پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

---

۷) فرض کنیم n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید n عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل است. در ادامه تعیین کنید که آیا دوازده عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموعشان مربع کامل باشد؟

پاسخ:

اگر n طبیعی و فرد باشد آنگاه رابطهٔ $(\frac{n-۱}{۲}+۱)+(\frac{n-۱}{۲}+۲)+\cdots(\frac{n-۱}{۲}+n)=n^۲$ قسمت اول مسئله را ثابت می‌کند. برای بررسی قسمت دوم، فرض کنیم m و k اعدادی صحیح باشند و $(m+۱)+(m+۲)+\cdots+(m+۱۲)=k^۲$. بنابراین $۱۲m+۷۸=k^۲$. پس k زوج است، مثلاً $k=۲t$. حال با جایگذاری در رابطه قبل داریم $۲t^۲-۶m=۳۹$ که ممکن نیست زیرا سمت چپ این تساوی عددی زوج است.

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

---

۸) به ازای چه مقادیری از اعداد حقیقی ناصفر α و β، حد زیر موجود (و متناهی) است؟

$$\lim_{x,y\to 0^+} \frac{x^{2\alpha}y^{2\beta}}{x^{3\alpha}+y^{3\beta}}$$

پاسخ: با تغییر متغیر $u=x^\alpha$ و $v=y^\beta$، مسأله به بررسی عبارت زیر منجر می‌شود.

$$\frac{u^2v^2}{u^3+v^3} \tag{5}$$

که البته بسته به علامت α و β نقطه‌ای که باید u و v به آن میل کنند صفر یا بی‌نهایت است.

حالت اول: $\alpha,\beta>0$. در این حالت حد (۵) باید وقتی بررسی شود که $u,v\to 0^+$. این حد موجود و برابر صفر است زیرا

$$0\le \frac{u^2v^2}{u^3+v^3}=\left(\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}\sqrt{uv}\le\frac{\sqrt{uv}}{2} \tag{7}$$

حالت دوم (و سوم): $\alpha>0$ و $\beta<0$ (و برعکس). در این حالت حد (۵) باید وقتی بررسی شود که $u\to 0^+$ و $v\to+\infty$. در این حالت هم حد موجود و برابر صفر است زیرا

$$0\le\frac{u^2v^2}{u^3+v^3}=\frac{u^2}{\frac{u^3}{v^2}+v}\le\frac{u^2}{v} \tag{9}$$

حالت چهارم: $\alpha,\beta<0$. در این حالت حد (۵) باید وقتی بررسی شود که $u,v\to+\infty$. نشان می‌دهیم که در این حالت حد از مسیری خاص بی‌نهایت است؛ مسیر $u=v$ را در نظر بگیرید. حد مورد نظر به عبارت زیر تبدیل می‌شود.

$$\frac{u^4}{2u^3}=\frac{u}{2}\to+\infty \tag{11}$$

بنابراین در این حالت حد موجود نیست.

حل دوم: بعد از تغییر متغیر، می‌توان قسمت‌های اول تا سوم را به شکل زیر هم بررسی کرد.

$$0\le\frac{u^2v^2}{u^3+v^3}\le\min\{\frac{u^2}{v},\frac{v^2}{u}\}\le\max\{u,v\}$$

همگرایی حالت اول از نابرابری نهایی و همگرایی حالت‌های دوم و سوم از نابرابری میانی نتیجه می‌شود.

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

---

۹) فرض کنید A یک مجموعهٔ ناتهی و A^n مجموعهٔ n تایی‌های مرتب عناصر A باشد. برای هر $\alpha = (\alpha_۱, \dots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_۱, \dots, \beta_n)$ در A^n تعریف می‌کنیم:

تعداد مؤلفه‌های متناظر α و β که با یکدیگر متفاوتند $= d(\alpha, \beta)$

برای هر دو عضو دلخواه x و y در A^n، ثابت کنید تناظری یک به یک بین دو مجموعهٔ زیر وجود دارد:

$$C = \{z \in A^n : d(x,z) < d(y,z)\}$$
$$D = \{z \in A^n : d(y,z) < d(x,z)\}$$

پاسخ:

فرض کنید $x = (x_۱, \dots, x_n)$ و $y = (y_۱, \dots, y_n)$. تابع f را از A^n به A^n با ضابطهٔ

$$f : z = (z_۱, \dots, z_n) \longmapsto z' = (z'_۱, \dots, z'_n)$$

با ضابطهٔ

$$Z'_j = \begin{cases} x_j \ , & z_j = x_j \neq y_j \\ y_j \ , & z_j = y_j \neq x_j \\ z_j \ , & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

برای $۱ \leq j \leq n$ تعریف می‌کنیم: می‌توان نشان داد که تابع f از A^n به A^n برای هر $z \in A^n$ دارای خاصیت زیر است:

$$d(z,x) = d(z',y),$$
$$d(z,y) = d(z',x)$$

لذا f تابعی یک‌به‌یک و پوشا است که C را به روی D و D را به روی C می‌نگارد.

