به‌نام خدا

آزمون نـــوبت دوم

ســـی و هشتمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۳/۲/۲۴

---

۷) گروه متناهی G مفروض است به طوری که برای هر دو زیرگروه آن مانند H و K یا $H \cong K$ یا $H \subseteq K$ و یا $K \subseteq H$. ثابت کنید هر زیرگروه G را می‌توان با حداکثر ۲ عضو تولید کرد.

۸) آیا سری $\sum_{n=۱}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}(۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}})$ همگرا است؟ چرا؟

۹) فرض کنید G گرافی ساده (بدون طوقه و یال چندگانه) $۲n$ رأسی باشد که به هرگونه رأس‌های آن را به دو دستهٔ n رأسی $V_۱$ و $V_۲$ تقسیم کنیم تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۱$ با تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۲$ برابر است. نشان دهید درجه همه رئوس برابر است.

۱۰) فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی یک میدان F و $\{e_۱, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای از آن باشد. مجموعهٔ $P = \{\lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n : \lambda_i = ۰, ۱\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید برای هر زیرفضای m بعدی W از V تعداد اعضای مجموعهٔ $W \cap P$ کمتر یا مساوی با ۲^m است.

۱۱) اگر معادلهٔ $a^۲ + b^۲ + ۱ = abc$ در اعداد طبیعی دارای جواب باشد ثابت کنید $c = ۳$.

۱۲) فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از صفحهٔ مختلط شامل قرص یکهٔ بستهٔ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$ و f بر U تحلیلی باشد. نشان دهید اگر به ازای هر z که $|z| = ۱$ داشته باشیم $Re\ (\overline{z} f(z)) > ۰$ آن‌گاه f در $\mathbb{D}$ فقط یک ریشه دارد و آن ریشه ساده است.

موفق باشید.