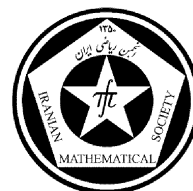




پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

(۱) همه اعداد طبیعی مانند  $k$  را مشخص کنید که به ازای آن‌ها گروهی متناهی مانند  $G$  موجود باشد که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه  $k$  داشته باشد. (توجه کنید که برای هر چنین  $k$  ای ارائه گروهی متناهی که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو از مرتبه  $k$  داشته باشد لازم است.)

پاسخ:

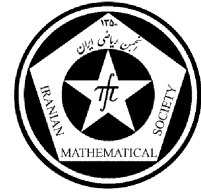
راه حل اول. ابتدا توجه کنید که در هر گروه، مرتبه یک عضو مانند  $x$  با مرتبه  $x^{-1}$  برابر است. پس اگر  $O(x) = k$ ، آنگاه  $O(x^{-1}) = k$ ؛ یعنی، یا اعضای  $k$  به صورت جفت ظاهر می‌شوند (که امکان ندارد چون دقیقاً ۲۰۱۱ عضو با این خاصیت وجود ندارد) و یا این که برای یکی از این  $x$ ها داریم  $x^{-1} = x$ . پس  $O(x) = 2$  یعنی، مرتبه  $x$  و در نتیجه  $k$  فقط می‌تواند ۲ باشد.

از طرف دیگر  $D_{2011}$  گروهی متناهی است که دقیقاً ۲۰۱۱ عضو مرتبه ۲ دارد.

راه حل دوم. از آن جا که هر گروه دوری و  $k$  عضوی دارای  $\phi(k)$  مولد است که این  $\phi(k)$  مولد دارای مرتبه  $k$  هستند، به راحتی نتیجه می‌شود که تعداد اعضای از مرتبه  $k$  مضربی از  $\phi(k)$  است یعنی،  $\phi(k) | 2011$ . اما  $\phi(k)$  همواره زوج است، مگر این که  $k = 2$  و مانند حل بالا،  $D_{2011}$  گروهی با خواص خواسته شده است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

(۲) فرض کنیم  $X$  یک فضای متریک همبند و فشرده و  $p \in X$  یک نقطه برشی آن باشد؛ یعنی، مجموعه‌های ناتهی  $U$  و  $V$  موجود باشند که  $X \setminus \{p\} = U \cup V$  و  $\bar{U} \cap V = U \cap \bar{V} = \emptyset$ . ثابت کنید  $U \cup \{p\}$  همبند و فشرده است.

پاسخ:

ابتدا نشان می‌دهیم  $U \cup \{p\}$  بسته است. فرض کنیم  $x \in \overline{U \cup \{p\}}$ . بنابراین دنباله‌ای مانند  $\{x_n\}$  در  $U \cup \{p\}$  موجود است که  $x_n \rightarrow x$ . اگر برای بی‌نهایت  $n$  داشته باشیم  $x_n = p$  آنگاه  $x_n \rightarrow p$  و لذا  $x = p$ . همچنین اگر از جایی به بعد  $x_n \neq p$  آنگاه  $x_n$ ها نهایتاً در  $U$  هستند و لذا  $x \in \bar{U}$ . در نتیجه  $x \in V$  و لذا  $x \in U \cup \{p\}$ . حال تابع  $f: X \rightarrow U \cup \{p\}$  را به صورت

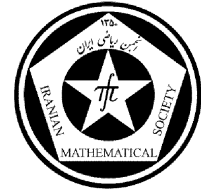
$$f(x) = \begin{cases} x & x \in U \cup \{p\} \\ p & x \in V \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم این تابع پیوسته است. فرض کنیم  $y_n$  دنباله‌ای همگرا به  $y$  در  $X$  باشد. اگر برای بی‌نهایت  $n$  داشته باشیم  $y_n \in V$  آنگاه  $y \in \bar{V}$  و لذا از جایی به بعد داریم  $y_n \in V \cup \{p\}$ . بنابراین از جایی به بعد  $f(y_n) = p$  و لذا  $f(y_n) \rightarrow p$ . اما  $f(y) = p$  زیرا  $f(y) = p$  زیرا  $y \in V \cup \{p\}$ . اما اگر از جایی به بعد  $y_n \notin V$  آنگاه از جایی به بعد  $y_n \in U \cup \{p\}$  و چون  $f$  روی  $U \cup \{p\}$  همانی است پس  $f(y_n) \rightarrow f(y)$ .

