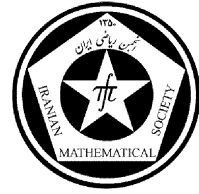




دانشگاه سمنان

آزمون نوبت اول
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه اول ۹۲/۲/۲۴
مدت امتحان: ۴ ساعت



انجمن ریاضی ایران

(۱) فرض کنید متریک d روی \mathbb{R} به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max\{|x|, |y|\} & x \neq y \end{cases}$$

ثابت کنید \mathbb{Q} در (\mathbb{R}, d) بسته است و باز نیست. (نیازی به اثبات متریک بودن d نیست.)

(۲) فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه فرد باشد. ثابت کنید عددی طبیعی چون k وجود دارد که به ازای هر $x \in G$ $x^{2^k} = x$.

(۳) معادله $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$ را در مجموعه اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید این معادله برای $k = 3$ دارای جواب است.

(ب) ثابت کنید این معادله برای تعداد نامتناهی عدد طبیعی و فرد k دارای جواب نیست.

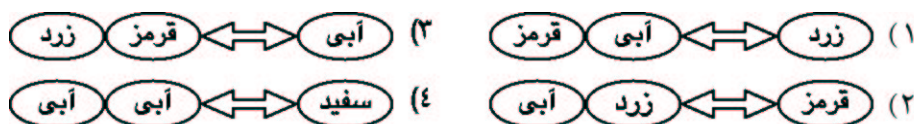
(۴) فرض کنید R یک حلقه جابجایی و متناهی باشد به طوری که هر عضو R را بتوان به صورت حاصلضرب دو عضو از R نوشت. ثابت کنید حلقه R یکدار است.

(۵) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده، همبند و ناتهی باشد. ثابت کنید عددی مانند β موجود است که برای هر $n \geq 1$ و هر $z_1, \dots, z_n \in X$ معادله $\frac{1}{n}(d(x, z_1) + \dots + d(x, z_n)) = \beta$ در X جواب دارد.

(۶) در یک بازی با مهره‌های سفید، قرمز، آبی و زرد، ۳۷۳۷ مهره قرمز، ۳۷۳۷ مهره آبی و ۳۷۳۷ مهره زرد به صورت زیر روی یک سطر چیده شده‌اند.



در هر حرکت می‌توان دو مهره سفید در محل‌های دلخواه بین مهره‌ها اضافه یا کم کرد. سایر حرکات بازی به صورت زیر است.



مثلاً حرکت اول یعنی اگر اولین مهره سمت راست یک مهره قرمز، یک مهره آبی باشد، با حذف این دو مهره می‌توان مهره‌ای زرد جایگزین کرد یا برعکس، یعنی به جای یک مهره زرد، دو مهره در کنار هم قرار داد که سمت راستی آبی و سمت چپی قرمز باشد. آیا از آرایش اولیه می‌توان به حالتی رسید که هیچ مهره‌ای باقی نماند؟

موفق باشید.