سؤالات نوبت دوم سی و یکمین مسابقات ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱   **مدت امتحان : ۴ ساعت**

---

۷) فرض کنیم n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید n عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل است. در ادامه تعیین کنید که آیا دوازده عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل باشد؟

۸) به ازای چه مقادیری از اعداد حقیقی ناصفر α و β، حد زیر موجود (و متناهی) است؟

$$\lim_{x,y\to 0^+} \frac{x^{2\alpha}y^{2\beta}}{x^{3\alpha}+y^{3\beta}}$$

۹) فرض کنید A یک مجموعهٔ ناتهی و A^n مجموعهٔ n تاییِ‌های مرتب عناصر A باشد. برای هر $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ و $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ در A^n تعریف می‌کنیم:

$d(\alpha,\beta) =$ تعداد مؤلفه‌های متناظر α و β که با یکدیگر متفاوتند

برای هر دو عضو دلخواه x و y در A^n، ثابت کنید تناظری یک به یک بین دو مجموعهٔ زیر وجود دارد:

$$C=\{z\in A^n : d(x,z)<d(y,z)\}$$
$$D=\{z\in A^n : d(y,z)<d(x,z)\}$$

۱۰) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید حلقهٔ $R[x]$ دارای تعدادی نامتناهی ایدآل ماکسیمال است.

۱۱) فرض کنید x_1، x_2، ... و x_{2n} اعدادی حقیقی باشند که با برداشتنِ هر یک از آن‌ها، بقیه به دو دسته با حاصل جمع‌های برابر تقسیم می‌شوند ($n\geq 2$). ثابت کنید همهٔ x_i ها صفرند.

۱۲) فرض کنید T اجتماع تمام پاره‌خط‌هایی در صفحه باشد که یک سرشان نقطه $M=(0,1)$ و سر دیگرشان نقطه‌ای با مختصات گویا روی محور x هاست. به عبارت دیگر

$$T=\{(tq,1-t)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[0,1], q\in\mathbb{Q}\}$$

الف. فرض کنید $A,B\in T$ به طوری که A، B و M بر یک راستا نباشند. نشان دهید هر مسیر پیوسته از نقطهٔ A به نقطهٔ B در مجموعهٔ T، حتماً از نقطهٔ M عبور می‌کند. (منظور از مسیر یادشده، تابعی پیوسته مثل $\gamma:[0,1]\to T$ است که $\gamma(0)=A$ و $\gamma(1)=B$.)

ب. ثابت کنید هر تابع پیوسته از T به T دست کم یک نقطهٔ ثابت دارد.