{۰, x\}$ است که در هر حالت یک مجموعهٔ بسته است.

۸) فرض کنید F یک میدان باشد و قرار دهید

$$R = \{a_۰ + a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq ۲,\ a_i \in F\}$$

به وضوح R با جمع و ضرب معمولی چندجمله‌ای‌ها یک حلقه‌ی یکدار و جابجائی است. نشان دهید R یک حوزه ایده‌آل اصلی (PID) نمی‌باشد.

پاسخ:

قرار می‌دهیم $I = \{a_۲x^۲ + \cdots + a_nx^n | n \geq ۲, a_i \in F\}$. نشان می‌دهیم I یک ایده‌آل R است که اصلی نیست. در حقیقت اگر I اصلی و توسط $f(x)$ تولید شود و چون $x^۲ \in I = (f(x))$ پس $g(x) \in R$ موجود است که $x^۲ = g(x)f(x)$. چون $\deg f(x) \geq ۲$ ، لذا $g(x) = a$ ثابت است و در نتیجه $x^۲ = af(x)$ بنابراین $I = (x^۲)$. اما به وضوح $x^۳ \notin (x^۲)$ ولی $x^۳ \in I$ که تناقض است.

۹) ثابت کنید اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک را می‌توانیم در یک دنباله چنان قرار دهیم که هر عدد دقیقاً یک بار ظاهر شود و هیچ دو جملۀ متوالی نسبت به هم اول نباشند.

پاسخ:

راه‌های بسیاری برای این کار وجود دارد. مثلاً ابتدا قرار می‌دهیم

$$2!, 2, 3!, 3, 4!, 4, \ldots$$

یعنی این دنباله بصورت $a_{2n-1} = (n+1)!$ و $a_{2n} = n+1$ برای $n = 1, 2, 3, \ldots$ تعریف می‌شود. معلوم است که در این دنباله هیچ دو جمله‌ای متوالی نسبت به هم اول نیستند؛ زیرا دوجمله متوالی بصورت $k!, k$ و یا $k, (k+1)!$، $k \geq 2$ می‌باشند. همچنین توجه می‌کنیم که در دنبالۀ فوق هر زیردنباله از جملات زوج راحذف کنیم، مجدداً در دنبالۀ باقیمانده هیچ دو جملۀ متوالی نسبت به هم اول نخواهند بود. زیرا پس از حذف تعدادی از جملات زوج، جملات فردی از دنبالۀ $\{a_n\}$ که اکنون پشت سرهم قرار می‌گیرند، بصورت فاکتوریل می‌باشند.

به علاوه هر عدد طبیعی بزرگتر از یک، اگر بصورت فاکتوریل نباشد تنها یکبار و اگر بصورت فاکتوریل باشد، دقیقاً دوبار در دنبالۀ $\{a_n\}$ ظاهر می‌شود. بار اول در یک جملۀ فرد و بار بعدی در یک جملۀ زوج.

حال کافی است جملات زوج دنبالۀ $\{a_n\}$ را که به صورت فاکتوریل هستند حذف کنیم تا دنباله‌ای بدست آید که هر عدد طبیعی بزرگتر از یک در آن یکبار ظاهر شده و هیچ دو جمله‌ای متوالی نسبت به هم اول نیستند.

۱۰) فرض کنید p یک عدد اول فرد و G یک گروه از مرتبه $4p$ باشد. به علاوه فرض کنید G دارای یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ باشد. نشان دهید G دارای حداقل $2p-2$ عضو از مرتبه بزرگ‌تر از ۲ است.

پاسخ: اگر G دارای یک عضو از مرتبه $2p$ باشدآنگاه حداقل $\varphi(2p)=p-1$ عضو از مرتبه $2p$ و حداقل $\varphi(p)=p-1$ عضو از مرتبه p خواهد داشت و حکم ثابت می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که G هیچ عضو از مرتبه $2p$ ندارد.

