بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳ **مدت امتحان : ۳/۵ ساعت**

---

۱) فرض کنید $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مثبت باشد. ثابت کنید

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)\left(\int_0^a \frac{dx}{f(x)}\right)\geq a^2.$$

۲) فرض کنید $\{n_i\}$ دنباله‌ای صعودی (نه لزوماً اکید) از اعداد طبیعی با شرط $n_1\geq 2$ باشد به طوری که سری $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_1\dots n_i}$ همگرا به عددی حقیقی چون x است. ثابت کنید x گویاست اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند ℓ موجود باشد که برای هر $i\geq\ell$ داشته باشیم $n_i=n_\ell$.

۳) دنبالهٔ تمام اعداد طبیعی که همهٔ ارقام آنها ۱ می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$1, 11, 111, 1111, \dots$$

ثابت کنید اگر عدد طبیعی m نسبت به ۳۰ اول باشد، آنگاه تعدادی نامتناهی از جملات دنبالهٔ فوق بر m بخش‌پذیرند.

۴) فرض کنید R یک حلقهٔ دلخواه (نه لزوماً یکدار) باشد که ایده‌آلِ دو طرفهٔ پوچتوانِ ناصفر نداشته باشد. ثابت کنید هر ایده‌آلِ راستِ ناصفر در R دارای عضوی با مربع ناصفر است.

۵) فرض کنید $\mathbb{Z}$، E و O، به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و مجموعهٔ اعداد صحیح فرد باشند. قرار دهید

$$X:=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\,\big|\ \text{هر دو نامتناهی هستند } A\cap E \text{ و } A\cap O\},$$

$$Y:=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{Z})\,\big|\ \text{نامتناهی است } A\}.$$

می‌دانیم تابعی دوسویی از X به Y وجود دارد. مطلوب است ارایهٔ ضابطهٔ صریح یک تابع پوشا $f:X\to Y$.

۶) فرض کنید S یک فضای برداری متشکل از رشته‌های دودویی (صفر و یک) به طول n روی میدان $\mathbb{Z}_2$ و از بُعد k باشد. فاصلهٔ دو عضو X و Y از S را برابر با تعداد درآیه‌هایی از آن‌ها که با هم متفاوتند تعریف می‌کنیم (به عبارت دقیق‌تر اگر $X=(x_1,\dots,x_n)$ و $Y=(y_1,\dots,y_n)$، آنگاه فاصلهٔ X و Y برابر است با تعداد iهایی که $x_i\neq y_i$). فرض کنید کمترین فاصلهٔ دو عضو متمایز S برابر با d باشد. ثابت کنید

$$d\leq\frac{n2^{k-1}}{2^k-1}.$$