اکنون چون  $f$  پیوسته و  $X$  همبند و فشرده است پس  $U \cup \{p\} = f(X)$  نیز چنین است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

(۳) حلقه‌های  $R$  و  $S$  مفروض هستند که  $R$  میدان است و  $R[x] \cong S[x]$ . ثابت کنید  $R \cong S$ .

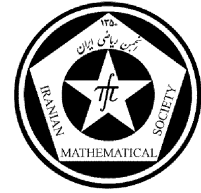
پاسخ:

چون  $R$  میدان است پس  $R[x]$  یک دامنه ایدال‌های اصلی (P.I.D) است. پس  $S[x]$  هم P.I.D است و در نتیجه  $S$  میدان است [توجه کنیم که در حالت جابه‌جایی و یک‌ددار داریم:  $T$  میدان است اگر و تنها اگر  $T[x]$  دامنه ایدال‌های اصلی باشد].

حال اگر  $\phi: R[x] \rightarrow S[x]$  یکریختی، باشد با توجه به این که عناصر معکوس‌پذیر تحت یکریختی حفظ می‌شوند و با توجه به این که عناصر معکوس‌پذیر  $R[x]$  و  $S[x]$  چند جمله‌ای ثابت هستند (چون  $R$  و  $S$  میدان هستند)، نتیجه می‌شود که تابع  $\phi|_R: R \rightarrow S$  یکریختی بین  $R$  و  $S$  است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

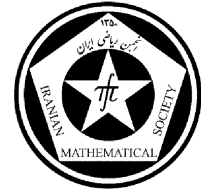
(۴) وجوه یک ۱۳۹۰ وجهی همگی مثلث هستند. دو وجه این چندوجهی را همسایه گوئیم اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. نشان دهید برای هر رنگ آمیزی وجه‌ها با سه رنگ همیشه دو وجه وجود دارند که هم‌رنگ و دارای یک وجه همسایه مشترک هستند.

پاسخ:

به روشنی دیده می‌شود که نادرست بودن حکم به معنی وجود یک رنگ آمیزی خواهد بود که در آن سه وجه همسایه هر وجه دقیقاً به سه رنگ مختلف رنگ شده‌اند. اکنون یکی از رنگ‌ها مثلاً رنگ آبی را در نظر می‌گیریم و وجه‌های آبی را می‌شماریم. هر کدام از ۱۳۹۰ وجه دقیقاً یک وجه همسایه به رنگ آبی خواهد داشت و از طرفی هر وجه آبی دقیقاً سه بار به عنوان همسایه آبی یک وجه شمرده می‌شود. بنابراین  $3 \times 1390$  که این متناقض است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

(۵) فضای  $C(X)$  متشکل از تمام توابع حقیقی مقدار، پیوسته و کران دار بر فضای متریک  $(X, d)$  را همراه با متر

$$\rho(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

در نظر می گیریم. ثابت کنید اگر  $(C(X), \rho)$  زیرمجموعه ای چگال و شمارا داشته باشد آن گاه  $(X, d)$  نیز زیرمجموعه ای چگال و شمارا دارد.

پاسخ:

فرض کنید  $D = \{f_1, f_2, \dots\}$  در  $C(X)$  چگال باشد. قرار دهید

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n(x) > \frac{1}{4} \text{ ی } x \in X\}$$

$B$  تهی نیست زیرا اگر  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  تابع ثابت یک باشد باید  $n$  داشته باشیم که  $\rho(f_n, g) < \frac{1}{4}$  و برای چنین  $n$  ی به ازای هر  $x \in X$  داریم  $f_n(x) > \frac{1}{4}$ .

