پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳

---

۱) فرض کنید $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مثبت باشد. ثابت کنید

$$\left(\int_0^a f(x)dx\right)\left(\int_0^a \frac{dx}{f(x)}\right) \geq a^2.$$

پاسخ: روش اول.

می‌توان نوشت:

$$I = \int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{dx}{f(x)} = \int_0^a \int_0^a f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy = \int_0^a \int_0^a f(y)\frac{1}{f(x)}dxdy$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$2I = I + I = \int_0^a \int_0^a \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy = \int_0^a \int_0^a \frac{f(x)^2 + f(y)^2}{f(x)f(y)}dxdy$$

از طرفی به وضوح داریم $\frac{f(x)^2+f(y)^2}{f(x)f(y)} \geq 2$ برای هر $0 \leq x, y \leq a$.

پس

$$2I \geq \int_0^a \int_0^a 2dxdy = 2a.a = 2a^2$$

یعنی $2a^2 \geq 2I$ و از آنجا $I \geq a^2$ و این همان است که می خواستیم.

روش دوم.

بنا به نابرابری کوشی ـ شوارتس می‌توانیم بنویسیم

$$\left|\int_0^a \sqrt{f(x)} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right|^2 \leq \left(\int_0^a f(x)dx\right)\left(\int_0^a \frac{dx}{f(x)}\right)$$

از آنجا

$$a^2 = \left|\int_0^a dx\right|^2 \leq \left(\int_0^a f(x)dx\right)\left(\int_0^a \frac{dx}{f(x)}\right)$$

و این همان است که می‌خواهیم.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳

---

۲) فرض کنید $\{n_i\}$ دنباله‌ای صعودی (نه لزوماً اکید) از اعداد طبیعی با شرط $n_۱ \geq ۲$ باشد به طوری که سری $\sum_{i=۱}^{\infty} \frac{۱}{n_۱ \ldots n_i}$ همگرا به عددی حقیقی چون x است. ثابت کنید x گویاست اگر و تنها اگر عددی طبیعی مانند ℓ موجود باشد که برای هر $i \geq \ell$ داشته باشیم $n_i = n_\ell$.

پاسخ:

بخشِ اگرِ حکم آسان می‌باشد. بخش تنها اگر را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $x = \frac{a}{b}$ که در آن $a, b \in \mathbb{N}$. به برهانِ خلف عمل می‌کنیم. در نتیجه اندیس $k \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $n_{k+۱} - ۱ > b$. قرار دهید

$$x_k = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{n_۱ \cdots n_i}.$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} - x_k &= x - x_k = \frac{۱}{n_۱ \cdots n_{k+۱}} + \frac{۱}{n_۱ \cdots n_{k+۱} n_{k+۲}} + \cdots \\
&< \frac{۱}{n_۱ \cdots n_k} \left(\frac{۱}{n_{k+۱}} + \frac{۱}{n_{k+۱}^۲} + \frac{۱}{n_{k+۱}^۳} + \cdots \right) \\
&= \frac{۱}{n_۱ \cdots n_k} . \frac{۱}{n_{k+۱} - ۱}
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$۰ < \frac{a}{b} n_۱ \cdots n_k - x_k n_۱ \cdots n_k < \frac{۱}{n_{k+۱} - ۱}.$$

و از آنجا

$$۰ < a n_۱ \cdots n_k - b x_k n_۱ \cdots n_k < \frac{b}{n_{k+۱} - ۱} < ۱.$$

که به وضوح یک تناقض است چرا که $a n_۱ \cdots n_k - b x_k n_۱ \cdots n_k \in \mathbb{N}$. این برهان را به پایان می‌رساند.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳

---

۳) دنبالهٔ تمام اعداد طبیعی که همهٔ ارقام آنها ۱ می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, \ldots$$

ثابت کنید اگر عدد طبیعی m نسبت به ۳۰ اول باشد، آنگاه تعدادی نامتناهی از جملات دنبالهٔ فوق بر m بخش‌پذیرند.

پاسخ:

برای هر عدد صحیح مثبت m که $(m, ۱۰) = ۱$، داریم $۱۰^{\phi(m)} \equiv ۱ \pmod{m}$ و از آنجا برای هر k صحیح مثبت $m \Big| ۱۰^{k\phi(m)} - ۱$.

حال اگر به علاوه $(m, ۳) = ۱$، آنگاه $۱ + ۱۰ + ۱۰^{۲} + \cdots + ۱۰^{k\phi(m)-۱} = \frac{۱۰^{k\phi(m)}-۱}{۱۰-۱}$ $m\Big|$. پس اگر $(m, ۳۰) = ۱$، آنگاه برای هر k طبیعی، $m \Big| \underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{k\varphi(m) \text{ بار}}$.

---

۴) فرض کنید R یک حلقهٔ دلخواه (نه لزوماً یکدار) باشد که ایده‌آلِ دو طرفهٔ پوچتوانِ ناصفر نداشته باشد. ثابت کنید هر ایده‌آلِ راستِ ناصفر در R دارای عضوی با مربع ناصفر است.

