پاسخ آزمون نوبت اول
سی و هشتمین مسابقهٔ
ریاضی دانشجویی کشور
جلسهٔ اول ۹۳/۲/۲۳

۱) فرض کنید A یک زیر مجموعه از اعداد گنگ باشد که مجموع هر دو عضو متمایز آن گویا است. ثابت کنید A حداکثر دو عضوی است.

پاسخ: به روش برهان خلف فرض کنیم x_1، x_2 و x_3 اعداد گنگ باشند که مجموع هر دوتای متمایز آن‌ها گویا است. پس $x_1 + x_2$، $x_1 + x_3$ و $x_2 + x_3$ هر سه گویا هستند. بنابراین x_1 هم گویا است چون $x_1 = \frac{1}{2}\Big((x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) - (x_2 + x_3)\Big)$.

۲) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک همبند ناتهی باشد به طوری که حد هر دنبالهٔ همگرا، جمله‌ای از آن دنباله باشد. ثابت کنید X تک عضوی است.

پاسخ:

ادعا می‌کنیم هر زیرمجموعه از X بسته است. فرض کنیم A زیرمجموعهٔ دلخواهی از X باشد و $x \in \overline{A}$. پس دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A هست که $x_n \to x$. اما با توجه به فرض مسأله داریم $x \in \{x_n : n \geq ۱\} \subseteq A$. در نتیجه $x \in A$ و لذا A بسته است.

اکنون فرض کنیم $x_۰$ عضوی از X باشد. چون $\{x_۰\}$ و $X \setminus \{x_۰\}$ بسته و مجزا هستند پس از هم جدا شده‌اند و لذا با توجه به همبند بودن X باید داشته باشیم $X \setminus \{x_۰\} = \emptyset$. در نتیجه $X = \{x_۰\}$

۳) فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد به گونه‌ای که تعداد اعضای R برابر با $p^{۳}$ که در آن p عددی اول است، باشد. ثابت کنید اگر تعداد اعضای مجموعهٔ $zd(R)$ هم توانی از p باشد که در آن $zd(R) = \{a \in R | \ \exists \ ۰ \neq b \in R, ab = ۰\}$، آن‌گاه R تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

پاسخ:

فرض می‌کنیم R جا به جایی و یکدار، $|R| = p^{۳}$ و $|zd(R)|$ هم توانی از p باشد. می‌دانیم چون R متناهی است هر عضو یا یکه است یا مقسوم علیه صفر است. به روش برهان خلف فرض می‌کنیم $M_{۱}$ و $M_{۲}$ دو ایده‌آل ماکسیمال R باشند واضح است که $|M_{۱}| \leq p^{۲}$ و $|M_{۲}| \leq p^{۲}$ هر دو توانی از p هستند. اگر $M_{۱} \cap M_{۲} = (۰)$ آنگاه بنا به قضیه باقیمانده چینی $R \simeq \frac{R}{M_{۱}} \times \frac{R}{M_{۲}}$ که در این حالت تعداد مقسوم‌علیه‌های صفر R یعنی $|zd(R)|$ توانی از p نخواهد بود چون در این حالت

$$|zd(R)| = |\frac{R}{M_{۱}} \times (۰)| + |(۰) \times \frac{R}{M_{۱}}| - ۱$$

پس $M_{۱} \cap M_{۲} \neq (۰)$ و لذا $|M_{۱} \cap M_{۲}| = p$ و در نتیجه $|M_{۱}| = |M_{۲}| = p^{۲}$ بنابراین

$$|M_{۱} \cup M_{۲}| = |M_{۱}| + |M_{۲}| - |M_{۱} \cap M_{۲}| = ۲p^{۲} - p = p(۲p - ۱) > p^{۲}$$

اما اعضای $M_{۱} \cup M_{۲}$ مقسوم‌علیه صفر هستند که تناقض است .

۴) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و تابع $f:X\to X$ طوری باشد که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم $d(f(x),f(y))=d(x,y)$.

الف) ثابت کنید به ازای هر $x\in X$، $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{d(x,f^n(x))}{n}$ موجود است، که در آن f^n همان $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ مرتبه}}$ است.

ب) ثابت کنید مقدار این حد به انتخاب x بستگی ندارد.

