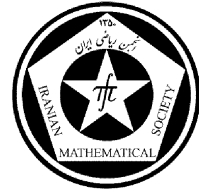




آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت



دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

انجمن ریاضی ایران

(۱) همه ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی مانند  $A$  را مشخص کنید که در شرط زیر صدق کنند:  
اگر  $v$  بردار ستونی دلخواه باشد که تمام درایه‌های آن ناصفر است، آنگاه همه درایه‌های  $Av$  نیز ناصفر باشد.

پاسخ:

نشان می‌دهیم ماتریس  $A$  در شرط مسأله صدق می‌کند اگر و تنها اگر در هر سطر  $A$  دقیقاً یک درایه غیر صفر موجود باشد.

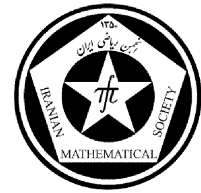
اگر در هر سطر  $A$  دقیقاً یک درایه غیر صفر باشد آنگاه به وضوح  $A$  در شرط مسأله صدق می‌کند. برعکس، فرض کنید  $A$  ماتریسی باشد که در شرط مسأله صدق کند و سطر اول آن را در نظر بگیرید. اگر همه درایه‌های این سطر صفر باشند، آنگاه برای هر  $v$ ، درایه اول  $Av$  نیز صفر است. بنابراین در سطر اول  $A$  باید حداقل یک درایه غیر صفر موجود باشد. از طرف دیگر اگر در سطر اول  $A$  بیش از یک درایه، مثلاً  $a_{1i}$  و  $a_{1j}$ ، غیر صفر باشند، اعداد  $r \neq 0$  و  $s \neq 0$  را چنان می‌گیریم که

$$a_{1i}r + a_{1j}s = \sum_{t \neq i,j} a_{1t}$$

و  $v$  را نیز برداری ستونی می‌گیریم که درایه  $i$ ام آن  $r$ ، درایه  $j$ ام آن  $s$  و مابقی درایه‌های آن ۱- هستند. در این صورت همه درایه‌های  $v$  غیر صفر هستند، اما درایه اول در  $Av$  صفر است. پس اگر  $A$  در شرایط مسأله صدق کند، آنگاه در سطر اول  $A$  دقیقاً یک درایه غیر صفر وجود دارد و استدلال مشابه نشان می‌دهد که در هر سطر دیگر  $A$  نیز دقیقاً یک درایه غیر صفر وجود دارد.



آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت



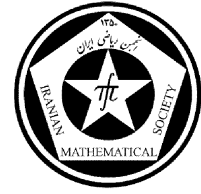
انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

(۲) فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی باشد که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  یک مجموعه باز  $U$  شامل  $x$  وجود داشته باشد که  
تحدید  $f$  به  $U$  یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید  $f$  یک چندجمله‌ای است.

پاسخ:

می‌دانیم که اگر دو چند جمله‌ای روی بازه ناتهی برابر باشند، با هم یکی هستند. فرض کنیم  $M > 0$  عدد  
حقیقی دلخواهی باشد. بازه  $K = [-M, M]$  را در نظر می‌گیریم. برای هر  $x \in K$  مجموعه باز  $U_x$   
موجود است که تحدید  $f$  روی  $U_x$  چندجمله‌ای است. چون  $K$  فشرده است پس  $x_1, x_2, \dots, x_n$  موجودند  
که  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . حال فرض کنیم تحدید  $f$  به  $U_{x_i}$  برابر  $P_i$  باشد و  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . در این صورت  
با توجه به این که  $U_{x_i} \cap U_{x_{i+1}} \neq \emptyset$  نتیجه می‌گیریم که  $P_i = P_{i+1}$ . بنابراین  $f$  روی  $K$  چندجمله‌ای است و  
چون  $M$  دلخواه بود پس  $f$  روی کل  $\mathbb{R}$  چنین است.



آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

(۳) آهن فروشی تیر آهن‌های به طول  $10$  متر دارد. برای سه عدد حقیقی  $0 < x_1, x_2, x_3 \leq 10$  می‌خواهیم با برش این تیر آهن‌ها ۳ قطعه آهن به طول‌های  $x_1, x_2, x_3$  و تهیه کنیم. توجه کنید جوش دادن قطعه‌های تیر آهن امکان‌پذیر نیست. فرض کنید  $f(x_1, x_2, x_3)$  حداقل تعداد تیر آهن‌های مورد نیاز باشد. مجموعه نقاط ناپوستگی تابع  $f$  را مشخص کنید.

پاسخ:

فرض کنید  $A$  مجموعه بردارهایی باشد که جمع مؤلفه‌های آن‌ها برابر  $10$  و  $B$  مجموعه بردارهایی باشد که جمع دو مؤلفه کوچک‌تر آن‌ها برابر  $10$  باشد. نشان می‌دهیم  $A \cup B$  مجموعه مورد نظر است.

اگر  $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$  پس  $f(x) = 1$ . حال به ازای هر گوی شامل  $x$  مثل  $B$  نقطه‌ای مثل  $y = (y_1, y_2, y_3) \in B$  وجود دارد که  $y_1 + y_2 + y_3 > 10$  پس  $f(y) \geq 2$  و این یعنی  $x$  یک نقطه ناپوستگی است.

اگر  $x \in B$  بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ،  $x_1 + x_2 = 10$ ، پس  $f(x) = 2$ . حال هر گوی شامل  $x$  شامل نقطه‌ای است مثل  $y = (x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon, x_3 + \epsilon)$  که  $\epsilon > 0$  اما  $f(y) = 3$  زیرا جمع هر دو مؤلفه  $y$  از  $10$  بیشتر است. پس  $x$  نقطه ناپوستگی است.

برای تکمیل حل مسأله کفایت ثابت کنیم  $f$  در هر نقطه خارج از  $A$  و  $B$  پیوسته است. اگر  $x = (x_1, x_2, x_3) \notin A \cup B$  باز بدون از دست رفتن کلیت می‌توان فرض کرد  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . برای  $x$  سه حالت وجود دارد.

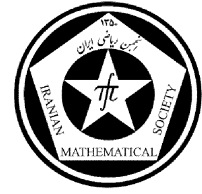
(۱)  $f(x) = 1$  پس  $x_1 + x_2 + x_3 < 10$  و به وضوح  $f$  در  $x$  پیوسته است.

(۲)  $f(x) = 2$  پس  $x_1 + x_2 < 10$  و  $x_3 > 10 - (x_1 + x_2)$ . در این حالت یک همسایگی شامل  $x$  وجود دارد که برای هر  $y = (y_1, y_2, y_3)$  در این همسایگی  $y_1 + y_2 < 10$  و  $y_3 > 10 - (y_1 + y_2)$  پس  $f(y) = 2$  و  $f$  در  $x$  پیوسته است.

(۳)  $f(x) = 3$  پس جمع هر دو مؤلفه  $x$  از  $10$  بیشتر است. بنابراین می‌توان یک همسایگی حول  $x$  انتخاب کرد که برای هر  $y$  در آن همسایگی جمع هر دو مؤلفه  $y$  نیز بیشتر از  $10$  باشد. پس  $f(y) = 3$  و حکم ثابت می‌شود.



آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

(۴) فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید برای هر  $x \in R$  حداکثر یک عضو خودتوان  $e \in R$  وجود دارد که  $e + x$  معکوس‌پذیر و  $ex$  پوچ‌توان باشد.

پاسخ:

به روش برهان خلف فرض کنید برای یک  $x$  حداقل دو عضو خودتوان  $e_1$  و  $e_2$  موجود باشند که در شرایط مسأله صدق کنند. عدد  $m$  را چنان می‌گیریم که  $(xe_1)^m = 0 = (xe_2)^m$ . بنابراین داریم  $x^m = x^m(1 - e_1)$  و در نتیجه  $Rx^m \subseteq R(1 - e_1)$  (\*). از طرف دیگر عضوی معکوس‌پذیر مانند  $u_1$  وجود دارد به طوری که  $u_1 = x + e_1$  پس  $u_1(1 - e_1) = x(1 - e_1)$  و اگر طرفین رابطه قبل را به توان  $m$  برسانیم به دست می‌آید

