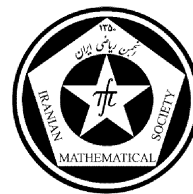




دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

(۷) فرض کنید $k > 1$ عددی حقیقی باشد. دنباله $\{a_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{ka_n}{k^{n+1} - 1}, \quad n \geq 0.$$

قرار می‌دهیم $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ (سری مذکور همواره همگرا است و تابع f در تمام \mathbb{R} پیوسته است. نیازی به اثبات این مطالب نیست.)

(الف) ثابت کنید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $f(kx) - f(x) = kxf(x)$.

(ب) تمام ریشه‌های f را بیابید.

پاسخ:

(الف)

$$\begin{aligned} f(kx) - f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(kx)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k^n - 1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ka_{n-1}x^n \\ &= kx \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ &= kxf(x) \end{aligned}$$

که تساوی سوم رابطه بازگشتی برای a_n است و این مطلب که $k^0 - 1 = 0$.

(ب) با توجه به قسمت (الف)

$$f(kx) = f(x)(1 + kx) \quad (*)$$

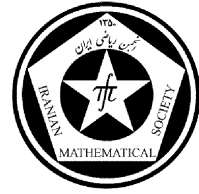
اگر قرار دهیم $x = -\frac{1}{k}$ عبارت داخل پرانتز در سمت راست تساوی برابر صفر خواهد بود و در نتیجه $f(-\frac{1}{k}) = f(x \times -\frac{1}{k}) = 0$. به وضوح تساوی (*) نتیجه می‌دهد اگر x ریشه تابع باشد، kx نیز هست و در نتیجه $-k^n$ برای n ‌های مختلف ریشه f هستند.

ادعا می‌کنیم f ریشه دیگری ندارد. اگر x ریشه‌ای به جز ریشه‌های ذکر شده باشد، برای هر n طبیعی نیز ریشه است. زیرا عبارت داخل پرانتز در سمت راست معادله هیچ وقت صفر نمی‌شود و در نتیجه هر عددی که ریشه f باشد، $\frac{1}{k}$ آن نیز ریشه f است. اما چون $k > 1$ ، $\frac{x-1}{k^n}$ وقتی n به بینهایت میل کند به صفر میل می‌کند و از پیوستگی f ، باید $f(0) = 0$ اما $f(0) = a_0 = 1 \neq 0$. پس f ریشه‌ای به جز موارد ذکر شده ندارد.



دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

۸) همه ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی مانند A را مشخص کنید به طوری که $A^2 = I$ و $\det(A) = 1$.

پاسخ:

راه حل اول:

با توجه به اینکه $A^2 = I$ ، چند جمله‌ای مینیمال A ، $X^2 - 1$ را عادی می‌کند. بنابراین چند جمله‌ای مینیمال A بطور کامل روی \mathbb{R} تجزیه می‌شود و ریشه تکراری ندارد بنابراین A قطری پذیر است. یعنی ماتریس وارون پذیر P روی \mathbb{R} وجود دارد به طوری که

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

از شرط $A^2 = I$ نتیجه می‌شود $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$ و از شرط $\det A = 1$ نتیجه می‌شود α, β یا هر دو برابر با ۱ هستند یا هر دو برابر با -۱. بنابراین ماتریس A دو انتخاب دارد: $A = I$ یا $A = -I$.

راه حل دوم:

فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. از آنجا که در چندجمله‌ای مشخصه خود صدق می‌کند داریم

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0.$$

یعنی $\text{tr}(A)A = (1 + \det(A))I$ و پس از جایگذاری به دست می‌آید:

$$(a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ad-bc & 0 \\ 0 & 1+ad-bc \end{pmatrix} \quad (*)$$

در نتیجه $a^2 + bc = 1 = d^2 + bc$ پس $a = \pm d$. اما حالت $a = -d$ ممکن نیست. چرا که به همراه $\det(A) = 1$ نتیجه می‌دهد $a^2 + bc = -1$ که با $a^2 + bc = 1$ تناقض دارد. پس $a = d$ و دوباره از رابطه (*) نتیجه می‌شود $2ad = 1 + ad - bc$ یعنی $ad + bc = 1$ و با توجه به رابطه $ad - bc = \det(A) = 1$ نتیجه می‌گیریم $ad = 1$.

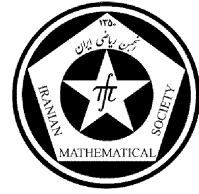
از طرف دیگر (*) نتیجه می‌دهد $bd = dc = 0$ که با ضرب طرفین در a بدست می‌آید $b = c = 0$ پس $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ و چون $A^2 = I$ پس $a^2 = 1$ یعنی $a = \pm 1$. پس برای A فقط دو انتخاب

وجود دارد؛ یکی $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و دیگری $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.



دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

(۹) فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

ثابت کنید f مینیمم خود را در یک و فقط یک نقطه می‌گیرد.

پاسخ:

چون f از پایین کراندار است پس $\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ یک عدد حقیقی است. دنباله $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$ موجود است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \alpha$.

برای هر $n, m \geq 1$ قرار دهید $\lambda = \frac{1}{4}$, $x = x_n$, $y = x_m$.

$$\alpha \leq f\left(\frac{x_n + x_m}{4}\right) \leq \frac{1}{4}f(x_n) + \frac{1}{4}f(x_m) - \frac{1}{4}\|x_n - x_m\|^2$$

پس $\|x_n - x_m\|^2 \leq \frac{1}{4}(f(x_n) - \alpha) + \frac{1}{4}(f(x_m) - \alpha)$ و با میل دادن m و n به سمت $+\infty$ نتیجه می‌شود دنباله $\{x_n\}$ کشی است. چون \mathbb{R}^2 کامل است پس $x \in \mathbb{R}^2$ موجود است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ولی f پیوسته است (هر تابع محدب روی \mathbb{R}^2 پیوسته است). پس

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

یعنی f مینیمم خود را در x می‌گیرد.

حال اگر f در x' نیز مینیمم خود را اتخاذ کند آنگاه

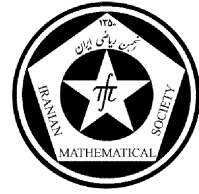
$$\alpha \leq f\left(\frac{x + x'}{4}\right) \leq \frac{1}{4}f(x) + \frac{1}{4}f(x') - \frac{1}{4}\|x - x'\|^2 = \alpha - \frac{1}{4}\|x - x'\|^2$$

پس $0 \leq \frac{1}{4}\|x - x'\|^2$ یعنی $x = x'$.



دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

۱۰ فرض کنید زیرمجموعه U از \mathbb{C} شامل قرص $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ باشد. ثابت کنید اگر $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد و برای هر $x \in [-1, 1]$ داشته باشیم $|f(x)| \leq 1$ آنگاه

$$\left| \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{f(e^{-it})} dt \right| \geq 4.$$

پاسخ:

چون f تحلیلی است پس تابع $\overline{f(\bar{z})}$ نیز تحلیلی است.

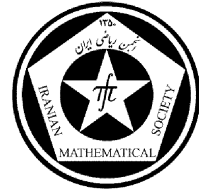
با تغییرمتغیر $z = e^{it}$ داریم $dz = ie^{it} dt = dz$ پس $dt = \frac{dz}{iz}$. بنابراین اگر γ دایره واحد به مرکز مبدا باشد بنا به فرمول انتگرال کشی داریم

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{f(e^{-it})} dt = \int_{\gamma} \frac{f(z) \overline{f(\bar{z})}}{iz} dz = \frac{2\pi i}{i} f(0) \overline{f(0)} = 2\pi |f(0)|^2 \geq 2\pi \geq 4$$



دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

(۱۱) فرض کنید X یک مجموعه متناهی n عضوی و S خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد به طوری که برای هر A و B در S داریم $A \cup B \in S$. هم‌چنین فرض کنید برای هر دو عضو متمایز X ، عضوی از S وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از آن‌ها است. ثابت کنید

$$\sum_{A \in S} |A| \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

پاسخ:

ابتدا گزاره زیر را اثبات می‌کنیم.

اگر $y \subseteq X$ و $|Y| \geq 2$ ، آنگاه عضوی از S وجود دارد که شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از آنها است. اثبات. به استقراء روی $|Y|$ انجام می‌شود. برای $|Y| = 2$ با توجه به خاصیت S نتیجه روشن است. برای $|Y| > 2$ ، عضوی از Y مانند y_1 را در نظر می‌گیریم. بنا بر فرض استقراء، عضوی مانند A از S وجود دارد که شامل تمام اعضای $Y - \{y_1\}$ به جز عضوی مانند y_2 است. اگر $y_1 \in A$ باشد همان عضو مطلوب S است. اگر $y_1 \notin A$ ، عضوی از S مانند B وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از y_1 یا y_2 می‌باشد. اکنون عضو $A \cup B$ از S شامل تمام اعضای Y به جز دقیقاً یکی از y_1 یا y_2 خواهد بود.

