به‌نام خدا

پاسخ آزمون نـــوبت دوم

ســی و هشتمین مســـابقهٔ

ریاضی دانشـــجویی کشور

جلسهٔ دوم ۹۳/۲/۲۵

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته

انجمن ریاضی ایران

۷) گروه متناهی G مفروض است به طوری که برای هر دو زیرگروه آن مانند H و K یا $H \cong K$ یا $H \subseteq K$ و یا $K \subseteq H$. ثابت کنید هر زیرگروه G را می‌توان با حداکثر ۲ عضو تولید کرد.

پاسخ: کافی است نشان دهیم که هر زیرگروه از G که توسط ۳ عضو a, b, c تولید شده باشد توسط ۲ عضو هم تولید می‌شود. قرار می‌دهیم $H = \langle a, b\rangle$ و $K = \langle c\rangle$ اگر H دوری باشد مسأله حل است و اگر چنین نباشد پس $H \ncong K$ چون K دوری است. همچنین $H \nsubseteq K$ چون زیرگروه یک گروه دوری، باید دوری باشد. پس طبق فرض $K \subseteq H$ یعنی $c \in H$ و لذا زیرگروه $\langle a, b, c\rangle$ توسط a و b هم تولید می‌شود.

۸) آیا سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}})$ همگرا است؟ چرا؟

پاسخ: بله. قرار دهید $a_n = \cos n$ و $b_n = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}})$ در این صورت

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{n} \cos k| &= |\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n} e^{ik})| \\
&= |\mathrm{Re}(\frac{e^{i(n+1)} - e^{i}}{e^{i} - 1})| \\
&\leq |\frac{e^{i(n+1)} - e^{i}}{e^{i} - 1}| \\
&\leq \frac{2}{|e^{i} - 1|} \\
&= \frac{2}{\sqrt{(1 - \cos 1)^2 + \sin^2 1}}
\end{aligned}$$

از طرفی $\{b_n\}$ نزولی است زیرا

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \tfrac{1}{n+1}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{n+1}}) \\
&< \tfrac{1}{n+1}((1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}}) + \tfrac{1}{n}(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}})) = b_n
\end{aligned}$$

چون $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ و b_n دنبالهٔ میانگین‌های چزاروی آن است پس $b_n \to 0$. اکنون حکم از فرمول جمع‌بندی آبل نتیجه می‌شود.

۸) آیا سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})$ همگرا است؟ چرا؟

راه حل دوم : بله. قرار دهید $a_n=\cos n$ و $b_n=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}})$ در این صورت

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{n}\cos k| &= |\mathrm{Re}(\sum_{k=1}^{n}e^{ik})|\\
&= |\mathrm{Re}(\frac{e^{i(n+1)}-e^{i}}{e^{i}-1})|\\
&\leq |\frac{e^{i(n+1)}-e^{i}}{e^{i}-1}|\\
&\leq \frac{2}{|e^{i}-1|}\\
&= \frac{2}{\sqrt{(1-\cos 1)^2+\sin^2 1}}
\end{aligned}$$

از طرفی $\{b_n\}$ نزولی است زیرا چون $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ و b_n دنبالهٔ میانگین‌های چزاروی آن است پس $b_n\to 0$.
اکنون حکم

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{n+1}{n}.\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\\
&= \frac{n+1}{n+\frac{n/\sqrt{n+1}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}}
\end{aligned}$$

ولی

$$\frac{\frac{n}{\sqrt{n+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}\leq 1$$

پس $\frac{b_n}{b_{n+1}}\geq 1$، یعنی $\{b_n\}$ نزولی است. چون $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ و b_n دنبالهٔ میانگین‌های چزاروی آن است پس $b_n\to 0$. اکنون حکم از فرمول جمع‌بندی آبل نتیجه می‌شود.

۹) فرض کنید G گرافی ساده (بدون طوقه و یال چندگانه) $۲n$ رأسی باشد که به هرگونه رأس‌های آن را به دو دستهٔ n رأسی $V_۱$ و $V_۲$ تقسیم کنیم تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۱$ با تعداد یال‌های بین رأس‌های $V_۲$ برابر است. نشان دهید درجه همه رئوس برابر است.

پاسخ:

رئوس را بر اساس درجه‌شان به ترتیب نزولی $V_۱, \dots, V_{۲n}$ بنامید. اگر حکم سؤال برقرار نباشد یعنی $\deg V_۱ > \deg V_{۲n}$. حال قرار دهید $A = \{V_۱, \dots, V_n\}$ و $B = \{V_{n+۱}, \dots, V_{۲n}\}$. اگر l تعداد یال‌های بین رئوس A و رئوس B باشد و e_A و e_B به ترتیب تعداد یال‌های بین رئوس A و تعداد یال‌های بین رئوس B باشد، داریم

$$\deg V_۱ + \cdots + \deg V_n = ۲e_A + l$$
$$\deg V_{n+۱} + \cdots + \deg V_{۲n} = ۲e_B + l$$

با توجه به نحوهٔ شماره‌گذاری و این فرض که $\deg V_۱ > \deg V_{۲n}$، داریم $۲e_A + l > ۲e_b + l$ که در نتیجه $e_A > e_B$ که خلاف فرض سؤال است.

