سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹   **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

---

۱) فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بوده و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(nx)dx.$$

۲) فرض کنید $m\in\mathbb{N}$ ، $c\in\mathbb{C}$ ، $a_j\in\mathbb{C}$ ، و $|a_j|=1$ برای هر $1\le j\le m$. اگر

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{m} a_j^n = c,$$

آنگاه $c=m$ و برای هر $1\le j\le m$ داریم $a_j=1$.

۳) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و دارای عضوی چون a باشد به گونه‌ای که $a^3-a-1=0$. ثابت کنید اگر J ایدآلی از R باشد که حلقهٔ خارج قسمتی R/J حداکثر چهار عضو داشته باشد، آنگاه $J=R$.

۴) فرض کنید p و q دو عدد اول باشند به طوری که $q\equiv 1 \pmod 4$ و $p=2q+1$. ثابت کنید ۲ ریشهٔ اولّیه‌ای به پیمانهٔ p است.

۵) ثابت کنید برای هر $m\ge 1$ داریم:

$$\sum_{|k|<\sqrt{m}}\binom{2m}{m+k}\ge 2^{2m-1}$$

راهنمایی: طبق نامساوی چبیشف اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه $P(|X-\mu|\ge\lambda\sigma)\le\frac{1}{\lambda^2}$.

۶) در یک گروه تجاری n نفر شرکت دارند که هر کدام تعدادی سکه دارد. فرض کنید k یک عدد طبیعی ثابت باشد. برای انجام یک معامله چهار نفر از n نفر به دلخواه و با ترتیب انتخاب می‌شوند به شرطی که

الف) $2k+$(مجموع تعداد سکه‌های نفر اول و دوم)$-$(مجموع تعداد سکه‌های نفر سوم و چهارم) >0

ب) هر کدام از نفرهای اول و دوم حداقل k سکه داشته باشند.

در این صورت معامله به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

از سکه‌های نفرات اول و دوم هر کدام دقیقاً k سکه کم می‌شود و به سکه‌های نفرات سوم و چهارم هر کدام دقیقاً k سکه اضافه می‌شود. ثابت کنید همواره پس از تعداد متناهی معامله شرط الف یا ب برای هیچ چهار نفری برقرار نخواهد بود.