پاسخ:

برای رسیدن به یک تناقض، فرض کنیم ایده‌آل راست ناصفری چون I در R موجود باشد که مربع هر عضو آن 0 است. در این صورت برای هر دو عضو x و y در I خواهیم داشت $(x+y)^2 = 0$ و بنابراین $xy = -yx$. پس برای هر $x \in I$ داریم $(xI)(xI) = 0$ و از اینجا $(RxI)(RxI) \subseteq (Rx)I(xI) = R(xI)(xI) = 0$. پس ایده‌آل دوطرفهٔ RxI پوچتوان است و از آنجا بنا به فرض خواهیم داشت $RxI = 0$. این نشان می‌دهد که xI مشمول پوچساز راست R در R است. اما پوچساز اخیر یک ایده‌آل دوطرفه پوچتوان است و بنابراین با توجه به فرض مسأله صفر است. درنتیجه $xI = 0$. حال چون x عضو دلخواهی از I بود، باید داشته باشیم $I^2 = 0$ و از آنجا $(RI)(RI) \subseteq RI^2 = 0$. اما RI یک ایده‌آل دوطرفهٔ R است که پوچتوان بودن آن بنا بر فرض مسأله مستلزم صفر بودن آن است. سرانجام از این‌که I مشمول پوچساز راست R در R (که گفتیم باید صفر باشد) است، معلوم می‌شود $I = 0$. این یک تناقض است.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳

---

۵) فرض کنید $\mathbb{Z}$، E و O، به‌ترتیب مجموعهٔ اعداد صحیح، مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و مجموعهٔ اعداد صحیح فرد باشند. قرار دهید

$$X := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Big| \text{هر دو نامتناهی هستند } A \cap E \text{ و } A \cap O\},$$

$$Y := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \Big| \text{نامتناهی است } A\}.$$

می‌دانیم تابعی دوسویی از X به Y وجود دارد. مطلوب است ارایهٔ ضابطهٔ صریح یک تابع پوشا $f : X \to Y$.

پاسخ:

برای هر $A \in X$، مقدار $f(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(A) = \{k | k \in \mathbb{Z}, ۲k \in A\}$$

حال کافی است برای هر $B \in Y$، یک $A \in X$ پیدا کنیم که $f(A) = B$. قرار دهید

$$A := \{۲k | k \in B\} \cup O$$

واضح است که $A \in X$ و $f(A) = B$.

پاسخ سؤالات بیست و نهمین مسابقه ریاضی دانشجویی کشور

جلسه اول ۸۴/۲/۱۳

---

۶) فرض کنید S یک فضای برداری متشکل از رشته‌های دودویی (صفر و یک) به طول n روی میدان $\mathbb{Z}_۲$ و از بُعد k باشد. فاصلهٔ دو عضو X و Y از S را برابر با تعداد درآیه‌هایی از آن‌ها که با هم متفاوتند تعریف می‌کنیم (به عبارت دقیق‌تر اگر $X = (x_۱, \dots, x_n)$ و $Y = (y_۱, \dots, y_n)$، آنگاه فاصلهٔ X و Y برابر است با تعداد iهایی که $x_i \neq y_i$). فرض کنید کمترین فاصلهٔ دو عضو متمایز S برابر با d باشد. ثابت کنید

$$d \leq \frac{n۲^{k-۱}}{۲^k - ۱}.$$

پاسخ:
نخست ملاحظه می‌کنیم که چون S $Z_۲$ فضای برداری است لذا d برابر است با کمترین تعداد درایه‌های ۱ در بین رشته‌های غیر صفر S یا همان کمترین وزن یک عضو غیر صفر S.

واضح است که S دارای ۲^k عضو است. اعضای غیرصفر S را به صورت سطری در قالب یک آرایهٔ $(۲^k - ۱ \times n)$ نشان می‌دهیم ک هر عضو غیر صفر از S به صورت یک سطر از آن آرایه نمایش داده می‌شود. این آرایه را A می‌نامیم. فرض می‌کنیم k سطر اول آرایه A تشکیل یک پایه برای S می‌دهند که این زیر آرایهٔ $k \times n$ را با B نشان می‌دهیم. تعداد کل درایه‌های ۱ در A حداقل برابر $d(۲^k - ۱)$ است. از طرف دیگر ثابت می‌کنیم این تعداد حداکثر برابر $n(۲^{k-۱})$ است. اگر این مطلب ثابت شود خواهیم داشت $d(۲^k - ۱) \leq n۲^{k-۱}$ و مسأله حل می‌شود. نشان می‌دهیم تعداد یک‌ها در هر ستون از آرایهٔ A یا برابر است با صفر و یا دقیقاً $۲^{k-۱}$.

هر سطر از A یک ترکیب خطی از سطرهای آرایهٔ B است. بنابراین تعداد یک‌ها در ستون دلخواه i از آرایهٔ A به صورت زیر محاسبه می‌شود:

اگر تعداد یک‌ها در ستون iام در آرایهٔ B صفر باشد آنگاه همین تعداد در همان ستون iام از آرایهٔ A نیز صفر خواهد شد. فرض کنید تعداد t درایهٔ یک در ستون iام از آرایهٔ B داریم. چون هر ترکیب خطی از سطرهای B یک سطر از A ارایه می‌دهد لذا تعداد درایه‌های یک در ستون iام از A برابر است با تعداد همه زیرمجموعه‌های ممکن مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, k\}$ به طوری که هر زیرمجموعه تعداد فرد درایهٔ یک واقع در ستون iام آرایهٔ B را شامل شود (چون می‌خواهیم درایهٔ حاصل از ترکیب خطی این سطرها در مؤلفهٔ i برابر یک شود لذا تعداد یک‌ها در خود آن سطور باید فرد باشد).

تعداد اخیر برابر است با

$$\left(\begin{array}{c}\text{تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی از} \\ \text{یک مجموعه}\, t \,\text{عضوی}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{تعداد زیرمجموعه‌های} \\ \text{یک مجموعه}\, k-t \,\text{عضوی}\end{array}\right) = ۲^{t-۱} \cdot ۲^{k-t} = ۲^{k-۱}$$

چون آرایهٔ A، n ستون دارد لذا تعداد کل یک‌ها حداکثر $n۲^{k-۱}$ است.