پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ اول ۸۷/۲/۱۸

---

۱) فرض کنید X یک مجموعهٔ k عضوی است. برای یک عدد طبیعی ثابت m، تعداد دنباله‌های $A_۱, \ldots, A_m$ را پیدا کنید که

$$A_۱ \subseteq A_۲ \cdots \subseteq A_m \subseteq X.$$

پاسخ:

برای دنبالهٔ $X \supseteq A_m \supseteq \cdots \supseteq A_۲ \supseteq A_۱ \supseteq \emptyset$، مجموعه‌های

$$\begin{aligned}
&B_۱ = A_۱ \setminus \emptyset\\
&B_۲ = A_۲ \setminus A_۱\\
&\vdots\\
&B_{m+۱} = X \setminus A_m
\end{aligned}$$

زیرمجموعه‌های جدا از هم X هستند که اجتماع آن‌ها برابر X است. بنابراین جواب مسأله معادل قرار دادن k عضو X در $m+۱$ جعبهٔ $B_۱, \ldots, B_{m+۱}$ است و این برابر با تعداد توابع از یک مجموعهٔ k عضوی به یک مجموعهٔ $m+۱$ عضوی یعنی $(m+۱)^k$ می‌باشد.

پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ اول ۸۷/۲/۱۸

---

۲) فرض کنید A_1، A_2، …، A_n ماتریس‌هایی $k \times k$، خودتوان و با درایه‌های حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\mathrm{rank}(I - A_1 A_2 \cdots A_n) \leq \mathrm{N}(A_1) + \mathrm{N}(A_2) + \cdots + \mathrm{N}(A_n).$$

(منظور از $\mathrm{N}(B)$ و $\mathrm{rank}(B)$ به‌ترتیب پوچی و رتبه B می‌باشد.)

پاسخ:

توجه کنید که اگر A یک ماتریس خودتوان باشد، آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که $\mathrm{rank}(I - A) = \mathrm{N}(A)$. پس حکم به ازای $n = 1$ برقرار است. حال به روش استقرای ریاضی، فرض کنید حکم به ازای $n = k$ درست باشد و A_1، A_2،...، A_{k+1} ماتریس‌هایی خودتوان باشند. داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(I - A_1 A_2 \cdots A_{k+1}) &= \mathrm{rank}((I - A_1)A_2 \cdots A_{k+1} + I - A_2 \cdots A_{k+1}) \\ &\leq \mathrm{rank}(I - A_1) + \mathrm{rank}(I - A_2 \cdots A_{k+1}) \\ &\leq \mathrm{N}(A_1) + \mathrm{N}(A_2) + \cdots + \mathrm{N}(A_{k+1})\end{aligned}$$

و بنا بر استقرای ریاضی، اثبات کامل است.

پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ اول ۸۷/۲/۱۸

---

۳) فرض کنید f یک تابع مختلط تام و $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ به گونه‌ای باشند که $\frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. نشان دهید اگر برای هر $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $f(z+w_1) = f(z) = f(z+w_2)$، آنگاه f ثابت است.

پاسخ:

به سادگی می‌توان دید که برای هر m و n صحیح و هر $z \in \mathbb{C}$،

$$f(z + mw_1 + nw_2) = f(z).$$

حالت اول. فرض کنید $\frac{w_1}{w_2}$ حقیقی نباشد. در این صورت 0 و w_1 و w_2 در یک راستا قرار نمی‌گیرند. متوازی‌الاضلاعی با رئوس w_1، 0، w_2 و $w_1 + w_2$ را در نظر بگیرید. تابع f روی ناحیه محدود به این متوازی‌الاضلاع کران‌دار است و از آنجایی که این تابع با دو دورهٔ تناوب w_1 و w_2 متناوب است این ویژگی در همهٔ صفحهٔ مختلط معتبر است. به بیان دقیق‌تر با توجه به این که w_1 و w_2 به عنوان دو بردار در صفحه روی میدان $\mathbb{R}$ مستقل خطی هستند، هر عضو صفحه توسط آن‌ها تولید می‌شود و لذا اعداد حقیقی x و y وجود دارند که $z = xw_1 + yw_2$. در نتیجه

$$f(z) = f(xw_1 + yw_2) = f(([x] + x - [x])w_1 + ([y] + y - [y])w_2) = f((x - [x])w_1 + (y - [y])w_2).$$

اما $(x - [x])w_1 + (y - [y])w_2$ نقطه‌ای در متوازی‌الاضلاع یاد شده است، پس f کران‌دار است و از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌شود که ثابت است.