فرض کنید $a\in G$ یک عضو از مرتبه p باشد. گروه P تولید شده بوسیله a را درنظر می‌گیریم. اگر P در G نرمال نباشد در این صورت یک عضو $g\in G$ وجود خواهد داشت بطوریکه $P\neq gPg^{-1}$. در این صورت

$$|P\cup gPg^{-1}|=|P|+|gPg^{-1}|-|P\cap gPg^{-1}|=2p-1$$

بنابراین اگر عضو همانی در $P\cup gPg^{-1}$ را کنار بگذاریم، حداقل $2p-2$ عضو از مرتبه p در G وجود خواهند داشت و حکم ثابت می‌شود.

بنابراین می‌توان فرض کرد که P در G نرمال است. فرض کنید $b\in G$ یک عضو از مرتبه ۲ باشد. از نرمال بودن P نتیجه می‌شود که $i\in\{1,2,\cdots,p-1\}$ وجود دارد بطوریکه $bab^{-1}=a^i$. از این رابطه بدست می‌آید $b^2ab^{-2}=a^{i^2}$ بنابراین $a=a^{i^2}$ در نتیجه $i=1$ یا $i=p-1$. اگر $i=1$ در اینصورت $ab=ba$ یک عضو از مرتبه $2p$ است که تناقض است پس $i=p-1$ در نتیجه خواهیم داشت

$$bab^{-1}=a^{-1} \qquad (*)$$

فرض کنید $H=\{1,x,y,z\}$ یک زیرگروه غیردوری از مرتبه ۴ در G باشد.

با توجه به $(*)$ داریم $xax^{-1}=a^{-1}$، $yay^{-1}=a^{-1}$ و $zaz^{-1}=a^{-1}$ بنابراین خواهیم داشت

$$a^{-1}=zaz^{-1}=(xy)a(xy)^{-1}=xa^{-1}x^{-1}=a$$

که تناقض است.

۱۱) فرض کنید $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با مقادیر صحیح باشند. قرار دهید $f(n) = n + U_n$ و $A = \{n \in \mathbb{Z} : f(n) = 0\}$. نشان دهید $\mathbb{E}[|A|] = 1$.

پاسخ:

قرار دهید

$$X_n = \begin{cases} 1 & f(n) = 0 \\ 0 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین

$$\mathbb{E}[|A|] = \mathbb{E}[\sum_{n\in\mathbb{Z}} X_n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[X_n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[U_n = -n] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}[U_0 = -n] = 1$$

۱۲) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد به طوری که به ازای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ که بیش از یک نقطه دارد و اشتراکی از گوی‌های بسته است، $a \in A$ و $r > ۰$ وجود دارد که r از قطر A کمتر است و $A \subseteq D_r(a)$. ثابت کنید هر ایزومتری $f : X \to X$ یک نقطه ثابت دارد. $(D_r(a) = \{x \in X; d(x,a) \leq r\})$.

پاسخ:

فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی $A \subseteq X$ باشد که $f(A) \subseteq A$ و A اشتراکی از گوی‌های بسته باشد. خانوادهٔ $\mathcal{A}$ با ترتیب $\supseteq$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است و از قضیه اشتراکی کانتور نتیجه می‌شود که اشتراک هر زنجیر از اعضای $\mathcal{A}$ عضو $\mathcal{A}$ است. پس بنابه لم زُرن $\mathcal{A}$ دارای عضو مینیمال است. فرض کنید $A_۰$ یک عضو مینیمال $\mathcal{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم که $A_۰$ تک عضوی است و این یعنی f نقطهٔ ثابت دارد. اگر $A_۰$ دارای بیش از یک عضو باشد، یک $r > ۰$ کمتر از قطر $A_۰$ وجود دارد که مجموعهٔ $A_۱ = \{a \in A_۰ \mid A_۰ \subseteq D_r(a)\}$ ناتهی باشد. با کمک عضوگیری و اینکه f ایزومتری است نتیجه می‌شود که

$$A_۱ = A_۰ \cap \{D_r(a) \mid a \in A_۰\}$$

پس $A_۱$ نیز اشتراکی از گوی‌های بسته است و $f(A_۱) \subseteq A_۱$. یعنی $A_۱ \in \mathcal{A}$ پس $A_۱ = A_۰$.
از طرف دیگر برای هر $x, y \in A_۱$ داریم $x \in D_r(y)$ یعنی $d(x,y) \leq r$ پس $\mathrm{diam} A_۱ \leq r < \mathrm{diam} A_۰$ و این یک تناقض است.