

- (۱) فرض کنید  $A$  یک زیر مجموعه از اعداد گنگ باشد که مجموع هر دو عضو متمایز آن گویا است. ثابت کنید  $A$  حداکثر دو عضوی است.
- (۲) فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک همبند نانهی باشد به طوری که حد هر دنباله همگرا، جمله‌ای از آن دنباله باشد. ثابت کنید  $X$  تک عضوی است.
- (۳) فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار باشد به گونه‌ای که تعداد اعضای  $R$  برابر با  $p^3$  که در آن  $p$  عددی اول است، باشد. ثابت کنید اگر تعداد اعضای مجموعه  $zd(R)$  هم توانی از  $p$  باشد که در آن  $zd(R) = \{a \in R \mid \exists \circ \neq b \in R, ab = \circ\}$ ، آن‌گاه  $R$  تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.
- (۴) فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و تابع  $f: X \rightarrow X$  طوری باشد که برای هر  $x, y \in X$  داشته باشیم  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ .  
الف) ثابت کنید به ازای هر  $x \in X$ ،  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(x, f^n(x))}{n}$  موجود است، که در آن همان  $f \circ f \circ \dots \circ f$   $n$  مرتبه است.  
ب) ثابت کنید مقدار این حد به انتخاب  $x$  بستگی ندارد.
- (۵) فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گروه متناهی باشند به طوری که برای هر گروه متناهی  $H$  تعداد همریختی‌های گروهی از  $G_1$  به  $H$  با تعداد همریختی‌های گروهی از  $G_2$  به  $H$  برابر باشد. نشان دهید  $G_1$  و  $G_2$  یکرخت هستند.
- (۶) فرض کنید  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  ماتریسی  $n \times n$  باشد که درایه‌های آن همگی از اعداد  $\{1, \dots, n\}$  است. نشان دهید با جا به جایی ستون‌های  $A$  می‌توان به ماتریسی مانند  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$  رسید که  $K(B) \leq n$ . جایی که  $K(B)$  برابر است با تعداد اعضای مجموعه  $\{(i, j) ; b_{ij} = j\}$ .
- موفق باشید.