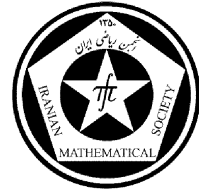
حال اگر گزاره فوق را برای $A_0 = X$ به کار ببریم، عضوی از S مانند A_1 وجود دارد که شامل دقیقاً یکی از اعضای X نیست که نام آن را x_1 می‌گذاریم. برای $i < n - 1$ ، فرض کنید A_1, \dots, A_i و x_1, \dots, x_i چنان انتخاب شده باشد که A_i شامل تمام اعضای A_{i-1} به جز x_i باشد. حال A_{i+1} را طوری از S انتخاب می‌کنیم که شامل تمام اعضای A_i به جز یکی از آنها باشد که نام آن را x_{i+1} می‌گذاریم. اعضای A_1, \dots, A_{n-1} که به این صورت انتخاب می‌شوند، متمایزند زیرا برای $1 < i < n$ داریم $x_i \notin A_i$ اما $x_i \in \bigcap_{j < i} A_j$. همچنین $|A_i| \geq n - i$ بنابراین داریم

$$\sum_{A \in S} |A| \geq |A_1| + \dots + |A_{n-1}| \geq n - 1 + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$



دانشگاه سمنان

پاسخ آزمون نوبت دوم
سی و هفتمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
جلسه دوم ۹۲/۲/۲۵



انجمن ریاضی ایران

۱۲) فرض کنید G یک گروه غیرآبلی متناهی باشد. نشان دهید اعضای $g, h, a \in G$ وجود دارند به طوری که
 $gh = hg$ و $h = aga^{-1}$ ، $g \neq h$.

پاسخ:

فرض کنید گروه G مثال نقضی برای حکم با کمترین تعداد عضو باشد. نتیجه می شود همه زیرگروه های ماکسیمال G آبلی هستند. نشان می دهیم هر زیرگروه ماکسیمال M از G غیر نرمال است؛ در واقع اگر M نرمال باشد، با در نظر گرفتن عضو $a \in G \setminus M$ نتیجه می شود $G = \langle M, a \rangle$ یعنی گروه تولید شده به وسیله a و M برابر با G می شود. حال عضو $g \in M$ را در نظر می گیریم. با توجه به این که فرض کرده ایم M نرمال است، نتیجه می شود $aga^{-1} \in M$ اگر $aga^{-1} \neq g$ با قرار دادن $h := aga^{-1}$ نتیجه می شود عناصر با خواص ذکر شده وجود دارند که متناقض با فرض خلف است. اگر برای هر $g \in M$ ، $aga^{-1} = g$ در این صورت $G = \langle M, a \rangle$ آبلی می شود که متناقض با فرض است. پس هر زیرگروه ماکسیمال از G غیر نرمال است.

نشان می دهیم $Z = Z(G)$ (مرکز G) زیرمجموعه هر زیرگروه ماکسیمال M از G است در غیر این صورت خواهیم داشت $ZM = G$ و G آبلی می شود که متناقض با فرض است. از اینجا نتیجه می شود برای هر دو زیرگروه ماکسیمال متمایز M و M' از G داریم $M \cap M' = Z$ ؛ در واقع هر عضو $M \cap M'$ با توجه به آبلی بودن M و M' با همه عناصر M و M' جابجا می شود، بنابراین با هر عضو $G = \langle M, M' \rangle$ جابجا می شود پس در مرکز G قرار دارد.

حال گروه $H = G/Z$ را در نظر می گیریم. دقت کنید که H گروه از مرتبه اول نیست پس دارای زیرگروه ماکسیمال غیربدیهی است. با توجه به مطالب بالا اشتراک هر دو زیرگروه ماکسیمال متمایز H بدیهی است. فرض کنید N_1, \dots, N_s همه زیرگروه های ماکسیمال و نامزدوج از H باشند و قرار می دهیم

$$h = |H|, \quad h_i = |N_i|, \quad i = 1, \dots, s$$

تعداد زیرگروه های ماکسیمال از H که با N_i مزدوج هستند برابر با h/h_i است و تعداد اعضای غیرهمانی در هر زیرگروه مزدوج با N_i برابر با $h_i - 1$ است. بنابراین با شمارش اعضای H به صورت اجتماع زیرگروه های ماکسیمال به رابطه

$$h = 1 + \sum_{i=1}^s h(h_i - 1)/h_i \quad (*)$$

می رسیم. ادعا می کنیم $s = 1$. در واقع اگر $s \geq 2$ رابطه (*) به تناقض زیر منجر می شود

$$h \geq 1 + h\left(\frac{h_1 - 1}{h_1} + \frac{h_2 - 1}{h_2}\right) \geq 1 + h$$

بنابراین $s = 1$ ، پس

$$h = 1 + h(h_1 - 1)/h_1$$

که نتیجه می دهد $h = h_1$ که تناقض است.