$$1 - e_1 = u_1^{-m} x^m \in Rx^m$$

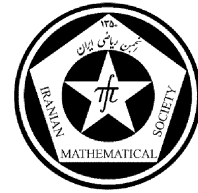
بنابراین  $R(1 - e_1) \subseteq Rx^m$  که با توجه به (\*) نتیجه می‌شود

$$Rx^m = R(1 - e_1)$$

استدلال مشابه نشان خواهد داد  $Rx^m = R(1 - e_2)$ . و در نتیجه داریم  $R(1 - e_1) = R(1 - e_2)$ . پس اعضای  $r$  و  $s$  وجود دارند به طوری که  $(1 - e_1) = r(1 - e_2)$  و  $(1 - e_2) = s(1 - e_1)$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} 1 - e_1 &= r(1 - e_2) = r(1 - e_2)(1 - e_1) \\ &= (1 - e_1)(1 - e_2) = (1 - e_1)(s(1 - e_1)) \\ &= s(1 - e_1) = 1 - e_2. \end{aligned}$$

و نهایتاً نتیجه می‌گیریم  $e_1 = e_2$ .



آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶  
مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

انجمن ریاضی ایران

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

(۵) می دانیم  $\mathbb{R}(x)$  (میدان توابع گویا با ضرایب حقیقی) با رابطه زیر به یک میدان مرتب تبدیل می شود: فرض کنیم  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ ، در این صورت تعریف می کنیم  $\frac{P}{Q} \triangleleft \frac{a_n}{b_m}$  اگر و تنها اگر  $\frac{a_n}{b_m} < 0$  می گوئیم دنباله  $\{f_n\}$  به  $f$  همگرا است اگر برای هر  $g \in \mathbb{R}(x)$  که  $g \triangleleft 0$ ، وجود داشته باشد  $N > 0$  که اگر  $n > N$  آنگاه  $g \triangleleft (f_n - f) \triangleleft -g$ . هم چنین می گوئیم دنباله  $\{f_n\}$  کوشی است اگر برای هر  $g \in \mathbb{R}(x)$  که  $g \triangleleft 0$  وجود داشته باشد  $N > 0$  که اگر  $n, m > N$  آنگاه  $g \triangleleft (f_n - f_m) \triangleleft -g$ .

الف. دنباله ای با جملات متمایز مثال بزنید که  $\triangleleft$  همگرا باشد.

ب. نشان دهید دنباله ای وجود دارد که  $\triangleleft$  کوشی است ولی  $\triangleleft$  همگرا نیست.

پاسخ:

الف. نشان می دهیم دنباله  $f_n(x) = \frac{1}{x^n}$  به تابع صفر  $\triangleleft$  همگرا است. فرض کنید  $g = \frac{P}{Q} \triangleleft 0$  داده شده است و ضریب های پیش روی  $P$  و  $Q$  هر دو مثبت باشد. اگر  $N$  را برابر درجه  $Q$  بگیریم آنگاه اگر  $n > N$

$$g(x) - f_n(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{1}{x^n} = \frac{x^n P(x) - Q(x)}{x^n Q(x)} \triangleright 0.$$

زیرا ضریب پیش روی صورت همان ضریب پیش روی  $P$  و ضریب پیش روی مخرج همان ضریب پیش روی  $Q$  است. پس  $f_n \triangleleft g$  و به علاوه به وضوح  $f_n \triangleleft 0 \triangleleft -g$  و لذا دنباله  $\{f_n\}$  به تابع ثابت صفر  $\triangleleft$  همگرا است.

