پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

۱) فرض کنید $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته بوده و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$. مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(nx)dx.$$

پاسخ:

کافی است حد زیر را بیابیم:

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(tx)dx$$

قرار دهید $tx=u$. داریم

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(tx)dx=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_{1385t}^{2006t} f(u)du.$$

از آنجا که $\lim_{t\to+\infty} t=+\infty$، با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال می‌توان نوشت

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(tx)dx=\lim_{t\to+\infty}(2006f(2006t)-1385f(1385t))=(2006-1385)1=621.$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{1385}^{2006} f(nx)dx=621.$$

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

۲) فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ ، $c \in \mathbb{C}$ ، $a_j \in \mathbb{C}$ ، و $|a_j| = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m$. اگر

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=۱}^{m} a_j^n = c,$$

آنگاه $c = m$ و برای هر $۱ \leq j \leq m$ داریم $a_j = ۱$.

پاسخ:

با استقراء روی m نشان می‌دهیم که یک دنباله $\{k_\ell\}$ از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که $\lim_{\ell \to \infty} a_j^{k_\ell} = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m$.

اگر $m = ۱$، حکم بدیهی است. فرض کنید که حکم برای $m - ۱$ برقرار باشد. بنابر فرض استقراء یک دنباله مانند $\{k_\ell\}$ وجود دارد به طوری که $\lim\limits_{\ell \to \infty} a_j^{k_\ell} = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m - ۱$. بدون از دست دادن کلیت، اگر لازم بود با گذر به یک زیردنبالهٔ $\{k_\ell\}$، می‌توانیم فرض کنیم $\lim\limits_{\ell \to \infty} a_j^{k_\ell} = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m - ۱$ و $\lim\limits_{\ell \to \infty} a_m^{k_\ell} = b_m$ که در آن $b_m \in \mathbb{C}$ و $|b_m| = ۱$. قرار دهید

$$A = \{(a_۱^k, \ldots, a_{m-۱}^k, a_m^k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

فرض کنید A' مجموعهٔ نقاط حدی A باشد. واضح است که $(۱, \ldots, ۱, b_m^k) \in A'$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. از آنجا که $|b_m| = ۱$، یک زیردنباله مانند $\{k'_r\}$ موجود است است به طوری که $\lim\limits_{r \to \infty} b_m^{k'_r} = ۱$. در نتیجه $(۱, \ldots, ۱) \in (A')' \subseteq A'$. بنابراین یک زیردنباله مانند $\{k_p\}$ موجود است به طوری که $\lim\limits_{p \to \infty} (a_۱^{k_p}, \ldots, a_{m-۱}^{k_p}, a_m^{k_p}) = (۱, \ldots, ۱, ۱)$ و لذا $\lim\limits_{p \to \infty} a_j^{k_p} = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m$. حال با استفاده از فرض مسأله می‌توان نوشت

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{j=۱}^{m} a_j^{k_p + ۱} = c = \lim_{p \to \infty} \sum_{j=۱}^{m} a_j^{k_p} = \sum_{j=۱}^{m} ۱ = m.$$

از آنجا که $\lim\limits_{p \to \infty} a_j^{k_p} = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m$، داریم $\sum_{j=۱}^{m} a_j = m$.

حال داریم

$$m = \sum_{j=۱}^{m} a_j = \sum_{j=۱}^{m} Re(a_j) \leq m.$$

و چون $Re(a_j) \leq ۱$، تساوی فقط در صورتی برقرار است که $Re(a_j) = ۱$. حال با توجه به آنکه a_j ها روی دایره واحد هستند داریم $a_j = ۱$ برای هر $۱ \leq j \leq m$.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

۳) فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و دارای عضوی چون a باشد به گونه‌ای که $a^۳ - a - ۱ = ۰$. ثابت کنید اگر J ایدآلی از R باشد که حلقهٔ خارج قسمتی R/J حداکثر چهار عضو داشته باشد، آنگاه $J = R$.

پاسخ:

از فرض جابه‌جایی بودن R استفاده نمی‌کنیم. با در نظر گرفتن اعضای

$$J,\ ۱ + J,\ a + J,\ a^۲ + J,\ a^۳ + J$$

در حلقهٔ حداکثر چهار عضوی R/J، معلوم می‌شود که دست کم دو تا از آن‌ها با هم برابرند. پس دست کم یکی از $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ حالت زیر رخ می‌دهد:

$$\begin{array}{llll}
J = ۱ + J, & J = a + J, & J = a^۲ + J, & J = a^۳ + J, \\
 & ۱ + J = a + J, & ۱ + J = a^۲ + J, & ۱ + J = a^۳ + J, \\
 & & a + J = a^۲ + J, & a + J = a^۳ + J, \\
 & & & a^۲ + J = a^۳ + J.
\end{array}$$

در نتیجه دست کم یکی از اعضای زیر از R در J قرار دارند:

$$۱,\ a,\ a^۲,\ a^۳,\ a - ۱,\ a^۲ - ۱,\ a^۳ - ۱ = a,\ a^۲ - a,\ a^۳ - a,\ a^۳ - a^۲ \qquad (*)$$

توجه می‌کنیم که هر یک از اعضای اخیر، حاصلضرب مناسبی از اعضای ۱، a، $a - ۱$، و $a + ۱$ می‌باشد. رابطهٔ $a(a - ۱)(a + ۱) = ۱$ نشان می‌دهد که هر یک از اعضای اخیر و در نتیجه هر یک از اعضای لیست $(*)$ در R وارون پذیر است. به این ترتیب، J به‌عنوان ایدالی از R و دارای دست کم یک عضو وارون‌پذیر از آن، با R برابر است.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

۴) فرض کنید p و q دو عدد اول باشند به طوری که $q \equiv ۱ \pmod{۴}$ و $p = ۲q + ۱$. ثابت کنید ۲ ریشهٔ اولّیه‌ای به پیمانهٔ p است.

