سؤالات نوبت اول سی و دومین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۷/۲/۱۸ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

۱) فرض کنید X یک مجموعهٔ k عضوی است. برای یک عدد طبیعی ثابت m، تعداد دنباله‌های $A_1, \ldots, A_m$ را پیدا کنید که

$$A_1 \subseteq A_2 \cdots \subseteq A_m \subseteq X.$$

۲) فرض کنید A_1، A_2،...، A_n ماتریس‌هایی $k \times k$، خودتوان و با درایه‌های حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\operatorname{rank}(I - A_1 A_2 \cdots A_n) \leq \mathrm{N}(A_1) + \mathrm{N}(A_2) + \cdots + \mathrm{N}(A_n).$$

(منظور از $\mathrm{N}(B)$ و $\operatorname{rank}(B)$ به‌ترتیب پوچی و رتبه B می‌باشد.)

۳) فرض کنید f یک تابع مختلط تام و $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ به گونه‌ای باشند که $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. نشان دهید اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $f(z + w_1) = f(z) = f(z + w_2)$، آنگاه f ثابت است.

۴) فرض کنید A و B دو نقطهٔ متمایز روی یک سهمی و $n \geq 3$ عددی طبیعی باشد.
الف. نشان دهید می‌توان $n - 2$ نقطهٔ $P_1, \ldots, P_{n-2}$ را بین A و B روی سهمی طوری انتخاب کرد که مساحت n ضلعی محدب $AP_1 \ldots P_{n-2}B$ بیشترین مقدار ممکن شود.
ب. ثابت کنید نسبت مساحت n ضلعی حاصل در قسمت الف به مساحت قطاع سهمی تنها تابعی از n و مستقل از انتخاب A و B است. این نسبت را به دست آورید.
راهنمایی: با توجه به این که تمام سهمی‌ها متشابه هستند، مسأله را برای سهمی $y = x^2$ ثابت کنید. ابتدا حالت $n = 3$ را بررسی کنید.

۵) زیرمجموعهٔ غیرتهی S از خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ را زوج می‌گوییم هر گاه از هر سطر و ستون صفحهٔ شطرنجی تعدادی زوج خانه متعلق به S باشد. حداقل k چقدر باشد تا مطمئن شویم هر زیرمجموعهٔ k عضوی از خانه‌ها شامل یک زیرمجموعهٔ زوج است.

۶) ثابت کنید حلقه‌ای وجود ندارد به طوری که دقیقاً دارای پنج عضو منظم باشد. (عضو a از یک حلقه را منظم می‌نامیم اگر همواره از $ax = 0$ یا $xa = 0$ نتیجه شود $x = 0$. همچنین توجه کنید که حلقه‌ها لزوماً یکدار، جابجایی یا متناهی نیستند.)