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

---

۱۰) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یک‌دار باشد. ثابت کنید حلقهٔ $R[x]$ دارای تعدادی نامتناهی ایدآل ماکسیمال است.

پاسخ:

ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر F یک میدان باشد آنگاه حلقه $F[x]$ دارای تعدادی نامتناهی ایدال ماکسیمال است.

برای اثبات توجه کنیم که چون ایدال تولید شده توسط یک چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر و مونیک، ماکسیمال است و ایدال‌های تولید شده توسط دو چندجمله‌ای تجزیه‌ناپذیر و مونیکِ متمایز، متمایز هستند، کافی است نشان دهیم که تعداد چندجمله‌ای‌های مونیک و تجزیه‌ناپذیر در $F[x]$ نامتناهی است. برای این کار به روش برهان خلف، فرض کنید f_1، f_2،...، f_n لیستی از همهٔ چندجمله‌ای‌های مونیک و تجزیه‌ناپذیر در $F[x]$ باشد. چون که چندجمله‌ای $f_1 f_2 \cdots f_n + 1$ حتماً باید عاملی تجزیه‌ناپذیر و مونیک داشته باشد پس برای یک i، $f_1 f_2 \cdots f_n + 1$ مضربی از f_i است. اما $f_1 f_2 \cdots f_n$ هم مضرب f_i است و در نتیجه چندجمله‌ای ثابت ۱ هم مضرب f_i بوده که تناقض است (برهان اقلیدس برای اثبات نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول را بیاد آورید).

اکنون برای اثبات مسئله در حالت کلی، فرض کنید M ایدال ماکسیمالی در R باشد. طبق قسمت قبل، حلقه $(\frac{R}{M})[x]$ دارای نامتناهی ایدال ماکسیمال است. حال از آنجا که نگاشت $\phi : R[x] \longrightarrow (\frac{R}{M})[x]$ با ضابطهٔ $\phi(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_n + M)x^n + \cdots + (a_1 + M)x + (a_0 + M)$ یک همریختی پوشا است نتیجه می‌شود که $R[x]$ هم دارای نامتناهی ایدال ماکسیمال است: چراکه برای هر ایدال ماکسیمال در $(\frac{R}{M})[x]$ مانند I، $\phi^{-1}(I)$ هم ایدالی ماکسیمال در $R[x]$ است و اگر $I \neq J$ آنگاه $\phi^{-1}(I) \neq \phi^{-1}(J)$.

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

---

۱۱) فرض کنید $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_{۲n}$ اعدادی حقیقی باشند که با برداشتنِ هر یک از آن‌ها، بقیه به دو دسته با حاصل جمع‌های برابر تقسیم می‌شوند ($n \geq ۲$). ثابت کنید همهٔ x_i ها صفرند.

پاسخ: مسأله را می‌توانیم به صورت $A\begin{bmatrix} x_۱ \\ \vdots \\ x_{۲n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$ بازنویسی کنیم که A ماتریسی به صورت

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & & \pm ۱ \\ & \ddots & \\ \pm ۱ & & ۰ \end{bmatrix}_{۲n \times ۲n}$$

می‌باشد؛ یعنی درایه‌های قطر اصلی آن همه صفر و بقیه درایه‌ها ۱+ یا ۱− هستند. اگر نشان دهیم که A یک ماتریس وارون پذیر است، مسأله حل است.