پاسخ:

از آنجا که p یک عدد اول فرد است، داریم $۲^{p-۱} \equiv ۱ \pmod{p}$. فرض کنید s کوچکترین عدد طبیعی باشد که $۲^s \equiv ۱ \pmod{p}$. خواهیم داشت $s \mid p - ۱ = ۲q$ و چون q اول است، $s = ۱,\ ۲,\ q$ یا $۲q$. به منظور حصول به یک تناقض، فرض کنید $s < ۲q$. حالات زیر را خواهیم داشت:

حالت اول، $s = ۱$. در این حالت خواهیم داشت $p \mid ۱$ که یک تناقض است.

حالت دوم، $s = ۲$. در این حالت خواهیم داشت $p = ۳$ که منجر به تناقض $q = ۱$ می‌شود.

حالت سوم، $s = q$. در این حالت معادلهٔ $x^۲ \equiv ۲^q \pmod{p}$ بر حسب x دارای جواب صحیح است و بنابراین $(\frac{۲^q}{p}) = ۱$. از طرف دیگر داریم:

$$(\frac{۲^q}{p}) = (\frac{۲}{p})^q = (-۱)^{\frac{q(p^۲-۱)}{۸}} = (-۱)^{\frac{q(۲q)(۲q+۲)}{۸}} = (-۱)^{\frac{q^۲(q+۱)}{۲}} = -۱$$

که در تساوی آخر از $q \equiv ۱ \pmod{۴}$ استفاده شده است. این هم یک تناقض است.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

۵) ثابت کنید برای هر $m \geq ۱$ داریم:

$$\sum_{|k|<\sqrt{m}} \binom{۲m}{m+k} \geq ۲^{۲m-۱}$$

راهنمایی: طبق نامساوی چبیشف اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، آنگاه $P(|X-\mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{۱}{\lambda^۲}$.

پاسخ:

فرض کنید $X = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_{۲m}$ که X_i ها مستقل هستند و هر X_i مقادیر صفر و یک را با احتمال $\frac{۱}{۲}$ می‌گیرد. واضح است که

$$\mu = m \qquad \text{و} \qquad \sigma^۲ = \frac{m}{۲}$$

با استفاده از نامساوی چبیشف و برای $\lambda = \sqrt{۲}$ داریم،

$$P(|X-m| \geq \sqrt{m}) \leq \frac{۱}{۲}$$

لذا

$$P(|X-m| < \sqrt{m}) \geq \frac{۱}{۲} \qquad\qquad *$$

از طرفی

$$P(|X-m| < \sqrt{m}) = \sum_{|k|<\sqrt{m}} \binom{۲m}{m+k} (\frac{۱}{۲})^{۲m}$$

با توجه به $*$ نتیجه می‌شود

$$\sum_{|k|<\sqrt{m}} \binom{۲m}{m+k} (\frac{۱}{۲})^{۲m} \geq \frac{۱}{۲}$$

پس حکم نتیجه می‌شود.

پاسخ سؤالات سی‌امین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۵/۲/۱۹

---

٦) در یک گروه تجاری n نفر شرکت دارند که هر کدام تعدادی سکه دارد. فرض کنید k یک عدد طبیعی ثابت باشد. برای انجام یک معامله چهار نفر از n نفر به دلخواه و با ترتیب انتخاب می‌شوند به شرطی که

الف) (مجموع تعداد سکه‌های نفر سوم و چهارم) $-$ (مجموع تعداد سکه‌های نفر اول و دوم) $+2k > 0$

ب) هر کدام از نفرهای اول و دوم حداقل k سکه داشته باشند.

در این صورت معامله به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

از سکه‌های نفرات اول و دوم هر کدام دقیقاً k سکه کم می‌شود و به سکه‌های نفرات سوم و چهارم هر کدام دقیقاً k سکه اضافه می‌شود. ثابت کنید همواره پس از تعداد متناهی معامله شرط الف یا ب برای هیچ چهار نفری برقرار نخواهد بود.

پاسخ:

فرض کنید تعداد سکه‌های شخص i ام بعد از معامله j ام، a_{ij} باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله فرض کنید معامله $(j+1)$ ام بین نفرات اول تا چهارم انجام گردد. طبق شرط مسأله داریم

$$a_{3j}+a_{4j}-a_{1j}-a_{2j}+2k>0 \underset{\text{با ضرب در } 2k}{\Longrightarrow} 2ka_{3j}+2ka_{4j}-2ka_{1j}-2ka_{2j}+4k^2>0$$

$$\Rightarrow\quad a_{1j}^2+a_{2j}^2+a_{3j}^2+a_{4j}^2+2ka_{3j}+2ka_{4j}-2ka_{1j}-2ka_{2j}+4k^2>a_{1j}^2+a_{2j}^2+a_{3j}^2+a_{4j}^2$$

$$\Rightarrow\quad (a_{3j}+k)^2+(a_{4j}+k)^2+(a_{1j}-k)^2+(a_{2j}-k)^2>a_{1j}^2+a_{2j}^2+a_{3j}^2+a_{4j}^2$$

لذا

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i(j+1)}^2 > \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

از طرفی مجموع تعداد سکه‌ها عددی ثابت است. لذا همواره تعداد کل معامله‌ها متناهی خواهد بود.