حالت دوم. فرض کنید $r = \frac{w_1}{w_2}$ عددی حقیقی و گنگ باشد. به دلیل گنگ بودن r، مجموعهٔ $\{mr + n | m, n \in \mathbb{Z}\}$ در $\mathbb{R}$ چگال است و لذا $\{(mr + n)w_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$ شامل یک زیرمجموعهٔ کران‌دار و نامتناهی در $\mathbb{C}$ است. f روی تمام نقاط این مجموعه برابر $f(0)$ است و در نتیجه f ثابت است.

۴) فرض کنید A و B دو نقطهٔ متمایز روی یک سهمی و $n \geq ۳$ عددی طبیعی باشد.
الف. نشان دهید می‌توان $n - ۲$ نقطهٔ $P_۱, \ldots, P_{n-۲}$ را بین A و B روی سهمی طوری انتخاب کرد که مساحت n ضلعی محدب $AP_۱ \ldots P_{n-۲}B$ بیشترین مقدار ممکن شود.
ب. ثابت کنید نسبت مساحت n ضلعی حاصل در قسمت الف به مساحت قطاع سهمی تنها تابعی از n و مستقل از انتخاب A و B است. این نسبت را به دست آورید.
راهنمایی: با توجه به این که تمام سهمی‌ها متشابه هستند، مسأله را برای سهمی $y = x^۲$ ثابت کنید. ابتدا حالت $n = ۳$ را بررسی کنید.

پاسخ:

الف. با توجه به راهنمایی، A را برابر نقطهٔ $(a, a^۲)$ و B را برابر نقطهٔ $(b, b^۲)$ می‌گیریم که هر دو روی سهمی متناظر با تابع $f(x) = x^۲$ قرار دارند و $a < b$. مجموعهٔ X را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$X = \{(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۲}) \in [a, b]^{n-۲} \mid x_۱ \leq x_۲ \leq \cdots \leq x_{n-۲}\}$$

X زیرمجموعهٔ بسته و کران‌دار $\mathbb{R}^{n-۲}$ و در نتیجه فشرده است. اگر قرار دهیم $P_i = (x_i, x_i^۲)$، آنگاه $AP_۱ \cdots P_{n-۲}B$ یک n ضلعی محدب و احتمالاً تباهیده است. با توجه به پیوسته بودن تابع $f(x) = x^۲$، نگاشتی که به هر عضو X مساحت n ضلعی $AP_۱ \cdots P_{n-۲}B$ را نسبت می‌دهد پیوسته است. با توجه به این که هر تابع حقیقی پیوسته روی یک فضای فشرده ناتهی بیشینه خود را می‌گیرد، $(x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۲}) \in X$ وجود دارد که مساحت $AP_۱, \cdots P_{n-۲}B$ بیش‌ترین مقدار ممکن است. این چند ضلعی نمی‌تواند تباهیده باشد زیرا با جابه‌جایی نقطه‌های روی هم افتاده، یک چندضلعی با مساحت بیش‌تر به وجود می‌آید.

ب. مساحت قطاع سهمی به صورت زیر، با کم کردن انتگرال زیر سطح سهمی از ذوزنقهٔ بین وتر AB و محور افقی، به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} S &= \frac{f(b)+f(a)}{۲}(b-a) - \int_a^b f = \frac{b^۲+a^۲}{۲}(b-a) - \frac{۱}{۳}(b^۳ - a^۳) \\ &= \frac{b-a}{۶}(۳(b^۲+a^۲) - ۲(b^۲+ba+a^۲)) = \frac{(b-a)^۳}{۶} \end{aligned}$$

ابتدا حالت $n=3$ را بررسی می‌کنیم. باید $c \in [a,b]$ را طوری بیابیم که مثلث ABC، که در آن $C=(c,c^2)$، بیش‌ترین مساحت ممکن را داشته باشد و این معادل با این است که C بیش‌ترین فاصلهٔ ممکن را تا ضلع AB داشته باشد. چنین حالتی در صورتی ممکن است که مماس در نقطهٔ C با ضلع AB موازی باشد، یعنی

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و در نتیجه $c = \frac{b+a}{2}$. تا این جا محل C مشخص شده است. محاسبهٔ مساحت مثلث ABC هم ساده است.