ب. دنباله  $\{h_n\}$  را به شکل  $h_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^{2^k}}$  را تعریف می کنیم. ابتدا نشان می دهیم این دنباله  $\triangleleft$  کوشی است. فرض کنید  $g = \frac{P}{Q} \triangleleft 0$  مانند قسمت قبل داده شده باشد، عدد  $N > 0$  را به نحوی انتخاب کنید که  $2^N$  بزرگ تر از درجه  $Q$  باشد. اگر  $n > m > N$  آنگاه

$$h_n(x) - h_m(x) = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{x^{2^k}} \triangleleft n \times \frac{1}{n} \times \frac{P(x)}{Q(x)} = g(x)$$

زیرا تعداد جملات سیکما کم تر از  $n$  است و برای هر  $k > m$  تابع گویای  $\frac{1}{x^{2^k}}$  کم تر از  $\frac{1}{n} \frac{P(x)}{Q(x)}$  است. (استدلال مشابه قسمت الف است.) اکنون نشان می دهیم که  $\{h_n\}$  در  $\mathbb{R}(x)$   $\triangleleft$  همگرا نیست. فرض کنید به تابع  $h$   $\triangleleft$  همگرا باشد. در این صورت به سادگی می توان دید که  $\{h_n(x^2)\}$  به  $h(x^2)$  همگرا است. به علاوه داریم

$$h_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^{2^{k+1}}} = h_{n+1}(x) - \frac{1}{x}.$$

اگر در دو طرف،  $n$  را به بی نهایت میل دهیم خواهیم داشت

$$h(x^2) = h(x) - \frac{1}{x}.$$

نشان می دهیم این معادله تابعی جوابی در  $\mathbb{R}(x)$  ندارد. فرض کنید  $h(x) = \frac{R(x)}{S(x)}$  نمایش ساده شده یک جواب معادله باشد. با ضرب کردن مخرجها خواهیم داشت

$$xR(x^2)S(x) = xR(x)S(x^2) - S(x)S(x^2).$$

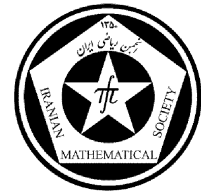
واضح است که  $S(x)S(x^2)$  باید عامل  $x$  داشته باشد. فرض کنید  $k \geq 1$  بزرگترین عددی باشد که  $S(x)$  به  $x^k$  بخش پذیر باشد. در این صورت  $S(x) = x^k T(x)$  و  $T$  و  $R$  عامل  $x$  ندارند. داریم

$$xR(x^2)x^k T(x) = xR(x)x^{2k} T(x^2) - x^k T(x)x^{2k} T(x^2)$$

پس

$$R(x^2)T(x) = x^k (R(x) - x^{k-1} T(x))T(x^2)$$

و لذا  $R(x^2)T(x)$  باید عامل  $x$  داشته باشد و این تناقض است زیرا  $T$  و  $R$  عامل  $x$  ندارند.



آزمون نوبت اول  
سی و ششمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۱/۲/۲۶

انجمن ریاضی ایران



دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

مدت امتحان: ۳/۵ ساعت

۶)  $P$  متوازی السطوحی است که مختصات همه رأس‌های آن صحیح است؛ فرض کنید  $A, B, C$  و  $D$  به ترتیب تعداد نقاط با مختصات صحیح اکیداً داخل  $P$ ، روی وجوه ولی نه روی اضلاع  $P$ ، روی اضلاع ولی نه روی رأس‌های  $P$  و روی رأس‌های  $P$  باشند. نشان دهید

$$P \text{ حجم} = A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D.$$

پاسخ:

روشن است که اگر  $P$  را با یک انتقال صحیح به یک متوازی السطوح دیگر تبدیل کنیم. کمیت‌های  $A, B, C$  و  $D$  و هم‌چنین حجم  $P$  تغییر نمی‌کنند. واضح است که می‌توان با انتقال‌های صحیح  $P$  کل فضا را پوشاند طوری که اشتراک هر دو شکل در یک وجه، یال، رأس و یا تهی باشد.

$S$  را مکعب  $[-R, R]^3$  بگیرید. فرض کنید  $N$  تعداد نقاط صحیح داخل  $S$  و  $N'$  تعداد متوازی السطوح‌های مذکور باشد که کاملاً داخل  $S$  هستند.

لم:

$$\text{الف) } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(S)}{N} = 1 \quad (\text{منظور از } \text{vol}(X), \text{ حجم } X \text{ است.})$$

$$\text{ب) } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(S)}{N'} = \text{vol}(P)$$

$$\text{ج) } \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N}{N'} = A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D$$

کافی است این لم را ثابت کنیم؛ زیرا در این صورت با تقسیم (الف) بر (ب) و سپس ضرب در (ج) حکم نتیجه می‌شود.