پاسخ: برای $x\in X$ و $n\in\mathbb{N}$ قرار دهید $a_n=d(x,f^n(x))$. برای هر $m,n\in\mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned}0 &\le a_{m+n}=d(x,f^{m+n}(x))\le d(x,f^n(x))+d(f^n(x),f^{n+m}(x))\\ &=d(x,f^n(x))+d(x,f^m(x))=a_n+a_m\end{aligned}$$

با تقسیم n بر m اعداد صحیح q و r موجودند که $n=mq+r,\quad 0\le r<m$. پس
$a_n\le qa_m+a_r\Rightarrow \frac{a_n}{n}\le\frac{qm}{n}\,\dfrac{a_m}{m}+\dfrac{ar}{n}$

چون $1\le\frac{qm}{n}\le 0$ و $a_r\le\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{m-1}\}$ پس اگر وقتی $n\to+\infty$ حد بگیریم خواهیم داشت

$$0\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\le\frac{a_m}{m}\ ,\ \forall m\ge 1$$

اکنون اگر وقتی $m\to+\infty$ حد بگیریم خواهیم داشت

$$0\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\le\liminf_{m\to+\infty}\frac{a_m}{m}$$

و این یعنی $\varphi(x):=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{d(x,f^n(x))}{n}$ موجود است.

ب) برای هر $x,y\in X$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم

$$d(x,f^n(x))\le d(x,y)+d(y,f^n(y))+d(f^n(y),f^n(x))=2d(x,y)+d(y,f^n(y))$$

با تقسیم دوطرف بر n و حد گرفتن وقتی $n\to+\infty$ خواهیم داشت

$$\varphi(x)\le\varphi(y)$$

و با تعویض جای x,y داریم $\varphi(y)\le\varphi(x)$ پس $\varphi(x)=\varphi(y)$.

۵) فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه متناهی باشند به طوری که برای هر گروه متناهی H تعداد همریختی‌های گروهی از G_1 به H با تعداد همریختی‌های گروهی از G_2 به H برابر باشد. نشان دهید G_1 و G_2 یکریخت هستند.

پاسخ:

برای دو گروه G و H تعداد همریختی‌های از G به H را با $h_G(H)$ و تعداد همریختی‌های پوشای از G به H را با $h_G^s(H)$ نمایش می‌دهیم.

ابتدا نشان می‌دهیم از مفروضات مسأله بدست می‌آید $h_{G_1}^s(H) = h_{G_2}^s(H)$. این حکم را با استقرا روی مرتبه H ثابت می‌کنیم.

اگر $|H| = 1$ در این صورت $h_{G_1}^s(H) = h_{G_2}^s(H) = 1$

اگر $|H| > 1$ در این صورت $H_1, H_2, \dots, H_m$ را همه زیرگروه‌های سره H بگیرید. داریم

$$h_{G_1}(H) = h_{G_1}^s(H) + \sum_{i=1}^{m} h_{G_1}^s(H_i) \qquad (1)$$

$$h_{G_2}(H) = h_{G_2}^s(H) + \sum_{i=1}^{m} h_{G_2}^s(H_i) \qquad (2)$$

با توجه به مفروضات مسأله $h_{G_1}(H) = h_{G_2}(H)$ و از فرض استقرا داریم $h_{G_1}^s(H_i) = h_{G_2}^s(H_i)$ برای $i = 1, \dots, m$. بنابراین روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌دهند $h_{G_1}^s(H) = h_{G_2}^s(H)$.

به ویژه نتیجه می‌شود یک همریختی پوشا از G_1 به G_2 و برعکس وجود دارد. بنابراین $|G_1| = |G_2|$ پس همان همریختی پوشای از G_1 به G_2، یک‌به‌یک هم است و در نتیجه $G_1 \simeq G_2$.

۶) فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ماتریسی $n\times n$ باشد که درایه‌های آن همگی از اعداد $\{1,\dots,n\}$ است. نشان دهید با جا به جایی ستون‌های A می‌توان به ماتریسی مانند $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ رسید که $K(B)\leq n$. جایی که $K(B)$ برابر است با تعداد اعضای مجموعه $\{(i,j)\ ;\ b_{ij}=j\}$.

پاسخ:

فرض کنید σ جایگشتی تصادفی روی اعداد $\{1,\dots,n\}$ باشد قرار دهید

$$X_{ij}=\begin{cases} 1 & a_{ij}=\sigma(j) \\ 0 & a_{ij}\neq\sigma(j) \end{cases}$$

می‌توان دید که اگر ماتریس A_σ این گونه تعریف شده باشد که ستون $\sigma(j)-$ ام A_σ برابر با ستون j ـ ام A باشد داریم

$$K(A_\sigma)=\sum_{i,j=1}^{n} X_{ij}.$$

اما $\mathbb{E}[X_{ij}]=\mathbb{P}(X_i,j=1)=\frac{1}{n}$ و در نتیجه طبق خطی بودن امید ریاضی داریم

$$\mathbb{E}[K(A_\sigma)]=\sum_{i,j=1}^{n}\mathbb{E}[X_{ij}]=n.$$

بنابراین جایگشتی مانند σ وجود دارد که $K(A_\sigma)\leq n$.