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{b^2+a^2}{2}(b-a) - \frac{c^2+a^2}{2}(c-a) - \frac{b^2+c^2}{2}(b-c) \\ &= \frac{b-a}{4}(2(b^2+a^2) - (b^2+a^2+2(\frac{b+a}{2})^2)) = \frac{(b-a)^3}{8} \end{aligned}$$

و در نتیجه $\frac{S_3}{S} = \frac{3}{4}$. به این ترتیب حکم برای $n=3$ ثابت شد. به‌علاوه جای نقطهٔ سوم نیز مشخص شد.

برای اثبات حالت کلی، فرض کنید بزرگ‌ترین n ضلعی با افراز زیر تولید شود.

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots < x_{n-2} < x_{n-1} = b$$

با توجه به جواب حالت $n=3$ برای هر $0 < k < n-1$ باید $x_k = \frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2}$ و این نتیجه می‌دهد که افرازی که مساحت را بیشینه می‌کند منظم است. به عبارت دیگر

$$x_k = a + \frac{k}{n-1}(b-a)$$

مساحت n ضلعی حاصل به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b^2+a^2}{2}(b-a) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^2+x_{k-1}^2}{2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{2(n-1)}((n-1)(b^2+a^2) - \sum_{k=1}^{n-1}((a+\frac{k}{n-1}(b-a))^2 + (a+\frac{k-1}{n-1}(b-a))^2)) \\ &= \frac{b-a}{2(n-1)}((n-1)(b^2-a^2) - \frac{2a(b-a)}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) - \frac{(b-a)^2}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+(k-1)^2)) \\ &= \frac{(b-a)^2}{2(n-1)^3}((n-1)^3(b+a) - 2a(n-1)^3 - (b-a)\frac{n-1}{3}(2n^2-4n+3)) \\ &= \frac{(b-a)^3}{6(n-1)^2}(n^2-2n) \end{aligned}$$

و در نتیجه $\frac{S_n}{S} = \frac{n(n-2)}{(n-1)^2} = 1 - \frac{1}{(n-1)^2}$ که تنها تابع n است.

پاسخ سؤالات سی و دومین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ اول ۸۷/۲/۱۸

---

۵) زیرمجموعهٔ غیرتهی S از خانه‌های یک صفحهٔ شطرنجی $n\times n$ را زوج می‌گوییم هر گاه از هر سطر و ستون صفحهٔ شطرنجی تعدادی زوج خانه متعلق به S باشد. حداقل k چقدر باشد تا مطمئن شویم هر زیرمجموعهٔ k عضوی از خانه‌ها شامل یک زیرمجموعهٔ زوج است.

پاسخ:

جواب $k=۲n$ است. ابتدا توجه کنید که زیرمجموعه‌هایی با $۲n-۱$ عضو از صفحهٔ شطرنجی $n\times n$ وجود دارند که شامل هیچ زیرمجموعهٔ زوجی نیستند. برای مثال خانه‌های روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی را در نظر بگیرید.

اکنون با استقراء روی n ثابت می‌کنیم که انتخاب هر $۲n$ خانه از صفحهٔ شطرنجی زیرمجموعه‌ای زوج دارد. نتیجه برای $n=۱$ (به انتفاع مقدم) و $n=۲$ به روشنی برقرار است.

فرض کنید یک صفحهٔ شطرنجی $(n+۱)\times(n+۱)$ داریم و $۲n+۲=۲(n+۱)$ خانه از آن انتخاب شده است. اگر از هر سطر و ستون دقیقاً دو خانه انتخاب شده باشد که خود آن مجموعه زوج است.

در هر یک از حالات زیر با حذف سطر و ستونی مناسب به صفحهٔ شطرنجی $n\times n$ ای می‌رسیم که از آن حداقل $۲n$ خانه انتخاب شده است.

