

سوالات نوبت اول سی و سومین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسه‌ی اول ۸۸/۲/۱۶

مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

(۱) فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. ثابت کنید اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی فشرده از X مانند K ، مجموعه‌ی $A \cap K$ بسته باشد، آنگاه A بسته است.

(۲) گروه G مفروض است. ثابت کنید موارد زیر معادل هستند:

الف. هر زیرگروه G نرمال است.

ب. برای هر $a, b \in G$ عدد صحیح m وجود دارد که $(ab)^m = ba$.

(۳) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n ، $\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$ بر $n!$ بخش پذیر است.

(۴) در حلقه یک‌دار R هر عضو برابر است با حاصلضرب تعدادی عضو خودتوان. ثابت کنید R حلقه‌ای جابجایی است.

(۵) فرض کنید $A \subseteq \mathbb{C}$ بسته و شمارا باشد. ثابت کنید اگر تابع تحلیلی $f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ کران‌دار باشد، آن گاه f برابر مقداری ثابت است.

(چنانچه برای حالت خاص $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ به سؤال پاسخ دهید ۵٪ نمره را می‌گیرید.)

(۶) در شبکه‌ی نامتناهی زیر، هر گره به سه گره‌ی دیگر متصل است و هیچ دوری وجود ندارد. عدد حقیقی λ داده شده است. می‌خواهیم به هر گره از شبکه یک عدد حقیقی اکیداً مثبت نسبت دهیم به طوری که حاصل جمع اعداد گره‌های مجاور هر گره، λ برابر عدد آن گره شود. به ازای چه مقادیری از λ این کار ممکن است؟

