# پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

## جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹

---

**۷)** ثابت کنید گروهی مانند $G$ وجود ندارد که مرکز $G$، زیرگروه ماکسیمال $G$ باشد.

(زیرگروه $H$ از گروه $G$ را ماکسیمال گوییم اگر سره باشد و زیرگروه دیگری مانند $K$ موجود نباشد که $H \subsetneqq K \subsetneqq G$.)

### پاسخ اول:

به روش برهان خلف، فرض کنید گروهی مانند $G$ با این خاصیت موجود باشد. بنابراین گروه $\frac{G}{Z(G)}$ زیرگروه سره ندارد و در نتیجه دوری است. پس $G$ آبلی است. یعنی $G = Z(G)$، که با ماکسیمال بودن $Z(G)$ تناقض دارد.

### پاسخ دوم:

به روش برهان خلف، فرض کنید گروهی مانند $G$ با این خاصیت موجود باشد. چون $Z(G)$ زیرگروه سره است پس $a \in G$ را چنان می‌گیریم که در مرکز $G$ نباشد. بنابراین $C(a)$ (مرکزساز $a$) اکیداً شامل $Z(G)$ است، پس $C(a) = G$ و در نتیجه $a \in Z(G)$ که تناقض است.

# پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

## جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹

---

**۸)** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک و $A$ مجموعه‌ای باز و بسته در $X$ باشد به طوری که $X$ ,$A \neq \emptyset$. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

بر $X$ پیوستهٔ یکنواخت است اگر و تنها اگر $\inf\{d(a,b) : a \in A, b \notin A\} > 0$.

## پاسخ:

اگر $f$ پیوسته‌ی یکنواخت باشد آنگاه $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $d(x,y) < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$. پس برای هر $a \in A$ و $b \notin A$ چون $f(a) - f(b) = 1$، پس $d(a,b) \geq \delta$ در نتیجه $\inf\{d(a,b); a \in A \ \ b \notin A\} \geq \delta > 0$.

بالعکس، با انتخاب $\delta = \inf\{d(a,b); a \in A, b \notin A\}$ ملاحظه می‌شود که برای هر $\varepsilon > 0$،

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

## پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

## جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹

---

**۹)** فرض کنید $n$ عددی طبیعی باشد و دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت باشد که $a_0 = a_{n+1} = 1$ و برای هر $1 \le i \le n$، $a_i > 1$ و $a_i \mid a_{i-1} + a_{i+1}$.

الف) ثابت کنید وجود دارد $j$ که $1 \le j \le n$ و $a_j = a_{j-1} + a_{j+1}$.

ب) ثابت کنید در چنین دنباله‌ای دست‌کم یک ۲ وجود دارد.

### پاسخ:

دنبالهٔ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ با ویژگی بالا را یک دنبالهٔ $C_n$ می‌نامیم.

الف. قرار می‌دهیم $a_j = \max\{a_i : 1 \le i \le n\}$. در این صورت $a_j \ge a_{j-1}$ و $a_j \ge a_{j+1}$. این دو نابرابری و عبارت $a_j \mid a_{j-1} + a_{j+1}$ نتیجه می‌دهد که یا $a_j = a_{j-1} + a_{j+1}$ و یا $a_{j-1} = a_j = a_{j+1}$. در حالت اخیر $j \ne 1$ و از $a_{j-1} | a_{j-2} + a_j$ نتیجه می‌شود که $a_j | a_{j-2}$. با به کاربردن مکرر همین استدلال به $a_j | 1$ می‌رسیم که با $a_j > 1$ متناقض است.

ب. توجه کنید که با حذف $a_j$ از یک دنبالهٔ $C_n$، $n \ge 2$، به یک دنبالهٔ $C_{n-1}$ می‌رسیم. برای اثبات این مطلب با توجه به سه حالت $j = 1$، $j = n$ و $1 < j < n$، باید برقراری یک یاهر دو عبارت

$$a_{j+1} | a_{j-1} + a_{j+2} \quad , \quad a_{j-1} | a_{j-2} + a_{j+1}$$

را بررسی کنیم که با توجه به خصوصیات $C_n$ و $a_j = a_{j-1} + a_{j+1}$ به‌دست می‌آیند. بنابراین با حذف پیاپی جملات ماکسیمم به یک دنبالهٔ $C_1$ به صورت $1, b, 1$ می‌رسیم که در آن $b$ باید برابر با ۲ باشد.

# پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

## جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹

---

۱۰) . همه اعداد طبیعی $n$ را مشخص کنید به طوری که $n\sigma(n) \overset{\phi(n)}{\equiv} 2$. ( منظور از $\sigma(n)$، مجموع همه مقسوم علیه‌های مثبت $n$ است.)

### پاسخ:

فرض کنید $n$ جوابی برای مسأله باشد و $2^a p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ را تجزیه $n$ به عوامل اول متمایز بگیرید. اگر برای یک $1 \leq i \leq k$، $a_i > 1$، آنگاه $p_i$، هم $\phi(n)$ و هم $n$ را می‌شمارد و در نتیجه $p_i|2$ که ممکن نیست. پس برای هر $i$، $a_i = 1$. استدلال مشابه نشان می‌دهد $a \in \{0, 1, 2\}$. اکنون توجه کنید $2^k|\sigma(n)$ و $2^k|\phi(n)$، پس $2^k|2$ و در نتیجه $k \in \{0, 1\}$. بنابراین $n$ یا برابر با ۲ یا برابر با ۴ است و یا عدد اول $p$ وجود دارد به طوری که یا $n = p$، یا $n = 2p$ و یا $n = 4p$.

