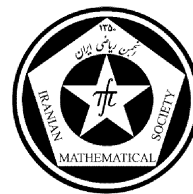




دانشگاه شهید بهشتی

سوالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴  
مدت امتحان : ۴ ساعت



انجمن ریاضی ایران

(۱) همه اعداد طبیعی مانند  $k$  را مشخص کنید که به ازای آن‌ها گروهی متناهی مانند  $G$  موجود باشد که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه  $k$  داشته باشد. (توجه کنید که برای هر چنین  $k$  ای ارائه گروهی متناهی که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه  $k$  داشته باشد لازم است.)

(۲) فرض کنیم  $X$  یک فضای متریک همبند و فشرده و  $p \in X$  یک نقطه برشی آن باشد؛ یعنی، مجموعه‌های ناتهی  $U$  و  $V$  موجود باشند که  $X \setminus \{p\} = U \cup V$  و  $\bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \emptyset$ . ثابت کنید  $U \cup \{p\}$  همبند و فشرده است.

(۳) حلقه‌های  $R$  و  $S$  مفروض هستند که  $R$  میدان است و  $R[x] \cong S[x]$ . ثابت کنید  $R \cong S$ .

(۴) وجوه یک ۱۳۹۰ وجهی همگی مثلث هستند. دو وجه این چندوجهی را همسایه گوئیم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. نشان دهید برای هر رنگ آمیزی وجه‌ها با سه رنگ همیشه دو وجه وجود دارند که هم‌رنگ و دارای یک وجه همسایه مشترک هستند.

(۵) فضای  $C(X)$  متشکل از تمام توابع حقیقی مقدار، پیوسته و کران‌دار بر فضای متریک  $(X, d)$  را همراه با متر

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر  $(C(X), \rho)$  زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا داشته باشد آن‌گاه  $(X, d)$  نیز زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا دارد.

(۶) فرض کنید  $x_1, x_2, \dots$  دنباله‌ای از اعداد متمایز در بازه  $[0, 1]$  باشد. برای هر عدد طبیعی  $n$ ، با حذف مجموعه نقاط  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  از این بازه،  $n$  زیربازه به دست می‌آید. اگر  $M_n$  را برابر با طول بزرگ‌ترین

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} nM_n \geq \frac{1}{\ln 2}$$

این زیربازه‌ها بگیریم، نشان دهید

موفق باشید.