۱۰) فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی روی یک میدان F و $\{e_۱,\dots,e_n\}$ پایه‌ای از آن باشد. مجموعهٔ $P=\{\lambda_۱e_۱+\cdots+\lambda_ne_n:\lambda_i=۰,۱\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید برای هر زیرفضای m بعدی W از V تعداد اعضای مجموعهٔ $W\cap P$ کمتر یا مساوی با ۲^m است.

پاسخ: پایه‌ای مانند $\{w_۱,\dots,w_m\}$ از W را در نظر گیرید. هر عضو $x\in W\cap P$ را می‌توان به صورت

$$x=x_۱w_۱+\cdots+x_mw_m\ ,\ x_i\in F \qquad (۱)$$

نوشت. همچنین می‌توان نوشت

$$w_i=\mu_{i۱}\ e_۱+\cdots+\mu_{in}e_n\ ,\mu_{ij}\in F, i=۱,\dots,m \qquad (۲)$$

و

$$x=\lambda_۱e_۱+\cdots+\lambda_ne_n,\ \lambda_i=۰,۱ \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) به دستگاه معادلات

$$\begin{cases}\mu_{۱۱}x_۱+\mu_{۲۱}x_۲+\cdots+\mu_{m۱}x_m=\lambda_۱\\ \mu_{۱۲}x_۱+\mu_{۲۲}x_۲+\cdots+\mu_{m۲}x_m=\lambda_۲\\ \vdots\\ \mu_{۱n}x_۱+\mu_{۲n}x_۲+\cdots+\mu_{mn}x_m=\lambda_n\end{cases}$$

می‌رسیم. رتبهٔ این دستگاه با توجه به روابط (۲) برابر با m است. بنابراین $x_۱,\dots,x_m$ از m تا از این معادلات به طور کامل به دست می‌آیند و چون طرف دوم این m معادله حداکثر ۲^m انتخاب دارد پس حداکثر ۲^m جواب برای $(x_۱,\dots,x_m)$ به دست می‌آید و از رابطه (۱) حکم نتیجه می‌شود.

۱۱) اگر معادلهٔ $a^۲ + b^۲ + ۱ = abc$ در اعداد طبیعی دارای جواب باشد ثابت کنید $c = ۳$.

پاسخ:

اگر $a = b$، آنگاه $۲a^۲ + ۱ = ca^۲$ که ایجاب می‌کند $a = ۱$ و $c = ۳$. اگر $a \neq b$ بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $b < a$. فرض کنید (a, b, c) جوابی با $b < a$ و با کمترین مقدار ممکن برای $a + b$ باشد. اگر قرار دهیم $a' = b$ و $b' = bc - \alpha$ آنگاه (a', b', c') نیز جوابی از معادله خواهد بود. از طرفی داریم

$$b' = bc - a = \frac{b^۲ + ۱}{a} \leq \frac{b(b + ۱)}{a} \leq a' \qquad (*)$$

و همچنین $a' = b < a$ و $۰ < a' < b$. چون $a' + b' < a + b$ و با توجه به این که $a + b$ کمترین مقدار ممکن در بین جواب‌های با $b < a$ بوده است لازم می‌آید که $b' = a'$. حال (a', b', c) جوابی از معادله با $a' = b'$ است که مانند بالا ایجاب می‌کند $c = ۳$.

۱۲) فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از صفحهٔ مختلط شامل قرص یکهٔ بستهٔ $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ و f بر U تحلیلی باشد. نشان دهید اگر به ازای هر z که $|z| = 1$ داشته باشیم $Re\,(\overline{z}f(z)) > 0$ آن‌گاه f در $\mathbb{D}$ فقط یک ریشه دارد و آن ریشه ساده است.

پاسخ: مرز $\mathbb{D}$ فشرده و تابع $z \mapsto Re(\overline{z}f(z))$ پیوسته است پس $0 < m := \min\{Re(\overline{z}f(z)) : |z| = 1\}$.

اکنون برای هر z که $|z| = 1$ اعداد مختلط $\bar{z}f(z)$ و $\bar{z}f(z) - m$ دارای بخش‌های موهومی برابرند در حالی که بخش حقیقی عدد دوم کوچک‌تر است. پس

$$|\overline{z}f(z) - m| < |\overline{z}f(z)|$$

با ضرب دو طرف در $|z|$ داریم

$$|f(z) - mz| < |f(z)|$$

برای هر z که $|z| = 1$. اکنون بنابه قضیهٔ روشه درون $\mathbb{D}$ تعداد ریشه‌های $f(z)$ با تعداد ریشه‌های $g(z) = mz$ برابر است. یعنی f دقیقاً یک ریشه دارد و آن ریشه ساده است.