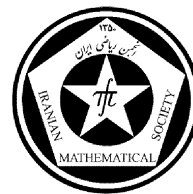




دانشگاه شهید بهشتی

سوالات نوبت دوم
سی و پنجمین مسابقه
ریاضی دانشجویی کشور
۹۰/۲/۱۵

مدت امتحان: ۴ ساعت



انجمن ریاضی ایران

(۷) اعداد حقیقی $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$ مفروض اند. برای هر $1 \leq i \leq p$ تابع $b_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را به

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{a_i}{x} & x \leq a_i \\ \frac{x}{a_i} & x > a_i \end{cases} \text{ صورت}$$

تابع $f(x) = \prod_{i=1}^p b_i(x)$ در چه نقاطی مینیمم مقدار خود را

اختیار می کند؟

(۸) حلقه یکدار R مفروض است. می دانیم برای هر $a \in R$ عضو $x \in R$ وجود دارد که $a = a^2 x$. ثابت کنید

$$\text{برای هر } a \in R \text{ عضو } y \in R \text{ وجود دارد به گونه ای که } a = ya^2.$$

(۹) فرض کنیم $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی باشد. ثابت کنید $z_0 \in \mathbb{C}$ موجود است که $|z_0| = 1$ و

$$|f(z_0) - \bar{z}_0| \geq 1$$

(۱۰) نشان دهید تابع $f(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \det \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$ به عنوان یک چندجمله ای n^2 متغیره، تحویل ناپذیر است.

(یک چندجمله ای چند متغیره را تحویل ناپذیر می گوئیم اگر نتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو چند

جمله ای غیر ثابت تجزیه کرد.)

(۱۱) فرض کنیم $U \subseteq [0, \infty)$ مجموعه ای باز و بی کران باشد. ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که

$$U \cap \{x, 2x, 3x, \dots\} \text{ نامتناهی است.}$$

(۱۲) تابع $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ را شبه اثر می نامیم اگر ماتریس صفر را به عدد صفر تصویر کند و برای هر

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ داشته باشیم $f(AB) = f(BA)$. ثابت کنید ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ پوچ توان است اگر و تنها

$$\text{اگر برای هر تابع شبه اثر مانند } f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ داشته باشیم } f(A) = 0.$$

موفق باشید.