- الف ـ اگر از هر سطر دو خانه انتخاب شده باشد، اما از هر ستون دقیقاً دو خانه انتخاب نشده باشد به ستونی مانند j نگاه می‌کنیم که از آن حداکثر یک خانه انتخاب شده است. اگر از ستون j خانه‌ای انتخاب شده باشد، مثلاً در سطر i، آنگاه سطر i را حذف می‌کنیم. در صورتی که از ستون j خانه‌ای انتخاب نشده باشد سطری دلخواه را حذف می‌کنیم. ستون j را هم حذف می‌کنیم.
- ب ـ اگر از سطری مانند i دقیقاً یک خانه انتخاب شده باشد، مثلاً در ستون j، آنگاه به ستون j نگاه می‌کنیم. اگر از ستون j، حداکثر ۲ خانه انتخاب شده باشد سطر i و ستون j را حذف می‌کنیم. اگر از ستون j، بیش‌تر از دو خانه انتخاب شده باشد، ستونی مانند j' وجود دارد که از آن حداکثر یک خانه انتخاب شده است. در این صورت ستون j' و سطر i را حذف می‌کنیم.
- ج ـ اگر از سطری مانند i هیچ خانه‌ای انتخاب نشده باشد، ستونی مانند j وجود دارد که از آن حداکثر ۲ خانه انتخاب شده است، سطر i و ستون j را حذف می‌کنیم.

---

۶) ثابت کنید حلقه‌ای وجود ندارد به طوری که دقیقاً دارای پنج عضو منظم باشد. (عضو a از یک حلقه را منظم می‌نامیم اگر همواره از $ax=\circ$ یا $xa=\circ$ نتیجه شود $x=\circ$. همچنین توجه کنید که حلقه‌ها لزوماً یکدار، جابجایی یا متناهی نیستند.)

پاسخ:

به روش برهان خلف، فرض کنید R حلقه‌ای با دقیقاً پنج عضو منظم باشد. به راحتی دیده می‌شود که مجموعه عناصر منظم R نسبت به عمل ضرب بسته است؛ یعنی، به همراه عمل ضرب تشکیل یک نیم گروه می‌دهد. حال از آنجا که هر نیم گروه متناهی حداقل یک عضو خودتوان دارد بنابراین عضو منظم $e\in R$ وجود دارد به طوری که $e^{۲}=e$. پس برای هر $x\in R$، $e(ex-x)=\circ=(xe-x)e$ و چون e منظم است داریم $ex=x=xe$؛ یعنی، R حلقه‌ای یکدار با عضو همانی ضربی e است. برای راحتی از اینجا به بعد بجای استفاده از نماد e، عضو همانی ضربی حلقه را با ۱ نشان می‌دهیم.

اکنون اگر y عضوی منظم باشد چون $y^{۲}$، $y^{۳}$، ... نیز منظم هستند و R فقط پنج عضو منظم دارد، پس اعداد طبیعی $m>n$ وجود دارند به طوری که $y^m=y^n$. به این ترتیب $y^ny^{m-n}=y^n۱$ و در نتیجه $y^{m-n}=۱$؛ یعنی، هر عضو منظم معکوس‌پذیر است. از طرفی واضح است که هر عضو معکوس‌پذیر منظم است. از این رو R حلقه‌ای یکدار است که $U(R)$، گروه عناصر معکوس‌پذیر R، گروهی پنج عضوی است حال از یک طرف $(-۱)^{۲}=۱$ و از طرف دیگر چون $U(R)$ گروهی ۵ عضوی است، پس $(-۱)^{۵}=۱$ و در نتیجه $-۱=۱$. بنابراین مشخصه R برابر با ۲ است. پس اگر α را مولدی برای گروه $U(R)$ بگیریم، آنگاه

$$(۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳})^{۳}=(۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳}+\alpha^{۲}+\alpha^{۴}+\alpha^{۵}+\alpha^{۳}+\alpha^{۵}+\alpha^{۶})(۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳})=(۱+\alpha+\alpha^{۳})(۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳})$$
$$=۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳}+\alpha+\alpha^{۳}+\alpha^{۴}+\alpha^{۴}+\alpha^{۶}+\alpha^{۷}=۱+\alpha^{۲}+\alpha+\alpha^{۶}+\alpha^{۷}=۱$$

به این ترتیب $۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳}\in U(R)$ و در نتیجه $(۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳})^{۵}=۱$. اما چون $(۳,۵)=۱$، باید داشته باشیم $۱+\alpha^{۲}+\alpha^{۳}=۱$. پس $\alpha^{۲}(۱+\alpha)=\circ$ و در نتیجه $\alpha=۱$ که تناقض است.