اگر $n = 2p$، پس $6p(p+1) \overset{p-1}{\equiv} 2$ و از آنجا که $6p(p+1) - 2 = (6p+12)(p-1) + 10$، باید $p - 1$ مقسوم علیهی از ۱۰ باشد و در نتیجه $n \in \{6, 22\}$. حالت $n = 4p$ هم ممکن نیست چرا که در این صورت $4|\phi(n)$ و $4|n$، پس $4|2$ که تناقض است. بنابراین یا $n$ عددی اول است و یا برابر با یکی از اعداد ۱، ۴ ، ۶ و ۲۲ می‌باشد.

---

۱۱) تعدادی دانشجو در یک مسابقه که در آن $n$ سؤال دوگزینه‌ای مطرح شده است، شرکت کرده‌اند و مشخص شده است که مجموعهٔ پاسخ‌های هیچ دو نفری یکسان نیست. اکنون به هر سؤال به صورت مستقل، یکنواخت و تصادفی نمره‌ای از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ اختصاص می‌یابد. ثابت کنید احتمال آن که تنها یک نفر بیش‌ترین مجموع نمرات را بیاورد، حداقل $\frac{۱}{۲}$ است.

### پاسخ:

سؤالات را از یک تا $n$ شماره‌گذاری می‌کنیم و یک بارم‌دهی را با $(w_۱, w_۲, \cdots, w_n)$ نمایش می‌دهیم که $w_i \in \{۱, ۲, \cdots, ۲n\}$.

پیش‌آمد $A$ را این بگیرید که دست‌کم دو نفر ماکزیمم نمره را گرفته باشند و پیش‌آمد $A_i$ را این بگیرید که دو نفر با امتیاز ماکزیمم موجود باشند که یکی سؤال $i$ام را حل کرده باشد و دیگری سؤال $i$ام را حل نکرده باشد.

روشن است که $A = \cup_{i=۱}^n A_i$. زیرا اولاً $A_i \subseteq A$، ثانیاً اگر دو نفر در یک بارم‌دهی ماکزیمم شده باشند، به دلیل فرض مسأله، دست‌کم در یک سؤال با هم اختلاف دارند. پس

$$P(A) = P(\cup_{i=۱}^n A_i) \leq \sum_{i=۱}^n P(A_i).$$

اکنون نشان می‌دهیم برای هر $i$، $P(A_i) \leq \frac{۱}{۲n}$.

**لم.** اگر $(w_۱, \cdots, w_i, \cdots, w_n), (w_۱, \cdots, w'_i, \cdots, w_n) \in A_i$ آنگاه $w_i = w'_i$.

**اثبات.** فرض کنید $w_i < w'_i$. حالتی که بارم سؤال $i$ام $w_i$ است ماکزیمم‌ها دو دسته‌اند؛ آن‌هایی که سؤال $i$ را حل کرده‌اند و آن‌هایی که حل نکرده‌اند. وقتی بارم این سؤال به $w'_i$ افزایش پیدا کند ماکزیمم‌ها منحصر به آن‌هایی می‌شوند که سؤال $i$ را حل کرده‌اند و دیگر ماکزیممی وجود ندارد که سؤال $i$ را حل نکرده باشد که این خلاف فرض است.

از این لم نتیجه می‌شود که با انتخاب تمام $w_j$ها به غیر از $i$امی، حداکثر یک $w_i$ وجود دارد که $(w_۱, \cdots, w_i, \cdots, w_n) \in A_i$ و در نتیجه

$$P(A_i) \leq \frac{(۲n)^{n-۱}}{(۲n)^n} = \frac{۱}{۲n}$$

و لذا $P(A) \leq n\frac{۱}{۲n} = \frac{۱}{۲}$. پس احتمال این که ماکزیمم دقیقاً یک نفر باشد دست‌کم $\frac{۱}{۲}$ است.

# پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

## جلسهٔ دوم ۸۷/۲/۱۹

---

**۱۲)** فرض کنید $\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ و برای هر $s,t \in [0,1]$

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq M|s-t|^\alpha,$$

که در آن $M, \alpha$ اعدادی ثابت و مثبت هستند. نشان دهید اگر $\gamma$ پوشا باشد آنگاه $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

**پاسخ:**

به ازای $n$ ای طبیعی مربع $[0,1] \times [0,1]$ را به $n^2$ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم. در رئوس این تقسیم‌بندی $m = (n+1)^2$ نقطه به وجود می‌آید که آن‌ها را $x_1$، $x_2$، ... و $x_m$ می‌نامیم. واضح است که اگر $i \neq j$ آنگاه

$$|x_i - x_j| \geq \frac{1}{n}.$$

با توجه به پوشا بودن $\gamma$ به ازای هر $i$ وجود دارد $t_i \in [0,1]$ که $x_i = \gamma(t_i)$.
بنابراین برای هر $i \neq j$

$$M|t_i - t_j|^\alpha \geq |\gamma(t_i) - \gamma(t_j)| = |x_i - x_j| \geq \frac{1}{n},$$

در نتیجه $t_i$ ها $(n+1)^2$ نقطهٔ متمایز در $[0,1]$ هستند که فاصلهٔ هر دوتایشان دست‌کم $(Mn)^{\frac{-1}{\alpha}}$ است. این نتیجه می‌دهد که

$$((n+1)^2 - 1)(Mn)^{\frac{-1}{\alpha}} \leq 1$$

در نتیجه

$$n^{2 - \frac{1}{\alpha}} \leq M^{\frac{1}{\alpha}}.$$

برقراری این نابرابری برای هر $n$ نتیجه می‌دهد که توان سمت چپ نمی‌تواند مثبت باشد و این یعنی $\alpha \leq \frac{1}{2}$.