سؤالات نوبت دوم سی و دومین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹ — مدت امتحان : ۳/۵ ساعت

۷) ثابت کنید گروهی مانند G وجود ندارد که مرکز G، زیرگروه ماکسیمال G باشد.
(زیرگروه H از گروه G را ماکسیمال گوییم اگر سره باشد و زیرگروه دیگری مانند K موجود نباشد که $G \supsetneq K \supsetneq H$.)

۸) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A مجموعه‌ای باز و بسته در X باشد به طوری که $A \neq \emptyset\ , X$. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

بر X پیوستهٔ یکنواخت است اگر و تنها اگر $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \notin A\} > ۰$.

۹) فرض کنید n عددی طبیعی باشد و دنبالهٔ $a_۰, a_۱, a_۲, \ldots, a_n, a_{n+۱}$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت باشد که $a_۰ = a_{n+۱} = ۱$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$، $a_i > ۱$ و $a_i \mid a_{i-۱} + a_{i+۱}$.

الف) ثابت کنید وجود دارد j که $۱ \leq j \leq n$ و $a_j = a_{j-۱} + a_{j+۱}$.

ب) ثابت کنید در چنین دنباله‌ای دست‌کم یک ۲ وجود دارد.

۱۰) همهٔ اعداد طبیعی n را مشخص کنید که $۲ \overset{\phi(n)}{\equiv} n\sigma(n)$. (منظور از $\sigma(n)$، مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های مثبت n بوده و $\phi(n)$ همان تابع اویلر است.)

۱۱) تعدادی دانشجو در یک مسابقه که در آن n سؤال دوگزینه‌ای مطرح شده است، شرکت کرده‌اند و مشخص شده است که مجموعهٔ پاسخ‌های هیچ دو نفری یکسان نیست. اکنون به هر سؤال به صورت مستقل، یکنواخت و تصادفی نمره‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ اختصاص می‌یابد. ثابت کنید احتمال آن که تنها یک نفر بیشترین مجموع نمرات را بیاورد، حداقل $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۲) فرض کنید $\gamma : [۰,۱] \longrightarrow [۰,۱] \times [۰,۱]$ و برای هر $s,t \in [۰,۱]$

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s-t|^{\alpha},$$

که در آن M, α اعدادی ثابت و مثبت هستند. نشان دهید اگر γ پوشا باشد آنگاه $\alpha \leq \frac{۱}{۲}$.