قسمت (الف) واضح است. اجتماع متوازی السطوح‌هایی که داخل  $S$  هستند را  $W$  بنامید. حجم  $W$  برابر است با  $N' \cdot \text{vol}(P)$ . بنابراین (۱)  $\text{vol}(S) \geq N' \cdot \text{vol}(P)$ . از طرف دیگر،  $d$  را بیشترین فاصله رئوس  $P$  در نظر بگیرید و قرار دهید  $\bar{S} = [-R + d, R - d]^3$ . ادعا می‌کنیم  $\bar{S} \subseteq W$ . فرض کنید  $Q \cdot x \in \bar{S}$  را یک متوازی السطوح در نظر بگیرید که  $x \in Q$ . چون بیشترین فاصله رئوس  $Q$  برابر  $d$  است و  $x \in \bar{S} \cap Q$ ، نتیجه می‌گیریم  $Q \subseteq S$ . پس  $Q \subseteq W$  و در نتیجه  $x \in W$ . حال ثابت کردیم  $\bar{S} \subseteq W$  بنابراین:

$$N' \text{vol}(P) \geq \text{vol}(\bar{S}) = \left(\frac{R-d}{R}\right)^3 \text{vol}(S) \quad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم  $\text{vol}(P) \leq \frac{\text{vol}(S)}{N'} \leq \left(\frac{R}{R-d}\right)^3 \text{vol}(P)$  و با میل دادن  $R$  به  $+\infty$  قسمت ب ثابت می‌شود.

اثبات قسمت (ج): هر نقطه صحیح، درون یک وجه، درون یک یال و یا منطبق بر یک رأس یکی از متوازی‌السطوح‌های مذکور است. بسته به این وضعیت عدد ۱،  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{6}$  و یا  $\frac{1}{8}$  را به آن نقطه نسبت دهید. حال برای هر متوازی‌السطوح  $Q$  داخل  $S$ ، اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل  $Q$  را جمع بزنید و حاصل آن را در نظر بگیرید. سپس اعداد متناظر با همه متوازی‌السطوح‌های داخل  $S$  را با هم جمع بزنید. از طرفی، عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح برابر است با  $A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D$ . پس حاصل جمع نهایی برابر است با  $N'(A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D)$ . از طرف دیگر برای هر نقطه صحیح داخل  $S$ ، اگر عدد متناظر با آن برابر با  $2^{-i}$  باشد، آن‌گاه آن نقطه در دقیقاً  $2^i$  متوازی‌السطوح قرار دارد (این موضوع با حالت‌گیری روی  $i$  دیده می‌شود) که بعضی از آن‌ها ممکن است کاملاً داخل  $S$  نباشند. پس حاصل جمع نهایی حداکثر برابر با  $N$  است. در نتیجه

$$N \geq N'(A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D) \quad (۳)$$

به شیوه دیگر، برای هر متوازی‌السطوح  $Q$  داخل  $S$ ، تنها اعداد متناظر با نقاط صحیح داخل  $Q \cap \bar{S}$  را جمع بزنید و سپس حاصل جمع همه متوازی‌السطوح‌ها را هم با هم جمع بزنید. از طرفی عدد متناظر با هر متوازی‌السطوح حداکثر برابر با  $A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D$  است. پس حاصل جمع نهایی حداکثر برابر است با  $N(A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D)$ . از طرف دیگر هر نقطه صحیح داخل  $\bar{S}$  که عدد متناظر با آن  $2^{-i}$  است، دقیقاً در  $2^i$  متوازی‌السطوح قرار دارد که همه آنها کاملاً داخل  $S$  اند. پس حاصل جمع نهایی حداقل برابر با  $N''$  است که  $N''$  تعداد نقاط صحیح داخل  $\bar{S}$  است. پس:

$$N'' \leq N'(A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{6}C + \frac{1}{8}D) \quad (۴)$$

حال قسمت (ج) از روابط ۳ و ۴ و این که  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N''}{N} = 1$  نتیجه می‌شود. پس لم ثابت شد و همان‌طور که توضیح داده شد مسأله ثابت می‌شود.