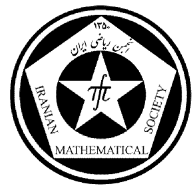




سوالات نوبت دوم  
سی و چهارمین مسابقه  
ریاضی دانشجویی کشور  
جلسه دوم ۸۹/۲/۲  
مدت امتحان : ۴ ساعت



انجمن ریاضی ایران

(۷) فرض کنید تعدادی سنگ ریزه را به  $n$  قسمت با وزن‌های  $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_n$  تقسیم کرده باشیم. بار دیگر همان سنگ ریزه‌ها را به  $n$  قسمت با وزن‌های  $V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_n$  تقسیم می‌کنیم. نشان دهید برای هر  $1 \leq k \leq n$  داریم

$$W_1 + W_2 + \dots + W_k \leq V_1 + V_2 + \dots + V_k.$$

(۸) همهی اعداد حقیقی مانند  $c$  را بیابید که برای آنها تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  موجود باشد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داشته باشیم

$$f''(x) > f'(x) + c, \quad f'(x) > f(x) + c.$$

(۹) گروه  $G$  مفروض است به طوری که در  $G$  همواره از  $ab \neq ba$  نتیجه می‌شود  $a^2 = b^2$ .

(الف) ثابت کنید هر زیرگروه  $G$  نرمال است.

(ب) مثالی از یک گروه غیر آبدی  $G$  بیاورید که شرط بالا را داشته باشد.

(۱۰) فرض کنید  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی تحلیلی باشد به گونه‌ای که بر زیرمجموعه‌ای نامتناهی از  $[0, 1]$  مقادیر آن حقیقی است. ثابت کنید برای هر  $x \in \mathbb{R}$ ،  $f(x) \in \mathbb{R}$ .

(۱۱) تابع  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  را یک اَبَر چندجمله‌ای می‌نامیم اگر دنباله‌ی  $P_1(x), P_2(x), \dots$  از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر عدد صحیح مانند  $x$  فقط تعدادی متناهی از  $P_i(x)$ ها ناصفر باشند و  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ .

(الف) اگر  $P_n(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \dots (x^2 - n^2)$ ، نشان دهید  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$  یک اَبَر چندجمله‌ای

است ولی هیچ چندجمله‌ای مانند  $Q(x)$  وجود ندارد که برای هر  $x \in \mathbb{Z}$ ،  $f(x) = Q(x)$ .

(ب) ثابت کنید یک اَبَر چندجمله‌ای ناصفر حداکثر تعداد متناهی ریشه در اعداد صحیح دارد.

(۱۲) (الف) فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابجایی، یکدار و متناهی باشد که بیش از  $\frac{1}{2}$  اعضای آن خودتوان هستند. ثابت کنید همهی عناصر  $R$  خودتوان هستند.

(ب) ثابت کنید برای هر  $k$ ، حلقه‌ای متناهی با بیش از  $k$  عضو وجود دارد که دقیقاً  $\frac{1}{k}$  اعضای آن خودتوان هستند.