چون دترمینان این ماتریس عددی صحیح است، نشان می‌دهیم که $|A|$ به پیمانهٔ ۲ برای هر n برابر ۱ است و بنابراین نمی تواند صفر باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & & \pm ۱ \\ & \ddots & \\ \pm ۱ & & ۰ \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} ۰ & & ۱ \\ & \ddots & \\ ۱ & & ۰ \end{vmatrix} \pmod 2$$

= تعداد جایگشت‌های $۲n$ عنصر که در آنها هیچ عنصری سر جای خودش قرار ندارد $= ۲n!\left(\frac{۱}{۰!} - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} \ldots + (-۱)^{۲n}\frac{۱}{(۲n)!}\right)$

$$\equiv ۱ \pmod 2$$

---

۱۲) فرض کنید T اجتماع تمام پاره‌خط‌هایی در صفحه باشد که یک سرشان نقطه $M=(۰,۱)$ و سر دیگرشان نقطه‌ای با مختصات گویا روی محور x هاست. به عبارت دیگر

$$T=\{(tq,۱-t)\in\mathbb{R}^۲ \mid t\in[۰,۱], q\in\mathbb{Q}\}$$

الف. فرض کنید $A,B\in T$ به طوری که A، B و M بر یک راستا نباشند. نشان دهید هر مسیر پیوسته از نقطهٔ A به نقطهٔ B در مجموعهٔ T، حتماً از نقطهٔ M عبور می‌کند. (منظور از مسیر یادشده، تابعی پیوسته مثل $\gamma:[۰,۱]\to T$ است که $\gamma(۰)=A$ و $\gamma(۱)=B$.)

ب. ثابت کنید هر تابع پیوسته از T به T دست کم یک نقطهٔ ثابت دارد.

پاسخ:

الف) با توجه به فرض $A=(t_۱q_۱,۱-t_۱)$ و $B=(t_۲q_۲,۱-t_۲)$ که $t_۱,t_۲\in(۰,۱]$ و $q_۱$ و $q_۲$ دو عدد گویای متمایز هستند. واضح است اگر α عدد گنگی بین این دو عدد گویا باشد خط واصل بین M و نقطهٔ $(\alpha,۰)$ دو نیم‌صفحه می‌سازد که $T\backslash\{M\}$ را می‌پوشاند و در ضمن A و B در دو نیم‌صفحه مختلف می‌افتند و در نتیجه ممکن نیست مسیری پیوسته داخل $T\backslash\{M\}$ بین A و B وجود داشته باشد.

ب) فرض کنید $f:T\to T$ پیوسته باشد و

$$F(M)=M'=(\lambda p,۱-\lambda) \qquad (۱)$$

اگر $\lambda=۰$ مسأله حل است زیرا M نقطه ثابت f است. حالتی را بررسی می‌کنیم که $\lambda>۰$. تابع $g:[۰,۱]\to T$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$g(t)=f(tp,۱-t) \qquad (۲)$$

واضح است که g نیز پیوسته است. مجموعه D را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$D=\{(tp,۱-t)\in T \mid t\in[۰,۱]\} \qquad (۳)$$

D در واقع همان پاره‌خط شامل M و M'، و لذا یکریخت با یک بازه فشرده است. نشان می‌دهیم که D شامل دست‌کم یک نقطهٔ ثابت برای f است. اگر هیچ‌کدام از نقاط D تحت f به M نروند مسأله حل است زیرا طبق (الف)، $f(D)$ زیرمجموعهٔ D است و در نتیجه f دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد.
پس فرض می‌کنیم بعضی از نقاط D، تحت f به نقطه M بروند. تعریف می‌کنیم

$$t_۰=\inf\{t\in[۰,۱] \mid g(t)=M\}. \qquad (۴)$$

پاسخ سؤالات سی و یکمین مسابقهٔ ریاضی دانشجویی کشور

جلسهٔ دوم ۸۶/۲/۲۱

با توجه به پیوستگی g و این که $g(0) = f(M) \neq M$، داریم

$$t_0 > 0 \tag{5}$$

و به‌علاوه

$$g(t_0) = M \tag{6}$$

و هم‌چنین با توجه به قسمت (الف) تصویر نقاط بازه $[0, t_0]$ تحت g، داخل پاره‌خط D می‌افتند.
فرض کنید $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تصویر روی مؤلفهٔ دوم باشد. در این صورت

$$\pi((g(0)) = 1 - \lambda < 1 - 0 \tag{7}$$

و

$$\pi((g(t_0)) = \pi(M) = 1 > 1 - t_0 \tag{8}$$

در نتیجه وجود دارد $t_1 \in (0, t_0)$ به طوری که

$$\pi(g(t_1)) = 1 - t_1 \tag{9}$$

و با توجه به این‌که $g(t_1) \in D$ خواهیم داشت

$$f(t_1 p, 1 - t_1) = (t_1 p, 1 - t_1) \tag{10}$$

و این یعنی f نقطه ثابت دارد.