

سؤالات نوبت دوم سی و سومین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسه ی دوم ۸۸/۲/۱۷

مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

(۷) نقاط A_1, \dots, A_n در فضای سه بعدی \mathbb{R}^3 ، و درون گوی واحد قرار دارند و G مرکز ثقل این نقاط است. نشان دهید $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به طوری که فاصله ی A_i تا G کم تر از یک باشد.

(۸) فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد که $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$. ثابت کنید گوی بسته ای مانند D با کم ترین شعاع ممکن وجود دارد که $\iint_D f(x, y) dx dy = \frac{1}{\pi}$.
(اگر نشان دهید بین همه ی گوی های به مرکز مبدأ، گویی با کم ترین شعاع ممکن وجود دارد که انتگرال f روی آن $\frac{1}{\pi}$ باشد، ۵۰٪ نمره را می گیرید.)

(۹) ثابت کنید اگر F یک میدان باشد، هر عضو $M_2(F)$ را می توان به صورت مجموع چهار ماتریس وارون پذیر نوشت. ($M_2(F)$ مجموعه ی تمام ماتریس های 2×2 روی F است.)

(۱۰) قرار است صد دانشجو در سالنی که صد صندلی دارد، امتحان دهند. هر دانشجو دارای یک شماره ی صندلی است. اولین دانشجویی که وارد سالن می شود شماره ی صندلی خود را گم کرده است و بنابراین یک صندلی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می نشیند. بقیه ی دانشجویان شماره ی صندلی خود را به همراه دارند و هر کدام که وارد سالن می شوند اگر صندلی اش خالی باشد روی آن می نشیند و اگر اشغال شده باشد، از صندلی های خالی یکی را به تصادف انتخاب کرده و روی آن می نشیند. احتمال این که دو دانشجویی که آخر از همه وارد سالن می شوند روی صندلی خود بنشینند چقدر است؟

(۱۱) فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه ای کران دار از آن باشد. برای $a \in A$ خروج از مرکز a به صورت $ecc(a) = \sup\{d(a, b) : b \in A\}$ تعریف می شود. هم چنین قطر A و شعاع A را به ترتیب به صورت

$$diam(A) = \sup\{ecc(a) : a \in A\}, \quad rad(A) = \inf\{ecc(a) : a \in A\}$$

تعریف می کنیم. فضای متریک X را مرکزی می نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه ی کران دار از آن مانند A داشته باشیم $diam(A) = rad(A)$. فرض کنید X یک فضای متریک مرکزی باشد.

الف. فرض کنید $r > 0$ و $x \in X$. نشان دهید مجموعه ی $C_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = r\}$ باز است.

ب. فرض کنید X بیش از یک عضو داشته باشد. ثابت کنید X ناهمبند است.

(۱۲) گروه G مفروض است به طوری که G' آبلی است و هر زیرگروه آبلی و نرمال G متناهی است. ثابت کنید G متناهی است.