به ازای هر  $n \in B$  طبق تعریف  $B$ ، نقطه ای مثل  $x_n \in X$  وجود دارد که  $f_n(x_n) > \frac{1}{4}$ . قرار دهید  $Y = \{x_n \mid n \in B\}$ . ثابت می کنیم  $Y$  در  $X$  چگال است. اگر چنین نباشد وجود دارد  $x^* \in X \setminus \bar{Y}$ . تابع  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  را به شکل زیر تعریف می کنیم

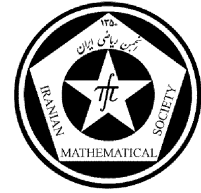
$$f(x) = \min\left(1, \frac{d(x, \bar{Y})}{d(x^*, \bar{Y})}\right).$$

به راحتی می توان ثابت کرد که  $f$  پیوسته و کران دار است. به علاوه  $f(x^*) = 1$  و برای هر  $x \in Y$  داریم  $f(x) = 0$ .

اکنون نشان می دهیم که برای هر  $f_n \in D$ ،  $\rho(f, f_n) \geq \frac{1}{4}$ ، اگر  $n \in B$  آن گاه  $f_n(x_n) > \frac{1}{4}$  و  $f(x_n) = 0$  پس  $\rho(f, f_n) > \frac{1}{4}$ . اگر  $n \notin B$  آن گاه برای هر  $x \in X$ ، به ویژه  $x^*$ ، داریم  $f_n(x) \leq \frac{1}{4}$ . پس با توجه به این که  $f(x^*) = 1$ ، نتیجه می شود که  $\rho(f, f_n) \geq \frac{1}{4}$  پس  $f \notin \bar{D}$  و این با چگال بودن  $D$  در تناقض است.



پاسخ سؤالات نوبت اول  
سی و پنجمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه اول ۹۰/۲/۱۴



انجمن ریاضی ایران

دانشگاه شهید بهشتی

۶) فرض کنید  $x_1, x_2, \dots$  دنباله‌ای از اعداد متمایز در بازه  $[0, 1]$  باشد. برای هر عدد طبیعی  $n$ ، با حذف مجموعه نقاط  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  از این بازه،  $n$  زیربازه به دست می‌آید. اگر  $M_n$  را برابر با طول بزرگ‌ترین این زیربازه‌ها بگیریم، نشان دهید  $\limsup_{n \rightarrow \infty} nM_n \geq \frac{1}{\ln 2}$ .

پاسخ:

کافی است نشان دهیم برای هر  $c > \limsup nM_n$ ، داریم  $c \geq \frac{1}{\ln 2}$ . چنین  $c$  ای در نظر بگیریم. بنابراین برای  $n$  های به اندازه کافی بزرگ خواهیم داشت  $M_n < \frac{c}{n}$ . فرض کنید  $u_1 \leq \dots \leq u_n$  برابر با طول قطعات ایجاد شده با حذف  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  از بازه  $[0, 1]$ ، به ترتیب از کوچک به بزرگ باشد.

توجه کنید که برای  $k = 0, 1, \dots, (n-1)$ ، نقاط  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$  در حداکثر  $k$  تا از زیربازه‌های به طول  $u_1, \dots, u_n$  قرار خواهد گرفت و بنابراین با اضافه شدن آنها، از بین  $k+1$  بازه به طول  $u_{n-k}, \dots, u_n$  حداقل یکی بی‌تغییر می‌ماند. بنابراین داریم  $M_{n+k} \geq u_{n-k}$ . با جمع این نامساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned} 1 = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 &\leq M_n + M_{n+1} + \dots + M_{2n+1} \\ &< \frac{c}{n} + \frac{c}{n+1} + \dots + \frac{c}{2n-1} \end{aligned}$$

$$\text{اما } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) = \ln 2$$

تبصره: کران  $\frac{1}{\ln 2}$  بهترین کران ممکن است. یعنی می‌توان دنباله  $a_1, a_2, a_3, \dots$  را به گونه‌ای یافت که برای آن  $\limsup nM_n = \frac{1}{\ln 2}$ .